Симплектические структуры и гамильтоновы потоки (заметки к курсу)

С.В. Иванов

21 марта 2025 г.

Содержание

1 От ньютоновой механики к гамильтоновой

Исторически симплектические структуры выросли из классической механики, в том числе в связи с желанием излагать её на инвариантном языке. Можно выделить следующие этапы развития математических оснований механики:

- Ньютонова механика: уравнения движения задаются «силами», действующими на физические объекты.
- Лагранжева механика: траектории механической системы определяются как решения вариационной задачи, движение описывается уравнениями Эйлера-Лагранжа.
- Гамильтонова механика: движение описывается уравнениями Гамильтона.

Уравнения Гамильтона могут быть записаны в бескоординатной форме с помощью симплектической структуры. Симплектическое многообразие — многообразие с заданной на нем симплектической структурой — интересный объект изучения независимо от мотивировок из механики. Этим и занимается симплектическая геометрия и топология.

Сначала рассмотрим путь от ньютоновой механики к лагранжевой и от лагранжевой к гамильтоновой.

1.1 Язык ньютоновой механики

В классическими ньютоновской механике физические объекты моделируются материальными точками в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ (обычно $d = 3$). Материальная точка описывается своим положением — вектором из $\mathbb{R}^d$, который зависит от времени, и массой — положительным числом, которое предполагается постоянным.

1.1.1 Уравнения Ньютона и принцип детерминированности

Пусть n — количество рассматриваемых материальных точек, $m_1, \dots, m_n$ — их массы, $q_1(t), \dots, q_n(t)$ — их положения в момент времени t. Вектор

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

называется *конфигурацией* системы в момент t. Пространство $(\mathbb{R}^d)^n$ (или область в нем, состоящая из допустимых конфигураций рассматриваемой задачи) называется *конфигурационным пространством* данной системы.

Описание законов движения на ньютоновском языке состоит в том, что заданы «силы» $F_1, \dots, F_n$ (где $F_i = F_i(t) \in \mathbb{R}^d$ — сила, действующая на точку q_i), и движение подчинено **уравнениям Ньютона**:

$$\ddot{q}_i = \frac{F_i}{m_i}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Удобно ввести в рассмотрение *обобщенный импульс*

$$p = (m_1\dot{q}_1, \dots, m_n\dot{q}_n) \in \mathbb{R}^{dn}$$

и записывать уравнения в виде

$$\dot{p} = F,$$

где $F = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbb{R}^{dn}$.

Принцип детерминированности. Силы в каждый момент времени однозначно определяются положениями и скоростями точек в этот момент: $F_i = F_i(q(t), \dot{q}(t), t)$. Конкретный вид этой зависимости определяется физической стороной рассматриваемой задачи.

Предполагается, что зависимость сил F_i от параметров $q, \dot{q}, t$ гладкая. Тогда уравнения Ньютона становятся системой ОДУ второго порядка, которая имеет единственное решение для любых начальных условий $(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0))$. Таким образом, эволюция механической системы однозначно определяется положениями и скоростями точек в произвольный момент времени.

1.1.2 Третий закон Ньютона и сохранение импульса

Обычно предполагается, что все силы — это силы взаимодействия. А именно, для каждой пары точек q_i и q_j определена сила F_{ij}, с которой точка q_j «воздействует» на точку q_i. Вектор F_{ij} зависит только от положений и скоростей этой пары точек, а вид этой зависимости определяется физической природой объектов, представляемых этими точками.

Кроме того, в описании механической системы могут присутствовать *внешние силы*. Обычно это силы взаимодействия с объектами, которые не включены в рассматриваемую систему (например, сила притяжения Земли в задачах о движении вблизи земной поверхности), но в некоторых задачах могут также присутствовать внешние *силы инерции*, связанные с использованием неинерциальной системы отсчёта (например, сила Кориолиса).

Итоговый вектор силы F_i, действующей на точку q_i, равен сумме всех сил взаимодействия и внешних сил, действующих на эту точку:

$$F_i = F_i^e + \sum_j F_{ij},$$

где F_i^e — внешняя сила, действующая на q_i, F_{ij} — сила действия q_j на q_i. Каждое слагаемое в формуле тоже может складываться из сил разной природы, но для общего описания это несущественно.

Для сил взаимодействия постулируется ***третий закон Ньютона***: $F_{ji} = -F_{ij}$ («силы действия и противодействия равны по величине и противоположны по направлению»).

Теорема 1.1 (закон сохранения импульса)**.** *Производная суммарного импульса системы равна сумме всех внешних сил, то есть*

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i \dot{q}_i\right) = \sum F_i^e.$$

В частности, если внешних сил нет, то суммарный импульс $\sum m_i \dot{q}_i \in \mathbb{R}^d$ (не путать с обобщенным импульсом!) остается постоянным.

Доказательство. Тривиальное вычисление, из третьего закона Ньютона. □

Закон сохранения импульса удобно понимать как закон движения центра масс системы, то есть точки $q_c = \frac{1}{M}\sum m_i q_i$, где $M = \sum m_i$. Эта точка движется так же, как если бы она была материальной точкой с массой M, на которую действует сумма всех внешних сил системы $F^e = \sum F_i^e$. Таким образом, можно исключать из рассмотрения внутренние взаимодействия в подсистемах точек, рассматривая вместо них центры масс. Например, в небесной механике можно считать планеты точками, а не подсистемами, состоящими из огромного множества атомов.

1.1.3 Движение в потенциальном поле, сохранение энергии

Система с силовым полем — такая, где сила, действующая на материальную точку, зависит только от положения точки. Из физических соображений (закон сохранения энергии, невозможность вечного двигателя) силовое поле должно быть потенциальным, то есть на конфигурационном пространстве существует гладкая функция U, называемая *потенциальной энергией*, такая, что

$$F = -\operatorname{grad} U,$$

где grad обозначает градиент. Функция U определена с точностью до прибавления константы, физический смысл имеют только разности её значений.

Рассмотрим потенциальное поле в $\mathbb{R}^d$, в котором движется одна частица $q = q(t)$ с массой m. Уравнения Ньютона принимают вид

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{m} \operatorname{grad} U(q(t)).$$

Пример 1.2. Для ньютоновского гравитационного поля с центром в нуле потенциальная энергия имеет вид $U(q) = -\frac{Gm}{|q|}$, где G — константа, определяемая массой центрального тела. Сила действует по закону обратных квадратов: $F = -Gm\frac{q}{|q|^3}$.

Упражнение 1.3. Любое центральное силовое поле (т. е. поле радиально направленных сил с величиной, зависящей только от расстояния до центра) потенциально.

Определение 1.4. *Кинетической энергией* материальной точки $q = q(t)$ с массой m называется величина $\frac{m|\dot{q}|^2}{2}$.

Теорема 1.5 (закон сохранения энергии)**.** *При движении в потенциальном поле сумма кинетической и потенциальной энергии остаётся постоянной:*

$$\frac{m|\dot{q}(t)|^2}{2} + U(q(t)) = \operatorname{const}.$$

Доказательство. Дифференцируя слагаемые, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{m|\dot{q}(t)|^2}{2} = m\langle \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\rangle = \langle \dot{q}(t), -\operatorname{grad} U(q(t))\rangle$$

и

$$\frac{d}{dt}U(q(t)) = d_{q(t)}U(\dot{q}(t)) = \langle \dot{q}(t), \operatorname{grad} U(q(t))\rangle.$$

Сумма производных равна нулю, откуда следует требуемое. □

1.1.4 Потенциальные системы

Рассмотрим систему из n частиц $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$, между которыми имеются силы взаимодействия, зависящие только от взаимных расположений. Из физических соображений взаимодействие в каждой паре точек должно быть потенциальным, то есть для каждой пары частиц q_i и q_j определена потенциальная энергия их взаимодействия

$$U_{ij} = U_{ij}(q_i, q_j),$$

и сила действия q_j на q_i равна

$$F_{ij} = -\operatorname{grad}_{q_i} U_{ij}(q_i, q_j),$$

где $\operatorname{grad}_{q_i} U_{ij}$ обозначает градиент величины $U_{ij}(q_i, q_j)$ как функции от q_i при фиксированном значении q_j.

Кроме сил взаимодействия, допускаем наличие внешних полей с потенциальной энергией $U_i = U_i(q_i)$ для i-й частицы. Общая сила, действующая на i-ю точку, по определению равна

$$F_i = F_i^e + \sum_{j \neq i} F_{ij} = -\operatorname{grad} U_i(q_i) - \sum_{j \neq i} \operatorname{grad}_{q_i} U_{ij}(q_i, q_j). \tag{1.1}$$

Уравнения движения стандартные:

$$\ddot{q} = \left(\frac{1}{m_1} F_1, \ldots, \frac{1}{m_n} F_n \right).$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — массы частиц.

Предположения. Дополнительно предполагаем, что энергия взаимодействия U_{ij} зависит только от вектора $q_i - q_j$ и симметрична:

$$U_{ij} = U_{ji} = U_{ij}(q_i - q_j).$$

Это мотивируется физическими соображениями: однородность пространства (т.е. инвариантность законов физики относительно параллельных переносов) и третий закон Ньютона.

Определение 1.6. Механические системы рассматриваемого типа, удовлетворяющие указанным предположениям, далее будем называть *потенциальными системами.*

Замечание. Физические соображения (изотропность пространства) позволяют также предположить, что вектор $U_{ij}(q_i, q_j)$ пропорционален $q_i - q_j$ и коэффициент пропорциональности зависит только от расстояния $|q_i - q_j|$. Нам это не потребуется.

