Начала римановой геометрии

С.В. Иванов

23.12.2024

Аннотация

Изложены некоторые начальные темы римановой геометрии, в основном повторение материала 4 семестра. На продолжение пока не нашлось времени.

Содержание

1 Основные определения и примеры

1.1 Римановы метрики

Далее буквой M обозначается гладкое многообразие, n — его размерность.

Определение 1.1. *Риманова структура* на M — семейство скалярных произведений $g = \{g_x\}_{x\in M}$, где каждое g_x — скалярное произведение (т.е. положительно определенная симметричная билинейная форма) на касательном пространстве T_xM.

Римановы структуры также называют *римановыми метриками.* Этот термин более употребителен и мы будем в основном использовать его.

Риманово многообразие — гладкое многообразие с заданной на нем римановой метрикой.

Определение 1.2. Риманова метрика g на M называется *гладкой*, если для любых гладких векторных полей V, W, определенных на открытом множестве в M, их поточечное g-произведение — гладкая функцией.

Слово «гладкое», как обычно, означает класс гладкости C^∞.

Далее все римановы метрики предполагаются гладкими. В примерах гладкость метрик обычно очевидна из конструкции. Проверять гладкость метрик также можно с помощью метрических коэффициентов, см. ниже.

Обозначения. Для векторов $v, w \in T_xM$ вместо $g_x(v, w)$ пишем $g(v, w)$ или просто $\langle v, w\rangle$, если риманова структура ясна из контекста.

Если на многообразии рассматривается только одна риманова структура, то для ее обозначения не обязательно использовать букву типа g, почти всегда можно обходиться угловыми скобками.

Касательное пространство T_pM риманова многообразия $M = (M, g)$ в точке $p \in M$ всегда рассматривается как евклидово пространство, евклидова структура которого задана римановой метрикой g_p. В этом пространстве определены длины векторов, углы между векторами, и все остальные понятия евклидовой геометрии. Соответствующие слова и обозначения используются для касательного пространства риманова многообразия в точке без напоминания о римановой метрике.

Определение 1.3. Пусть M, N — римановы многообразия. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется *изометрическим погружением*, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\langle df(v), df(w)\rangle_N = \langle v, w\rangle_M$$

для любых касательных векторов $v, w \in TM$ с общей точкой приложения.

Изометрическое вложение — изометрическое погружение, которое является вложением (т.е. оно инъективно и его обратное отображение непрерывно).

Ясно, что изометрические погружения являются погружениями в обычном смысле (дифференциал в каждой точке инъективен). В частности, они могут существовать только при $\dim M \le \dim N$.

Определение 1.4. Пусть M и N — римановы многообразия (одинаковой размерности). *Изометрия* между ними — это диффеоморфизм $f\colon N \to N$, сохраняющий скалярные произведения (см. предыдущее определение). Римановы многообразия M и N *изометричны*, если между ними существует изометрия.

Ясно, что изометричность — отношение эквивалентности. Изометрии — частный случай изометрических погружений, он выделяется тем, что отображение должно быть диффеоморфизмом.

Задачи и упражнения.

1. Пусть g_1 и g_2 — римановы метрики на одном многообразии M. Докажите, что их поточечная сумма $g_1 + g_2$ — тоже риманова метрика.

2. Предположим, что гладкое отображение $f\colon M \to N$ сохраняет длины касательных векторов, то есть $|df(v)|