Сведение к случаю одной точки

Рассмотрим потенциальную систему как выше. Будем обозначать буквой q точку конфигурационного пространства,

$$q = (q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbb{R}^d)^n.$$

Определим общую потенциальную энергию системы

$$U(q) = \sum_{i=1}^{n} U_i(q_i) + \sum_{1 \leq i < j < n} U_{ij}(q_i, q_j). \tag{1.2}$$

Будем рассматривать U как функцию переменных $q_1, \ldots, q_n$ и обозначать через $\operatorname{grad}_{q_i} U$ её градиент как функции одной переменной $q_i \in \mathbb{R}^d$ при фиксированных значениях остальных. Формулу (1.1) для силы F_i можно переписать в виде

$$F_i = -\operatorname{grad}_{q_i} U(q), \tag{1.3}$$

так как разность между $U(q)$ и функциями, дифференцируемыми в (1.1), состоит из слагаемых, не зависящих от q_i.

Введём на конфигурационном пространстве $(\mathbb{R}^d)^n$ новое скалярное произведение:

$$\langle v, w \rangle_m := \sum_{i=1}^{n} m_i \langle v_i, w_i \rangle$$

для всех $v = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ и $w = (w_1, \ldots, w_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$, где $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 1.7. *В терминах введенной выше структуры ньютоновские уравнения движения можно записать в виде*

$$\ddot{q} = -\operatorname{grad}_m U(q),$$

где $\operatorname{grad}_m U(q)$ *— градиент функции* U *относительно евклидовой метрики* $\langle , \rangle_m$*, то есть такой вектор из* $(\mathbb{R}^d)^n$*, что*

$$\langle \operatorname{grad}_m U(q), w \rangle_m = d_q U(w)$$

для всех $w \in \mathbb{R}^{dn}$.

Доказательство. Из формулы (1.3) имеем

$$\ddot{q}_i = -\frac{1}{m_i} \operatorname{grad}_{q_i} U(q)$$

для каждого $i = 1, \ldots, n$. С другой стороны, вектор $\operatorname{grad}_m U(q)$ выражается через обычный градиент равенством

$$\operatorname{grad}_m U(q) = \Big(\frac{1}{m_1} \operatorname{grad}_{q_1} U(q), \ldots, \frac{1}{m_n} \operatorname{grad}_{q_n} U(q) \Big).$$

Из этих равенств сразу следует требуемое. □

Таким образом, систему рассматриваемого типа всегда можно свести к движению одной точки с массой 1 в потенциальном поле в (dn)-мерном конфигурационном пространстве. Это конфигурационное пространство как векторное пространство совпадает с $\mathbb{R}^{dn} = (\mathbb{R}^d)^n$, но его евклидова структура задаётся нестандартным скалярным произведением $\langle , \rangle_m$. Это скалярное произведение называется *тензором массы.*

В итоге механическая система задаётся парой (X, U), где X — конечномерное евклидово пространство, $U\colon\ X \to \mathbb{R}$ — гладкая функция (потенциальная энергия). Или, более общо, тройкой (X, Ω, U), где $\Omega \subset X$ — открытое множество допустимых конфигураций, а функция U определена только на Ω. Тензор массы входит в эти данные как часть структуры евклидова пространства X.

Замечание. Так как все евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны, можно преобразовать координаты так, чтобы получилось движение в потенциальном поле в $\mathbb{R}^{dn}$ со стандартным скалярным произведением. Например, подходит преобразование координат по правилу

$$q \mapsto \widetilde{q} = (\sqrt{m_1} q_1, \ldots, \sqrt{m_n} q_n),$$

вместе с соответствующей заменой переменной в функции U:

$$\widetilde{U}(\widetilde{q}) = U(q) = U\big(\tfrac{\widetilde{q}_1}{\sqrt{m_1}}, \ldots, \tfrac{\widetilde{q}_1}{\sqrt{m_1}}\big).$$

Однако в конкретных задачах такое преобразование редко бывает полезным.

Кинетическая и потенциальная энергия

В системе из n материальных точек $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^d$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ кинетической энергией называется величина

$$T = T(\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i |\dot{q}_i|^2}{2}, \tag{1.4}$$

то есть сумма кинетических энергий всех точек. В терминах тензора массы определение кинетической энергии переписывается в виде

$$T = \frac{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle_m}{2},$$

что согласуется с кинетической энергией системы из одной точки в конфигурационном пространстве с евклидовой структурой, заданной тензором массы. Теперь из закона сохранения энергии для одной точки в потенциальном поле следует закон сохранения для системы нескольких точек с потенциальными взаимодействиями:

$$T(\dot{q}) + U(q) = \mathrm{const},$$

где $U(q)$ — потенциальная энергия системы, определяемая формулой (1.2). Это можно доказать сведением к случаю одной точки как описано выше или прямым вычислением.

Импульсы и силы как ковекторы

Из рассмотрений выше видно, что импульс и силу удобно считать ковекторами:

$$p = \langle \dot{q}, \cdot \rangle_m,$$

$$F = -d_q U.$$

Ньютоновские уравнения движения по-прежнему можно записать в виде

$$\dot{p} = F,$$

где в правой и левой части теперь стоят ковекторы.

Произвольные (не обязательно потенциальные) силы интерпретируются как ковекторы следующим образом: набор сил, представленный набором векторов

$$F = (F_1, \dots, F_n) \in (\mathbb{R}^d)^n,$$

действует на вектор $v = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ по правилу

$$F \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \langle F_i, v \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ (массы в формуле не участвуют). Это правило интерпретации силы как ковектора согласовано с уравнением Ньютона $\dot{p} = F$, где $p = \langle \dot{q}, \cdot \rangle_m$ — обобщенный импульс, понимаемый как ковектор. В механике величина $F \cdot v$ называется *работой сил F на виртуальном перемещении v*.

1.1.5 Голономные связи, принцип Даламбера

Голономная связь — физическое ограничение, заставляющее траектории в конфигурационном пространстве лежать на некотором гладком подмногообразии M (это может быть и многообразие с особенностями, но этот случай не рассматриваем). Примеры: шарик на блюдце, маятник, шарнирный механизм.

В ньтоновской механике голономную связь обеспечивают дополнительно вводимые силы (сила реакции опоры, сила натяжения нити, …). Они называются *силами реакции*.

Принцип Даламбера. Силы реакции ортогональны (в правильно понимаемом смысле) подмногообразию M допустимых положений точки.

Удобно рассматривать силы как ковекторы, тогда условие ортогональности следует понимать так: ковектор сил реакции обращается в ноль на касательном пространстве подмногообразия M в данной точке. Классическая формулировка: работа силы реакции на любом виртуальном перемещении равна нулю.

Пример 1.8. Рассмотрим *шарнирный механизм*: система состоит из n материальных точек $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$, некоторые пары точек соединены жесткими стержнями, длины которых фиксированы. Таким образом, в множестве пар номеров (i,j), $1 \le i \ne j \le n$ задано симметричное множество E (рёбер графа), для каждой пары $(i,j) \in E$ задано число $\ell_{ij} > 0$, и голономное ограничение состоит в том, что $|q_i - q_j| = \ell_{ij}$ для всех пар $(i,j) \in E$.

«Школьное» правило расстановки сил в шарнирном механизме состоит в том, что стержень между точками q_i и q_j создает силу реакции F_{ij}, действующую на точку q_i, и силу реакции $F_{ji} = -F_{ij}$, действующую на точку q_j, причем эти силы пропорциональны вектору $q_i - q_j$. Проверим, что это правило согласовано с принципом Даламбера.

Пусть $M \subset (\mathbb{R}^d)^n$ — множество допустимых конфигураций шарнирного механизма. Для простоты будем предполагать, что M — гладкое подмногообразие в $(\mathbb{R}^d)^n$ (это предположение верно для почти всех наборов длин стержней). Пусть $q \in M$, $q = (q_1, \dots, q_n)$. Касательное пространство T_qM отождествим с соответствующим линейным подпространством в $(\mathbb{R}^d)^n$. Пусть $v \in T_qM$, $v = (v_1, \dots, v_n)$. Зафиксируем пару $(i,j) \in E$. Так как на M функция $|q_i - q_j|^2 = \ell_{ij}^2$ постоянна, её производная вдоль v в точке q равна нулю. С другой стороны, эта производная равна $2\langle q_i - q_j, v_i - v_j\rangle$. Таким образом, имеет место равенство

$$\langle q_i - q_j, v_i - v_j\rangle = 0.$$

Пусть $F_{ij}, F_{ji} \in (\mathbb{R}^d)^n$ — векторы «сил реакции», пропорциональные $q_i - q_j$ и противоположные друг другу. Тогда из последнего равенства следует, что

$$\langle F_{ij}, v_i\rangle + \langle F_{ji}, v_j\rangle = \langle F_{ij}, v_i - v_j\rangle = 0. \tag{1.5}$$

Здесь в первом равенстве используется тождество $F_{ji} = -F_{ij}$, а во втором — то, что вектор F_{ij} пропорционален $q_i - q_j$. Складывая равенства (1.5) по всем парам $(i,j) \in E$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \langle F_i, v_i\rangle = 0, \tag{1.6}$$

где F_i — сумма сил реакции, действующих на q_i, то есть

$$F_i = \sum_{j:(i,j)\in E} F_{ij}.$$

Равенство (1.6) означает, что вектор сил $F = (F_1, \dots, F_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ ортогонален вектору v: $\langle F, v\rangle = 0$. Так как v — произвольный вектор из T_qM, отсюда следует, что $F \perp T_qM$ в стандартной евклидовой метрике пространства $(\mathbb{R}^d)^n$. Это и есть принцип Даламбера (напомним, что массы не участвуют в интерпретации сил как ковекторов).

Следующая теорема показывает, что принцип Даламбера однозначно определяет движение в системе с голономными связями. С физической точки зрения Ω в теореме — конфигурационное пространство механической системы, F — зависимость сил (за исключением силы реакции) от положения и скорости, M — множество конфигураций, допускаемых голономной связью.

Теорема 1.9. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^n$ — гладкая функция, $M \subset \Omega$ — гладкое подмногообразие, $q_0 \in M$ и $v_0 \in T_{q_0}M$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует единственная гладкая кривая $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ с начальными данными $\gamma(0) = q_0$ и $\dot\gamma(0) = v_0$, удовлетворяющая условию «ортогональности силы реакции»:*

$$\ddot\gamma(t) - F(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)}M \tag{1.7}$$

для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $k = \dim M$. Так как утверждение теоремы локально, можно считать Ω малой окрестностью точки q. Если эта окрестность достаточно мала, что M можно представить в виде регулярного прообраза: существует гладкое отображение $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$, дифференциал которого всюду имеет ранг $n-k$, такое, что $M = h^{-1}(0)$.

Пусть γ — гладкая кривая в M. Тогда функция $h \circ \gamma$ — константа. Дифференцируя её два раза, получаем равенство

$$0 = (h \circ \gamma)'' = dh(\ddot\gamma) + d^2h(\dot\gamma, \dot\gamma), \tag{1.8}$$

где $\dot\gamma = \dot\gamma(t)$ и $\ddot\gamma = \ddot\gamma(t)$, а dh и d^2h обозначают первый и второй дифференциал функции h в точке $\gamma(t)$. Это равенство можно рассматривать как линейное уравнение на вектор $\ddot\gamma$. Более общо, рассмотрим произвольные $q \in \Omega$ и $v \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению

$$d_qh(\xi) + d_q^2h(v, v) = 0.$$

Так как $\operatorname{rank} d_qh = n-k$ и $\ker d_qh = T_qM$, уравнение имеет единственное решение ξ_0 в ортогональном дополнении $(T_qM)^\perp$, а всё множество его решений — аффинное подпространство $\xi_0 + T_qM$. Обозначим вектор ξ_0 через $S_q(v)$. Нетрудно проверить, что S_q — квадратичное отображение, гладко зависящее от q. Уравнение (1.8) теперь можно переписать в виде

$$\ddot\gamma(t)^\perp = S_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)), \tag{1.9}$$

где $\ddot\gamma(t)^\perp$ — проекция вектора $\ddot\gamma(t)^\perp$ на ортогональное дополнение $(T_{\gamma(t)}M)^\perp$. (Эта формула — многомерный аналог теоремы Менье из дифференциальной геометрии, а отображение S_q играет роль второй формы поверхности M).

Условие «ортогональности силы реакции» (1.7) однозначно определяет проекцию вектора $\ddot\gamma(t)$ на касательное пространство $T_{\gamma(t)}M$. Более общо, для точки $q \in \Omega$ обозначим через P_q ортогональную проекцию из $\mathbb{R}^n$ на подпространство $\ker d_qh$. Тогда условие (1.7) можно переписать в виде

$$\ddot\gamma(t)^\top = P_{\gamma(t)}(F(\gamma(t), \dot\gamma(t))), \tag{1.10}$$

где $\ddot\gamma(t)^\top = P_{\gamma(t)}(\ddot\gamma(t))$. Теперь из равенства $\ddot\gamma(t) = \ddot\gamma(t)^\perp + \ddot\gamma(t)^\top$ следует, что для любой кривой γ, удовлетворяющей условиям теоремы, выполняется равенство

$$\ddot\gamma(t) = S_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) + P_{\gamma(t)}(F(\gamma(t), \dot\gamma(t))). \tag{1.11}$$

Так как это ОДУ второго порядка, его решение однозначно определяется начальными данными $\gamma(0)$ и $\dot\gamma(0)$. Это доказывает единственность в теореме.

Чтобы доказать существование, рассмотрим кривую $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, определяемую как решение уравнения (1.11) с начальными данными $\gamma(0) = q_0 \in M$ и $\dot\gamma(0) = v_0 \in T_{q_0}M$. Из уравнения (1.11) следует равенство (1.9), которое равносильно равенству $(h \circ \gamma)'' = 0$, см. (1.8). Так как $v_0 \in T_{q_0}M$, имеем $(h \circ \gamma)'(0) = 0$, откуда $(h \circ \gamma)' = 0$ всюду. Следовательно, $h \circ \gamma$ — константа, а так как $q_0 \in M$, эта константа равна $0_{\mathbb{R}^{n-k}}$. Таким образом, $\gamma(t) \in M$ при всех t. Условие (1.7) следует из (1.10), которое следует из уравнения (1.11). $\square$

1.2 Лагранжева механика

1.2.1 Лагранжевы системы

Это напоминание из курса вариационного исчисления.

Определение 1.10. *Лагранжева система* — пара (M, L), где

- M — гладкое многообразие, называемое *конфигурационным пространством*;
- L — *лагранжиан* — гладкая функция на касательном расслоении TM (лагранжиан, не зависящий от времени) или, в общем случае, на $TM \times \mathbb{R}$ (лагранжиан, зависящий от времени).

Для гладкой кривой $q\colon [a,b] \to M$ определяем *интеграл действия*

$$I(q) = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt,$$

где $(q(t), \dot{q}(t))$ — касательный вектор скорости кривой в момент t. Кривая q называется *траекторией* лагранжевой системы, если она является стационарной точкой функционала I в смысле варианционного исчисления: для любой гладкой вариации кривой q с фиксированными концами производная функционала I вдоль вариации равна 0.

Далее будем рассматривать только лагранжианы, не зависящие от времени.

Замечание. В некоторых задачах лагранжиан L может быть определён не на всём касательном пространстве TM, а на открытом подмножестве $\Omega \subset TM$. В таких случаях в определении нужно ограничиваться классом допустимых кривых, у которых все векторы скорости принадлежат Ω. Всё остальное без изменений.

Пусть на M заданы локальные координаты $x_1, \dots, x_n$, и пусть $y_1, \dots, y_n$ — ассоциированные с ними координаты в касательных пространствах. Лагранжиан L можно рассматривать как функцию этих координат и писать соответствующие частные производные.

Теорема 1.11 (уравнения Эйлера–Лагранжа)**.** *Траектории лагранжевой системы — те и только те кривые $q = q(t)$, для которых выполняется система уравнений*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_i}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q(t), \dot{q}(t)) = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. См. курс вариационного исчисления. □

Краткая запись уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

В этой записи символы $q = (q_1, \dots, q_n)$ и $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ используются как формальные аргументы лагранжиана L (вместо x_i и y_i), а обозначение типа $\frac{\partial}{\partial q}$ скрывает за собой список частных производных $\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}$.

Замечание. Для любой кривой $q = q(t)$ (не обязательно стационарной) левая часть уравнения Эйлера-Лагранжа имеет инвариантный смысл как ковектор из $T^*_{q(t)}M$.

Определение 1.12 (невырожденность лагранжиана)**.** Лагранжиан $L\colon TM \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным в точке* $(x, v) \in TM$, если второй дифференциал $d^2_v(L|_{T_xM})$ — невырожденная билинейная форма. Лагранжиан называется *невырожденным*, если он невырожден в каждой точке.

Замечание. В координатах (x_i, y_i) (см. выше) невырожденность лагранжиана равносильна невырожденности матрицы вторых производных по координатам y_i:

$$\det\left(\frac{\partial L}{\partial y_i\,\partial y_j}\right) \neq 0.$$

Сама эта матрица зависит от выбора координат, но ее вырожденность или невырожденность — не зависит.

Теорема 1.13. *Если лагранжиан невырожден в точке $(x, v) \in TM$, то в окрестности этой точки уравнение Эйлера-Лагранжа эквивалентно системе ОДУ второго порядка, разрешенной относительно вторых производных.*

Как следствие, при невырожденном лагранжиане уравнение Эйлера-Лагранжа имеет единственное решение для любых начальных данных $q(t_0), \dot{q}(t_0)$.

Доказательство. См. курс вариационного исчисления. Или «очевидно». □

Пример 1.14. Геодезические на римановом многообразии M — стационарные точки функционала длины, т.е. они могут рассматриваться как траектории лагранжевой системы с лагранжианом $L(x, v) = |v|$. Однако этот лагранжиан вырожден, и поэтому все перепараметризации геодезической тоже окажутся стационарными точками.

Правильно вместо этого рассматривать квадратичный лагранжиан $L(x, v) = \frac{|v|^2}{2}$, тогда стационарными точками будут в точности геодезические, параметризованные с постоянной скоростью.

1.2.2 Принцип наименьшего действия

В основе лагранжевой механики лежит принип наименьшего действия Гамильтона, который для наших целей можно сформулировать так: *«правильные» механические системы — лагранжевы.*

То есть, во многих задачах механики можно определить (достаточно естественно и единообразно) лагранжианы, которые задают правильные уравнения движения. Язык лагранжевой механики дает больше возможностей, чем ньютоновский, и поэтому предпочтителен всюду за пределами «школьной» физики.

Далее описываются правила перевода с ньютоновского языка на лагранжев для механических систем с потенциальными взаимодействиями и голономными связями. Сначала рассмотрим только потенциальные системы (без голономных связей). Они преобразуются в лагранжевы системы по следующему правилу: конфигурационное пространство M лагранжевой системы — то же самое евклидово пространство X, что и в ньютоновском описании, а лагранжиан полагается равным **разности** кинетической и потенциальной энергии:

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q),$$

где $(q, \dot{q})$ — произвольный элемент касательного пространства $TX \cong X \times X$, $T(\dot{q})$ — кинетическая энергия «виртуального перемещения» $\dot{q}$, см. (1.4), $U(q)$ — потенциальная энергия конфигурации q, см. (1.2). Краткая запись: $L = T - U$.

Теорема 1.15. *Для потенциальной механической системы решения уравнений Ньютона совпадают с траекториями лагранжевой системы с лагранжианом $L = T - U$.*

Доказательство. В силу сведения к случаю одной точки достаточно доказать утверждение для системы из одной точки с массой 1 в потенциальном поле в $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. В этом случае лагранжиан имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = \frac{|\dot{q}|^2}{2} - U(q),$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\dot{q}_i = \ddot{q}_i$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q).$$

Вычитая, получаем, что i-е уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Всю систему уравнений Эйлера-Лагранжа можно записать в виде

$$\ddot{q} + \operatorname{grad} U(q) = 0,$$

а это эквивалентно уравнению Ньютона $\ddot{q} = -\operatorname{grad} U(q)$. □

Замечание. Нетрудно видеть, что выражение $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ в уравнении Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $L = T - U$ совпадает с обобщенным импульсом, рассматриваемым как ковектор. Для произвольных лагранжевых систем ковектор $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ тоже называют обобщенным импульсом.

1.2.3 Голономные связи

В лагранжевой механике голономная связь вводится очень просто: конфигурационное пространство заменяется на подмногообразие M конфигураций, допускаемых голономной связью, а лагранжиан L сужается на TM.

Теорема 1.16. *Для потенциальной системы с голономной связью сужение лагранжиана на подмногообразие допустимых конфигураций соответствует принципу Даламбера.*

Доказательство. Можно считать, что речь идет о системе из одной точки с массой 1 в потенциальном поле в $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой. Тогда лагранжиан имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = \frac{|\dot{q}|^2}{2} - U(q).$$

Пусть $q = q(t)$ — кривая в подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $R(t)$ правую часть уравнения Эйлера-Лагранжа в объемлющем пространстве:

$$R(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot{q}(t) + \operatorname{grad} U(q(t)). \tag{1.12}$$

Как известно из вариационного исчисления, производная интеграла действия вдоль вариации с полем вариации $V(t)$ с фиксированными концами равна

$$\int_a^b \langle R(t), V(t)\rangle\, dt,$$

где a и b — концы отрезка параметров.

Так как мы ограничиваемся только кривыми, лежащими в M, условие стационарности означает, что интеграл обращаться в 0 при любом выборе поля $V(t)$ с условием $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ при всех $t \in (a,b)$, а также $V(a) = V(b) = 0$. Как и в доказательстве уравнения Эйлера-Лагранжа, это равносильно поточечному условию: $\langle R(t), v\rangle = 0$ для любых $t \in (a,b)$ и $v \in T_{\gamma(t)}M$. Это означает, что $R(t) \perp T_{\gamma(t)}M$. Но $R(t)$ и есть вектор силы реакции, так как $\ddot{q} = -\operatorname{grad} U + R$ из (1.12). □

При отсутствии потенциальной энергии траектории голономной системы — то же самое, что геодезические подмногообразия M. Из доказанного вытекает

Следствие 1.17. *Равносильны следующие определения геодезической на гладком подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$:*

1. *Кривая $\gamma\colon [a,b] \to M$ — геодезическая, если $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ для всех $t \in [a,b]$.*
2. *Кривая $\gamma\colon [a,b] \to M$ — геодезическая, если она является стационарной для функционала энергии*
$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b |\dot{\gamma}|^2.$$

Замечание. Нетрудно проверить, что стационарные кривые функционала $E(\gamma)$ — то же самое, что стационарные кривые функционала длины $\int |\dot{\gamma}|$, параметризованые с постоянной скоростью.

1.3 Уравнения Гамильтона

1.3.1 Преобразование Лежандра

Определение 1.18. Пусть V — векторное пространство, $\Omega \subset V$ — открытая область, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, у которой второй дифференциал $d_v^2 f$ невырожден в каждой точке $v \in V$. Рассмотрим отображение $\mathbf{L}_f\colon \Omega \to V^*$, заданное равенством
$$\mathbf{L}_f(v) = d_v f, \qquad x \in \Omega.$$
Из условия невырожденности следует, что $\mathbf{L}_f$ — локальный диффеоморфизм. Предположим, что он инъективен. Положим $\Omega^* = \mathbf{L}_f(\Omega)$ и определим функцию $f^*\colon \Omega^* \to \mathbb{R}$ равенством
$$f^*(p) = p \cdot v_p - f(v_p), \quad \text{где } v_p = \mathbf{L}_f^{-1}(p),$$
для $p \in \Omega^*$, где умножение обозначает применение ковектора к вектору. Функция f^* называется *преобразованием Лежандра* функции f, а отображение $\mathbf{L}_f$ — *преобразованием Лежандра векторов*, ассоциированным с f.

В приложениях, как правило, f определена всюду на V и есть причины, по которым f^* определена всюду на V^*.

Пример 1.19. Пусть $V = \Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2}{2}$, где $a > 0$. Тогда $f^*(p) = \frac{p^2}{2a}$.

Пример 1.20. Пусть B — невырожденная симметричная билинейная форма на V, и
$$f(v) = \frac{1}{2}B(v,v).$$

Тогда $\mathbf{L}_f(v) = B(v, \cdot)$, то есть $\mathbf{L}_f$ — изоморфизм между V и V^*, задаваемый формой B, и f^* имеет вид

$$f^*(p) = \frac{1}{2}B^*(p,p) = \frac{1}{2}B(v_p, v_p), \quad \text{где } v_p = L_f^{-1}(p).$$

То есть f^* задается той же формулой, что f, с заменой B на билинейную форму B^*, в которую изоморфизм $\mathbf{L}_f$ переводит форму B. В частности,

1. Если $f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма на V, то $f^*(p) = \frac{1}{2}(\|p\|^*)^2$, где $\|\cdot\|^*$ — двойственная норма на V^*.

2. Если $V = \mathbb{R}^n$ и f имеет вид $f(v) = \frac{1}{2}v^T A v$, где A — невырожденная симметричная матрица, то $f^*(p) = \frac{1}{2}\, p\, A^{-1} p^T$ для всех $p \in V^*$. Здесь в обозначениях имеется в виду, что векторы записываются матрицами-столбцами, а ковекторы — матрицами-строками.

Пример 1.21. Если $g(v) = f(v) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — константа, то $g^*(p) = f^*(p) - C$.

Рассмотренных выше примеров достаточно для изучения механических систем, определяемых кинетической и потенциальной энергией. Для расширения кругозора рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1.22. Если $g(v) = \lambda f(v)$, где $\lambda > 0$ — константа, то $g^*(p) = \lambda f^*(p/\lambda)$.

Пример 1.23. Пусть $V = \mathbb{R}$, $a > 1$, $f(x) = \frac{x^a}{a}$. Тогда $f^*(p) = \frac{p^b}{b}$, где $b > 1$ таково, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Пример 1.24. Пусть $f\colon V \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и предположим, что f растет на бесконечности быстрее любой линейной функции. Тогда f^* определена всюду на V^* и

$$f^*(p) = \max_{v \in V}\{pv - f(v)\},$$

для всех $p \in V^*$, где $pv = p(v)$ — применение ковектора к вектору.

Примечание: в этом случае f^* также называется функцией, *двойственной по Юнгу* к f. Для выпуклых функций можно не предполагать гладкость, если в качестве определения f^* использовать формулу с максимумом.

Пример 1.25. Пусть f определена равенством $f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, где $\|\cdot\|$ — норма на V (не обязательно евклидова). Тогда $f^*(p) = \frac{1}{2}(\|p\|^*)^2$, где $\|\cdot\|^*$ — двойственная норма на V^*.

Теорема 1.26 (инволютивность преобразования Лежандра)**.** *Пусть $f\colon \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям из определения преобразования Лежандра: гладкость, невырожденность второго дифференциала и инъективность $\mathbf{L}_f$. Тогда f^* удолетворяет тем же условиям, и выполняются равенства*

1. $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$;

2. $f^{**} = f$.

Здесь подразумевается, что V^{**} канонически отождествлено с V.

Доказательство. Гладкость f^* следует из определения и того, что $\mathbf{L}_f$ — диффеоморфизм. Из этой гладкости следует, что определено отображение $\mathbf{L}_{f^*}\colon \Omega^* \to V$, заданное равенством $\mathbf{L}_{f^*}(p) = d_p(f^*)$ для всех $p \in \Omega^* = \mathbf{L}_f(\Omega)$.

Проверим, что $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$. Для этого продифференцируем f^* в точке $p_0 = \mathbf{L}_f(v_0)$, где $v_0 \in \Omega$, в направлении $\xi \in V^*$. Пусть ξ — начальный вектор скорости некоторой кривой $p(t)$

с началом в p_0, и пусть $v(t) = v_{p(t)} = (\mathbf{L}_f)^{-1}(p(t))$. Дифференцируя определение функции f^* вдоль кривой $p(t)$, получаем

$$d_p f^*(\dot p) = f^*(p)'_{t=0} = (pv - f(v))'_{t=0} = \dot p v + p\dot v - d_v f(\dot v),$$

где $v = v(t)$, $p = p(t)$ и т. д. Последние два слагаемых сокращаются, так как $p = d_v f$. Получаем, что $d_p f^*(\dot p) = \dot p v$. Подставляя $t = 0$, получаем $d_{p_0} f^*(\xi) = \xi v_0$. Так как p_0 — произвольный элемент из V^*, отсюда следует, что $d_{p_0} f^* = v_0$ с учётом канонического отождествления V^{**} с V.

Таким образом, $\mathbf{L}_f$ и $\mathbf{L}_{f^*}$ — взаимно обратные диффеоморфизмы между открытыми множествами $\Omega \subset V$ и $\Omega^* \subset V^*$. В частности, определено преобразование Лежандра f^{**}.

Теперь докажем, что $f^{**} = f$. Зафиксируем $v \in \Omega$ и проверим, что $f^{**}(v) = f(v)$. По определению и доказанному равенству $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$,

$$f^{**}(v) = pv - f^*(p),$$

где $p = p_v = (\mathbf{L}_{f^*})^{-1}(v) = \mathbf{L}_f(v)$. Вектор v_p из определения равен v, поэтому $f^*(p) = pv - f(v)$. Подставляя, получаем требуемое равенство $f^{**}(v) = f(v)$. □

Упражнение 1.27. Пусть $f\colon V \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция (не обязательно гладкая), и f^* определено формулой из примера 1.24. Тогда f^* тоже выпуклая и $f^{**} = f$.

1.3.2 Преобразование Лежандра на многообразии

Пусть M — гладкое многообразие, $F\colon TM \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Для $x \in M$ обозначаем $F_x = F|_{T_xM}$. Предположим, что для каждого $x \in M$ функция $F_x\colon T_xM \to \mathbb{R}$ имеет преобразование Лежандра F_x^*, определённое на всём кокасательном пространстве T_x^*M.

Объединяя эти преобразования, заданные в слоях касательного расслоения, получаем отображение

$$\mathbf{L}_F\colon TM \to T^*M$$

и функцию

$$F^*\colon T^*M \to \mathbb{R},$$

называемые преобразованием Лежандра функции F (а также гамильтонианом, соответствующим лагранжиану F, см. ниже).

Теорема 1.28. *При сделанных предположениях $\mathbf{L}_F$ — диффеоморфизм между TM и T^*M, F^* удовлетворяет тем же предположениям, $\mathbf{L}_{F^*} = (\mathbf{L}_F)^{-1}$, и $F^{**} = F$.*

Доказательство. Диффеоморфность следует из теоремы об обратной функции, все остальные утверждения проверяются послойно и следуют из предыдущей теоремы. □

Пример 1.29. Пусть M снабжено римановой метрикой и задана функция $U\colon M \to \mathbb{R}$. Пусть $F\colon TM \to \mathbb{R}$ определена равенством

$$F(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - U(x)$$

для всех $x \in M$, $v \in T_xM$, где $|v|$ — длина вектора в римановой метрике. Тогда

$$F^*(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + U(x)$$

для всех $x \in M$, $p \in T_x^*M$, где $|p|$ — норма ковектора относительно римановой метрики.

Замечание. Предположение о том, что F и F^* определены всюду, сделано только для упрощения обозначений. В общем случае, когда они определены на открытых подмножествах $\Omega \subset TM$ и $\Omega^* \subset T^*M$, всё точно так же.

1.3.3 Переход к уравнениям Гамильтона

Определение 1.30. Пусть (M, F) — лагранжева система, и предположим, что определено биективное преобразование Лежандра $\mathbf{L}_F \colon TM \to T^*M$. Преобразование Лежандра $F^* \colon T^*M \to \mathbb{R}$ лагранжиана F называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*, соответствующим данному лагранжиану. Гамильтониан обычно обозначается буквой H.

Определение 1.31. Пусть $q(t)$ — кривая в многообразии M. Кривая

$$t \mapsto \mathbf{L}_F(q(t), \dot{q}(t))$$

в T^*M называется *преобразованием Лежандра* кривой q (относительно лагранжиана F).

Введем на M локальные координаты $q_1, \ldots, q_n$, и пусть $p_1, \ldots, p_n$ — ассоциированные координаты в слоях касательного расслоения. Подставляя определение $\mathbf{L}_F$, получаем, что преобразование Лежандра кривой $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ имеет вид $(q(t), p(t))$, где $p(t)$ — обобщенный импульс,

$$p(t) = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)).$$

Теорема 1.32. *Пусть (M, F) — лагранжева система, H — соответствующий гамильтониан. Введем на T^*M координаты q_i, p_i как описано выше. Пусть $q(t)$ — траектория лагранжевой системы, $(q(t), p(t))$ — её преобразование Лежандра. Тогда для $(q(t), p(t))$ выполняются **уравнения Гамильтона**:*

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, n$. И обратно, любая кривая $(q(t), p(t))$ в T^*M, удовлетворяющая уравнениям Гамильтона, является преобразованием Лежандра некоторой лагранжевой траектории.

Доказательство. По построению и инволютивности преобразования Лежандра,

$$\dot{q} = (\mathbf{L}_{F_q})^{-1}(p) = \mathbf{L}_{H_q}(p) = d_p H_q,$$

где $H_q = H|_{T_q^*M}$. В координатах это равенство принимает вид $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Первое уравнение Гамильтона доказано.

Докажем второе уравнение Гамильтона. Из уравнения Эйлера-Лагранжа,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Остаётся доказать, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(q, v),$$

если $v \in T_qM$ и $p \in T_q^*M$ соответствуют друг другу при преобразовании Лежандра. По определению,

$$H(q, p) = p \cdot v(q, p) - F(q, v(q, p)),$$

где $v(q, p) = \mathbf{L}_{H_q}(p)$. Продифференцируем это равенство по q_i:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = p \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}(q, p) - \frac{\partial F}{\partial q_i}(q, v) - d_v F_q \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}(q, p).$$

Так как $d_v F_q = \mathbf{L}_{F_q}(v) = p$, первое и последнее слагаемое сокращаются и остаётся требуемое равенство. $\square$

2 Симплектические многообразия

2.1 Отступление: дифференциальные формы

В этом разделе приведены без доказательства определения и свойства дифференциальных форм, которые используются в дальнейшем.

2.1.1 Определения

Дифференциальная форма на гладком многообразии — это кососимметричный ковариантный тензор. Более подробно это определение можно сформулировать так.

Определение 2.1. Для векторного пространства V обозначим через $\mathcal{A}^k(V)$ пространство кососимметричных k-линейных функций $V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ (они называются *внешними k-формами* на V). Напомним, что свойство кососимметричности состоит в том, что при перестановке любой пары аргументов значение умножается на -1.

Пусть M — гладкое многообразие. *Дифференциальная k-форма* на M — это гладкое семейство $\{\alpha_x\}_{x \in M}$, где $\alpha_x \in \mathcal{A}^k(T_xM)$ для каждого $x \in M$.

Например, 0-формы — это в точности гладкие функции на M, 1-формы — то же, что ковекторные поля. Пространство k-форм на M будем обозначать через $\Omega^k(M)$.

Как обычно для тензоров, в дифференциальную k-форму можно подставить набор из k векторных полей и получить гладкую функцию. Дифференциальные k-формы можно поточечно складывать и умножать на гладкие функции. Таким образом, $\Omega^k(M)$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и модуль над кольцом гладких функций $C^\infty(M)$.

Пример 2.2. Для любой гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ её дифференциал df — дифференциальная 1-форма. Значение этой формы на касательном векторе $v \in T_xM$, где $x \in M$, по определению равно $d_xf(v)$ — производной функции f вдоль вектора v.

Пример 2.3 (демистификация символа dx_i)**.** Пусть на гладком многообразии M^n выбрана локальная система координат (карта) $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ в области $U \subset M$. По определению карта состоит из координатных функций $x_i\colon U \to \mathbb{R}$. У каждой функции x_i, как у любой гладкой функции, есть дифференциал $dx_i \in \Omega^1(U)$, который называется *координатной 1-формой* данной карты.

Пусть $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные векторные поля данной карты. При подстановке этих полей в форму dx_i получаются значения

$$dx_i(\partial_i) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой точки $p \in U$ ковекторы $(dx_i)_p$ образуют стандартный базис кокасательного пространства T_p^*M.

Формы dx_i образуют базис пространства $\Omega^1(U)$ над алгеброй функций. Действительно, пусть $\alpha \in \Omega^1(U)$. Определим на U функции $f_i = \alpha(\partial_i)$, $i = 1, \dots, n$, то есть $f_i(x) = \alpha_x(\partial_i(x))$ для всех $x \in U$. Тогда $\alpha = \sum f_i dx_i$. Это равенство следует из совпадения значений правой и левой части на координатных полях.

Определение 2.4 (Обратный перенос или pull-back)**.** Пусть M, N — гладкие многообразия, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $\alpha \in \Omega^k(N)$. *Обратный перенос* формы α отображением f — это дифференциальная форма $f^*\alpha \in \Omega^k(M)$, определяемая равенством

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(d_xf(v_1), \dots, d_xf(v_n)).$$

Легко видеть, что операция обратного переноса $f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ линейна и контравариантна: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ для любых гладких отображений $f\colon M \to N$ и $g\colon K \to M$ между гладкими многообразиями M, N, K.

2.1.2 Внешнее произведение

Определение 2.5 (внешнее произведение)**.** Пусть V — векторное пространство, $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$, $\beta \in \mathcal{A}^m(V)$. *Внешнее произведение* α и β — это форма $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}^{k+m}(V)$, определяемая равенством

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta),$$

где $\otimes$ — тензорное произведение, а Alt — оператор альтернирования (кососимметризации). При подстановке определений $\otimes$ и Alt получается явная формула:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+m}) = \frac{1}{k!\,m!} \sum_{\sigma \in S_{k+m}} (-1)^{|\sigma|} \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+m)}),$$

где $|\sigma|$ — чётность перестановки.

Если M — гладкое многообразие, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega_k(M)$, то $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+m}(M)$ определяется поточечно: $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$ для всех $x \in M$.

Если $f \in \Omega^0(M)$, то $f \wedge \beta = f\beta$ — обычное поточечное умножение на функцию.

Свойства внешнего произведения

1. Билинейность:
$$\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2,$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta,$$
$$(c\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (c\beta) = c(\alpha \wedge \beta)$$
для любых $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(V)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Omega^m(V)$ и $c \in \mathbb{R}$.

2. Кососимметричность: для $\alpha \in \Omega^k(V)$ и $\beta \in \Omega^m(V)$,
$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{km}\, \alpha \wedge \beta$$

3. Ассоциативность: для любых дифференциальных форм α, β, γ,
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

4. Уважается обратными переносами:
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
для любого гладкого $f\colon M \to N$ и дифференциальных форм α, β на N.

2.1.3 Координатное представление

Пусть на гладком многообразии M^n выбраны локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в области $U \subset M$. Соответствующие координатные векторные поля будем обозначать символами $\partial_1, \dots, \partial_n$. Будем рассматривать дифференциальные формы на U, в из число входят сужения на U дифференциальных форм из $\Omega^k(M)$.

Как объяснено в примере 2.3, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ на U определена координатная 1-форма dx_i. Для набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ рассмотрим k-форму

$$\xi_{i_1 \ldots i_k} = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{2.1}$$

Из определения внешнего произведения нетрудно найти её значение на любом наборе координатных полей $\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_k}$:

- Если набор индексов $(j_1, \ldots, j_k)$ получается из $(i_1, \ldots, i_k)$ некоторой перестановкой σ, то $\xi_{i_1 \ldots i_k}(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_k}) = (-1)^{|\sigma|}$, где $|\sigma|$ — четность перестановки.

  В частности, $\xi_{i_1 \ldots i_k}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}) = 1$.

- Если же $\{j_1, \ldots, j_k\} \neq \{i_1, \ldots, i_k\}$, то $\xi_{i_1 \ldots i_k}(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_k}) = 0$.

Отсюда видно, что формы вида (2.1) образуют базис пространства $\Omega^k(U)$. А именно, для любой формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ верно равенство

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \tag{2.2}$$

где $f_{i_1 \ldots i_k}$ — гладкая функция на U, определяемая равенством

$$\alpha_{i_1 \ldots i_k} = \alpha(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}),$$

а суммирование производится по всем k-элементным множествам $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Равенство (2.2) следует из совпадения значений правой и левой части на любом наборе из k координатных полей.

Пример 2.6. Любая 2-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$f(x, y, z) \, dx \wedge dy + g(x, y, z) \, dy \wedge dz + h(x, y, z) \, dz \wedge dx,$$

где x, y, z — обозначения для координат в $\mathbb{R}^3$, f, g, h — произвольные гладкие функции.

Интересен случай $k = n$. В этом случае базисная форма только одна: $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, а её значение на наборе векторов $v_1, \ldots, v_n$ — определитель матрицы, составленной из координат этих векторов.

2.1.4 Внешнее дифференцирование

Определение 2.7. Внешнее дифференцирование $d \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ — линейное отображение, которое однозначно задается следующими свойствами:

1. Для $f \in \Omega^0(M)$, df — обычный дифференциал функции f.
2. $d(df) = 0$ для $f \in \Omega^0(M)$.
3. $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$, если $\alpha \in \Omega^k(M)$
4. Локальность: значение формы $d\alpha$ в точке $x \in M$ однозначно определяется сужением α на любую окрестность этой точки. (На самом деле локальность можно вывести из предыдущих свойств, но проще её постулировать).

Легко видеть, что оператор d, если такой существует, однозначно определяется перечисленными свойствами. Существование такого оператора доказать сложнее. Проще всего определить его локально координатной формулой (см. ниже), проверить свойства из определения 2.7, после чего вывести независимость от выбора координат из единственности.

Свойства внешней производной

1. $d(d\alpha) = 0$ для любой дифференциальной формы α.

2. d коммутирует с обратным переносом:

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$$

для любого гладкого отображения $f\colon M \to N$ и любой дифференциальной формы α на N.

3. Для координатной k-формы вида

$$\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

внешняя производная имеет вид

$$d\alpha = (df) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

2.1.5 Когомологии де Рама

Определение 2.8. Дифференциальная форма α называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$. Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(M)$ называется *точной*, если существует $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ такая, что $\alpha = d\beta$.

Из свойства $d^2 = 0$ следует, что любая точная форма является замкнутой. Локально верно и обратное:

Теорема 2.9 (лемма Пуанкаре, без доказательства)**.** *Пусть $k \geq 1$, $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $d\alpha = 0$. Тогда существует $\beta \in \Omega^{k-1}$ такая, что $\alpha = d\beta$.*

На произвольном многообразии, вообще говоря, не всякая замкнутая форма точна. Различие между ними измеряется *когомологиями де Рама*: k-мерные когомологии де Рама — это векторное пространство $H^k_{dR}(M)$ над $\mathbb{R}$, определяемое как факторпространство

$$H^k_{dR}(M) = \{\text{замкнутые } k\text{-формы на } M\ \}/\{\text{точные } k\text{-формы на } M\ \}.$$

Элементы пространства $H^k_{dR}(M)$ называются *когомологическими классами*. Это классы эквивалентности замкнутых форм из $\Omega^k(M)$ по такому отношению эквивалентности: замкнутые формы $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ эквивалентны, если $\alpha - \beta$ — точная форма.

Когомологии де Рама изоморфны стандартным (сингулярными) группам когомологий над $\mathbb{R}$. В частности, для компактных многообразий они конечномерны.

Теорема 2.10. *Внешнее произведение $\wedge$ спускается на когомологии де Рама.*

Доказательство. Утверждение равносильно следующим двум свойствам: (1) если дифференциальные формы α и β замкнуты, то и $\alpha \wedge \beta$ замкнута, (2) если при этом одна из них точна, то $\alpha \wedge \beta$ точна. Проверим эти свойства:

1. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta \pm \alpha \wedge d\beta = 0$, так как $d\alpha = 0$ и $d\beta = 0$.

2. Пусть α точна, $\alpha = d\gamma$, тогда $d(\gamma \wedge \beta) = d\gamma \wedge \beta \pm \gamma \wedge d\beta = \alpha \wedge \beta$, откуда $\alpha \wedge \beta$ точна. $\square$

2.2 Симплектические формы

2.2.1 Определение и первые примеры

Определение 2.11. Пусть M — гладкое многообразие. *Симплектическая форма* или *симплектическая структура* на M — дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(M)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- Замкнутость: $d\omega = 0$.
- Невырожденность: для любой точки $x \in M$ и любого $u \in T_xM \setminus \{0\}$ существует $v \in T_xM$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$.

Симплектическое многообразие — многообразие с заданной на нём симплектической формой.

Симплектоморфизм — диффеоморфизм между симплектическими многообразиями, сохраняющий симплектическую форму.

Определение 2.12. *Симплектическое векторное пространство* — конечномерное векторное пространство V с заданной на нём невырожденной кососимметричной билинейной формой $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Такая форма тоже называется *симплектической формой.* Два симплектических векторных пространства *изоморфны*, если между ними существует линейная биекция, сохраняющая симплектическую форму.

Если $M = (M, \omega)$ — симплектическое многообразие, то каждое его касательное пространство T_xM с билинейной формой ω_x — симплектическое векторное пространство. Но не всякое гладкое семейство симплектических билинейных форм на касательных пространствах задаёт симплектическую структуру на M, так как еще есть условие замкнутости.

Любое симплектическое векторное пространство (V, ω) можно рассматривать как симплектическое многообразие, превратив ω в дифференциальную 2-форму с постоянными коэффициентами (т. е. инвариантную относительно параллельных переносов). Любая такая форма замкнута, это видно из координатной формулы для вешней производной.

Пример 2.13 (стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$)**.** Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n}$, обозначим его координаты через $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, а базисные векторы — через $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$. *Стандартная симплектическая форма на* $\mathbb{R}^{2n}$ — билинейная форма ω_0 на $\mathbb{R}^{2n}$, которая задается значениями на парах базисных векторов:

$$\omega_0(e_i, f_i) = -\omega_0(f_i, e_i) = 1,$$

значения на всех остальных парах базисных векторов равно 0.

Легко видеть, что это форма действительно симплектическая (т.е. невырожденная). Рассматривая её как дифференциальную форму с постоянными коэффициентами, можно записать определение в виде

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

2.2.2 Двумерный случай

В двумерном случае условия из определения симплектической формы упрощаются: условие замкнутости выполняется для любой 2-формы (так как не существует ненулевых 3-форм), а условие невырожденности равносильно тому, что форма не обращается в ноль ни в какой точке. Действительно, в локальных координатах (x, y) любая 2-форма ω имеет вид

$$\omega = f(x, y)\, dx \wedge dy.$$

Так как базисная форма $dx \wedge dy$ невырождена, условие невырожденности для ω в точке (x, y) равносильно тому, что $f(x, y) \neq 0$.

Отсюда также видно, что если на двумерном многообразии существует хотя бы одна симплектическая форма ω, то все остальные получаются из нее умножением на гладкие функции, нигде не обращающиеся в ноль.

Теорема 2.14. *На двумерном гладком многообразии M существует симплектическая форма тогда и только тогда, когда оно ориентируемо.*

Доказательство. 1. Предположим, что на M существует симплектическая форма ω. Тогда можно определить ориентацию на M следующим образом: для точки $x \in M$ и базиса (v_1, v_2) в T_xM считаем этот базис положительно ориентированным, если $\omega(v_1, v_2) > 0$, и отрицательно ориентированным, если $\omega(v_1, v_2) < 0$. Случай $\omega(v_1, v_2) = 0$ невозможен, так как ω невырождена.

2. Пусть M ориентируемо, зафиксируем его ориентацию. Выберем на M произвольную риманову метрику g, и пусть ω — форма ориентированной площади. А именно, для точки $x \in M$ и касательных векторов $v_1, v_2 \in T_xM$ значение $\omega(v_1, v_2)$ равно ориентированной площади параллелограмма, образованного векторами v_1 и v_2 в евклидовой плоскости (T_xM, g_x). □

2.2.3 Симплектическая линейная алгебра

Теперь рассмотрим произвольное симплектическое векторное пространство (V, ω).

Следствия невырожденности

1. Отображение $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ является биекцией между V и V^*.

2. Для линейного подпространства $W \subset V$ назовем его *симплектическим дополнением* линейное подпространство

$$W^\omega := \{x \in V : \forall u \in W \ \omega(u, x) = 0\}.$$

Из невырожденности ω следует, что $\dim W^\omega = \dim V - \dim W$ и $W^{\omega\omega} = W$.

Теорема 2.15. *Пусть $V = (V, \omega)$ — симплектическое векторное пространство. Тогда*

1. Размерность V чётна.

2. Существует базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ такой, что $\omega(e_i, f_i) = 1 = -\omega(f_i, e_i)$, а значения ω на всех остальных парах базисных векторов равно 0. (Такой базис называется симплектическим базисом).

Следствие 2.16. *Любое симплектическое векторное пространство изоморфно стандартному примеру $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ для некоторого n.*

Упражнение 2.17. Пусть $V = (V, \omega)$ — симплектическое векторное пространство. Подпространство $W \subset V$ называется *изотропным*, если $\omega|_{W \times W} = 0$, и *лагранжевым*, если оно изотропно и $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$. Докажите, что любое изотропное подпространство содержится в некотором лагранжевом.

2.2.4 Канонические формы на кокасательном расслоении

Пусть $M = M^n$ — гладкое многообразие. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M. Его точки будем чаще всего обозначать через (q, p) где $q \in M$, $p \in T_q^*M$.

Если на M задана локальная система координат $(q_1, \dots, q_n)$, то она порождает на слоях T_q^*M координаты $(p_1, \dots, q_n)$, где $p_i(q,p)$ — результат применения ковектора p к базисному касательному вектору $\frac{\partial}{\partial q_i}$ в точке q.

Определение 2.18. Каноническая 1-форма на T^*M — это дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(T^*M)$, определяемая равенством

$$\alpha_{(q,p)}(\xi) = p(d\pi(\xi)), \qquad \xi \in T_{(q,p)}(T^*M),$$

где $\pi\colon T^*M \to M$ — проекция расслоения, т.е. $\pi(q,p) = q$.

В координатах (q_i, p_i) каноническая 1-форма имеет вид

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i.$$

Краткая запись: $\alpha = p\, dq$.

Определение 2.19. Каноническая симплектическая форма на T^*M — это дифференциальная форма $\omega \in \Omega^2(T^*M)$, определяемая равенством $\omega = -d\alpha$, где α — каноническая 1-форма.

В координатах (q_i, p_i) форма ω имеет вид

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Краткая запись: $\alpha = dq \wedge dp$.

Замечание. В механике принято другое соглашение о знаках: канонической формой называют форму $d\alpha = dp \wedge dq$.

2.2.5 Симплектический объем

Определение 2.20. Пусть $M = (M^{2n}, \omega)$ — симплектическое многообразие. *Симплектический объем* — это дифференциальная $2n$-форма $\frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$.

Пример 2.21. Для $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой симплектический объем равен

$$dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

Проверяется раскрытием скобок.

Теорема 2.22. *Симплектический объем невырожден, т.е. не обращающаяся в ноль ни в какой точке.*

Доказательство. Так как $\wedge$ — поточечная операция, достаточно доказать невырожденность для случая симплектического векторного пространства. Так как все симплектичские векторные пространства изоморфны, это сводится к случаю стандартного $\mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Следствие 2.23. *Симплектический объем определяет на многообразии ориентацию и гладкую положительную меру (которая тоже называется симплектическим объемом).*

Следствие 2.24. *Любое симплектическое многообразие ориентируемо.*

Теорема 2.25. *Пусть (M^{2n}, ω) — компактное симплектическое многообразие. Тогда ω представляет нетривиальный элемент в $H^2(M)$. В частности, $H^2(M) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что ω представляет нулевой класс в $H^2(M)$, то есть она точна. Так как внешнее произведение $\wedge$ спускается на когомологии де Рама, внешнее произведение точных форм — снова точная форма. Отсюда следует, что форма ориентированного симплектического объема $\nu = \omega^{\wedge n}$ точна. Но это не так из-за формулы Стокса. □

Теорема 2.26 (без доказательства). $H^k(S^n) = 0$ *при всех* k, *кроме* $k = 0$ *и* $k = n$.

Следствие 2.27. *При* $n > 2$ *на сфере* S^n *не существует симплектической структуры.*

2.3 Связь симплектических и комплексных структур

2.3.1 Согласованные структуры

Определение 2.28. *Комплексная структура* на векторном пространстве V — это линейное отображение $J\colon V \to V$ такое, что $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Легко видеть, что такой оператор J определяет на V структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, в которой он является умножением на мнимую единицу.

Определение 2.29. Пусть на векторном пространстве V задана билинейная сиплектическая форма ω, комплексная структура J и евклидово скалярное произведение $g = \langle , \rangle$. Будем называть тройку (ω, J, g) *согласованной*, если для всех $u, v \in V$ выполняются следующие равенства:

1. $\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$ (J-инвариантность g);
2. $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ (J-инвариантность ω);
3. $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$;
4. $\langle u, v \rangle = \omega(u, Jv)$.

Список условий в определении 2.29 избыточен (например, каждое из них следует из остальных). Кроме того, каждый элемент согласованной тройки однозначно определяется двумя другими. Чтобы достроить пару до согласованной тройки, требуются некоторые условия согласованности в парах. Для пары (g, J) эти условия наиболее просты, они содержатся в следующей теореме.

Теорема 2.30. *Пусть на V заданы комплексная структура J и J-инвариантное скалярное произведение $\langle , \rangle$. Тогда билинейная форма ω, определяемая равенством*

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle,$$

является симплектической и (ω, J, g) — согласованная тройка.

Доказательство. 0. Проверим, что ω — симплектическая. Из J-инвариантности скалярного произведения и равенства $J^2 = -1$ следует, что J — кососимметричный оператор:

$$\langle Ju, v\rangle = \langle J^2u, Jv\rangle = \langle -u, Jv\rangle = -\langle u, Jv\rangle.$$

Отсюда следует кососимметричость ω:

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v\rangle = -\langle u, Jv\rangle = -\omega(v, u).$$

Невырожденность ω следует из соотношения $\omega(v, Jv) = \langle Jv, Jv\rangle > 0$ при $v \neq 0$.

1. J-инвариантность скалярного произведения содержится в предположениях.
2. J-инвариантность ω проверяется вычислением:

$$\omega(Ju, Jv) = \langle J^2u, Jv\rangle = \langle -u, Jv\rangle = \langle Ju, v\rangle = \omega(u, v).$$

3. Равенство $\omega(u, v) = \langle Ju, v\rangle$ — определение ω.
4. $\omega(u, Jv) = \langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$ из определения и J-инвариантности g. $\square$

Замечание. В условиях теоремы отображение $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$, заданное равенством

$$h(u, v) = \langle u, v\rangle + i \cdot \langle u, Jv\rangle = \langle u, v\rangle - i \cdot \omega(u, v),$$

является эрмитовым скалярным произведением. Теорему можно вывести из этого наблюдения и того факта, что любое n-мерное эрмитово пространство изоморфно стандартному $\mathbb{C}^n$.

Пример 2.31. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$. Будем обозначать координаты в нём буквами $z_1, \ldots, z_n$. Отождествим $\mathbb{C}^n$ с вещественным пространством $\mathbb{R}^{2n}$ стандартным способом: обозначим координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ буквами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и определим биекцию между $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{C}^n$ равенствами $z_k = x_k + iy_k$ для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Порядок перечисления координат в $\mathbb{R}^{2n}$ не важен, но важно их соответствие комплексным координатам.

На $\mathbb{R}^{2n}$ имеется стандартное скалярное произведение $\langle,\rangle$. Биекция между $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{C}^n$ определяет на $\mathbb{R}^{2n}$ комплексную структуру J, соответствующую умножению на i в $\mathbb{C}^n$. Пусть e_k и f_k — базисные векторы в $\mathbb{R}^{2n}$, соответствующие координатам x_k и y_k. Тогда $J(e_k) = f_k$ и $J(f_k) = -e_k$, откуда ясно, что J — ортогональный оператор (сохраняет евклидову структуру). По теореме 2.30 на $\mathbb{R}^{2n}$ имеется симлектическая билинейная форма ω, заданная равенством $\omega(u, v) = \langle Ju, v\rangle$ для всех $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Посмотрев на её значения на парах базисных векторов, легко видеть, что ω — стандартная симплектическая структура на $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_n \wedge dy_n.$$

Упражнение 2.32. Докажите, что любое векторное пространство V с согласованной тройкой (ω, J, g) изоморфно $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартными структурами.

Теперь рассмотрим вопрос о построении метрики g по паре (ω, J).

Определение 2.33. Пусть на V задана билинейная симплектическая форма ω и комплексная структура J.

1. J называется *ω-прирученной* (ω-tame), если $\omega(v, Jv) > 0$ для всех $v \in V \setminus \{0\}$.
2. J и ω называются *согласованными*, если J является ω-прирученной и ω сохраняется оператором J, то есть $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Теорема 2.34. *Пусть ω — билинейная симплектическая форма на V, J — ω-прирученная комплексная структура J. Тогда билинейная форма g, заданная равенством*

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\big(\omega(u,Jv) + \omega(v,Ju)\big)$$

является J-инвариантным скалярным произведением.

А если J и ω согласованы, то для любых $u, v \in V$ верно равенство

$$g(u,v) = \omega(u,Jv) = \omega(v,Ju),$$

и (g, J, ω) — согласованная тройка.

Доказательство. 1. Билинейность и симметричность g тривиальны, положительная определенность следует из ω-прирученности J, J-инвариантность проверяется вычислением:

$$2g(Ju,Jv) = \omega(Ju,J^2v)+\omega(Jv,J^2u) = \omega(Ju,-v)+\omega(Jv,-u) = \omega(v,Ju)+\omega(u,Jv) = 2g(u,v).$$

2. Пусть ω и J согласованы. Осталось проверить, что функция $(u,v) \mapsto \omega(u,Jv)$ симметрична. Это следует из равенств

$$\omega(u,Jv) = \omega(Ju,J^2v) = \omega(Ju,-v) = -\omega(-v,Ju) = \omega(v,Ju),$$

где первое следует из J-инвариантности ω, второе — из равенства $J^2 = -1$, третье — из кососимметричности ω. □

Определение 2.35. *Почти комплексная структура* на гладком многообразии M — гладкое семейство $J = \{J_x\}_{x\in M}$ комплексных структур в касательных пространствах T_xM.

Комплексная структура на M — структура комплексного многообразия, то есть атлас из карт со значениями в $\mathbb{C}^n$, отображения перехода между которыми голоморфны (т.е. гладкие в комплексном смысле).

Всякая комплексная структура естественно порождает почти комплексную. Обратное неверно: не всякая почти комплексная структура соответствует комплексной структуре. Почти комплексные структуры, для которых существуют соответствующие комплексные, называются *интегрируемыми*.

Определение 2.36. Пусть на гладком многообразии M заданы симплектическая форма ω, почти комплексная структура J, и риманова метрика g. Будем называть тройку (ω, J, g) *согласованной*, если эти структуры согласованы (см. определение 2.29) в касательном пространстве T_xM для каждой точки $x \in M$.

Почти комплексная структура J называется *ω-прирученной* (соотв. согласованной с ω), если J_x является ω_x-прирученной (соотв. согласованной с ω_x) для всех $x \in M$.

Если почти комплексная структура J на многообразии согласована с симплектической формой ω, то можно применить теорему 2.34 в каждом касательном пространстве и получить согласованную с J и ω риманову метрику g. (Гладкость этой метрики очевидна из явного вида формул, которыми она определяется). Теорема 2.30 так не работает, потому что не гарантирует замкнутость построенной 2-формы ω.

Определение 2.37. *Кэлерово многообразие* — многообразие с заданными на нём комплексной структурой (интегрируемой!), симплектической формой (замкнутой!) и римановой метрикой, которые образуют согласованную тройку.

2.3.2 Форма и метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{CP}^n$

Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ — частный случай проективного пространства над полем. По определению $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, где $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{C}$, действующая на $\mathbb{C}^{n+1}$ умножениями на скаляры.

На $\mathbb{CP}^n$ имеются однородные координаты $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$, определённые с точностью до пропорциональности, и аффинные карты. В области $\{z_0 \neq 0\}$ определена аффинная карта

$$(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \mapsto (\tfrac{z_1}{z_0}, \ldots, \tfrac{z_n}{z_0})$$

и т.д. Аффинные карты задают на $\mathbb{CP}^n$ структуру комплексного многообразия.

Пример 2.38 (Форма Фубини-Штуди)**.** Рассмотрим единичную сферу S^{2n+1} в $\mathbb{C}^{n+1}$. Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ можно считать факторпространством S^{2n+1}/S^1, где $S^1 \subset \mathbb{C}$ — единичная окружность, действующая на S^{2n+1} умножениями.

Пусть $\pi\colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ — отображение факторизации. Ясно, что π — субмерсия, то есть дифференциал $d_u\pi$ сюръективен для всех $u \in S^{2n+1}$.

Рассмотрим на $\mathbb{C}^{n+1}$ стандартную симплектическую структуру $\omega = \sum dx_k \wedge dy_k$, где $x_k + iy_k = z_k$ — стандартные координаты в $\mathbb{C}^{n+1}$. Сужение этой формы на S^{2n+1} — замкнутая 2-форма ω^s (сужение замкнутой формы всегда замкнуто как частный случай обратного переноса). Форма ω^s вырождена, её ядро в каждой точке $u \in S^{2n+1}$ — симплектическое ортогональное дополнение касательного пространства T_uS^{2n+1}. Легко проверить, что это ядро порождается вектором Ju и совпадает с касательным пространством орбиты $O_{S^1}(u)$ действия группы S^1.

Отсюда на $\mathbb{CP}^n$ существует такая невырожденная 2-форма $\widehat{\omega}$, что $\pi^*\widehat{\omega} = \omega|_{S^{2n+1}}$. Это симплектическая форма. Действительно, $d\widehat{\omega} = 0$, так как $\pi^*(d\widehat{\omega}) = d\omega|_{S^{2n+1}} = 0$ и $d\pi$ сюръективен в каждой точке.

Построенная симплектическая форма называется *формой Фубини-Штуди.*

Упражнение 2.39. Напишите координатное выражение формы Фубини-Штуди в станадартной карте $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) \mapsto (\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0})$ пространства $\mathbb{CP}^n$.

Так как $\mathbb{CP}^n$ — комплексное многообразие, на нём как на вещественном многообразии определена почти комплексная структура J. Также на $\mathbb{CP}^n$ имеется риманова метрика, согласованная с этими структурами, называемая *метрикой Фубини-Штуди.*

Действительно, пусть $u \in S^{2n+1}$ и $p = \pi(u)$. Рассмотрим в касательном пространстве T_uS^{2n+1} подпространство $H_u = (Ju)^\perp$. Это ортогональное дополнение ядра $\ker d_u\pi$ в T_uS^{2n+1}, поэтому оно биективно отображается на $T_p\mathbb{CP}^n$ дифференциалом $d_u\pi$. Заметим, что H_u J-инвариантно, так как его ортогональное дополнение в $\mathbb{C}^n$ (линейная оболочка u и Ju) J-инвариантно. Поэтому (и так как π — сужение голоморфной проекции $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$) сужение J на H_u переходит в комплексную структуру на $T_p\mathbb{CP}^n$ при биекции $d_u\pi|_{H_u}$. Наконец, на $T_p\mathbb{CP}^n$ определено скалярное произведение, соответствующее евклидовой метрике на H_u при той же биекции. Это и есть метрика Фубини-Штуди.

Три структуры, построенные на $T_p\mathbb{CP}^n$, согласованы, так как согласованы соответсвующие структуры на H_u.

Определение 2.40. *Проективное алгебраическое многообразие* в $\mathbb{CP}^n$ — множество решений системы однородных полиноминальных уравнений. *Квазипроективное алгебраическое многообразие* — открытое подмножество проективного.

Теорема 2.41. *Пусть $A \subset \mathbb{CP}^n$ — квазипроективное алгебраическое многообразие без особых точек. Тогда сужение формы Фубини-Штуди на A — симплектическая форма.*

Доказательство. Сужение замкнутой формы всегда замкнуто, остается доказать только невырожденность. Форма Фубини-Штуди входит в согласованную тройку (ω, J, g), где J соответствует комплексной структуре $\mathbb{CP}^n$. Для любой точки $x \in A$ касательное пространство $T_x A$ — комплексное линейное подпространство в $T_x\mathbb{CP}^n$, поэтому (на вещественном языке) оно J-инвариантно. Из теоремы 2.30 следует, что сужение согласованной тройки на J-инвариантное подпространство остаётся согласованной тройкой, в частности, сужение ω невырождено. □

2.3.3 Существование согласованных комплексных структур

Теорема 2.42. *Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Тогда на M существует почти комплексная структура, согласованная с ω.*

Доказательство. Выберем произвольную метрику g на M. Идея в том, чтобы для каждой точки $x \in M$ построить в T_xM комплексную структуру J_x, канонически определяемой формой ω_x и метрикой g_x, при этом «каноничность» обеспечит гладкую зависимость от x.

Рассмотрим векторное пространство V^{2n} с заданными на нём евклидовой метрикой $g = \langle , \rangle$ и билинейной симплектической формой ω. Пусть $A = A_{g,\omega} \colon V \to V$ — оператор, определённый условием $\langle Au, v\rangle = \omega(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Оператор A кососимметричен и невырожден, поэтому имеет диагональную жорданову форму с чисто мнимыми ненулевыми собственными числами. Обозначим через $\mathcal{A}(V)$ множество всех операторов с жордановой формой такого типа, а через $\mathcal{J}(V)$ — множество всех комплексных структур на V. Определим отображение

$$\Psi \colon \mathcal{A}(V) \to \mathcal{J}(V)$$

следующим образом: для $A \in \mathcal{A}(V)$, оператор $\Psi(A)$ имеет те же инвариантные подпространства и собственные числа $\pm i$, получающиеся из исходных делением на их абсолютные величины.

Пусть $A = A_{g,\omega}$ и $J = \Psi(A)$. Проверим, что J и согласована ω. Так как A кососимметричен, V раскладывается в сумму n ортогональных двумерных инвариантных подпространств, соответствующие парам собственных чисел $\pm\lambda_k i$ ($\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$). Если выбрать в каждом из них базис (e_k, f_k), где $|e_k| = 1$ и $f_k = J(e_k) = A(e_k)/\lambda_k$, то получится ортонормированный базис, для которого $\omega(e_k, f_k) = -\omega(f_k, e_k) = \lambda_k$ для всех k, а на других парах базисных векторов ω обращается в ноль. Условия согласованности $\langle u, Ju\rangle > 0$ и $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ проверяются разложением по этому базису.

Ясно, что оператор $A_{g,\omega}$ гладко зависит от g и ω. Применяя конструкцию к каждому касательному пространству T_xM, где $x \in M$, получим гладкое семейство операторов $A_x \in \mathcal{A}(T_xM)$ и семейство комплексных структур $J_x \in \mathcal{J}(T_xM)$. Чтобы доказать гладкость семейства $\{J_x\}$, достаточно проверить, что отображение $\Psi \colon \mathcal{A}(V) \to \mathcal{J}(V)$ гладкое для любого фиксированного $V \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Этот факт можно доказать так. Для $A \in \mathcal{A}(V)$ рассмотрим оператор $Q_A = -A^2$. Он имеет диагональную жорданову форму с положительными собственными числами (вида λ_k^2, где $\pm\lambda_k i$ — собственные числа A). При этом $\Psi(A) = Q_A^{-1/2}A$. Поэтому вопрос сводится к доказательству гладкости функции квадратного корня из оператора с положительной диагональной жордановой формой. Это можно доказать, например, подставив оператор в ряд Тэйлора вещественной функции $x \mapsto \sqrt{x}$, выбрав центр для ряда Тэйлора достаточно большим, чтобы собственные числа оператора попали в круг сходимости. □

Замкнутость ω в доказательстве не использовалась. Поэтому верно такое следствие.

Следствие 2.43. *На гладком многообразии существует почти комплексная структура тогда и только тогда, когда на нём существует невырожденная 2-форма.*

Доказательство. Если есть невырожденная 2-форма ω, то (поточечно согласованная с ней) почти комплексная структура J строится как в доказательстве теоремы 2.42.

Обратно, если есть почти комплексная структура J, выберем произвольную риманову метрику g, сделаем её J-инвариантной, заменив на $\widehat{g} = g + J^*g$, и определим 2-форму ω равенством $\omega(u, v) = \widehat{g}(Ju, v)$. По теореме 2.30 эта форма невырождена. $\square$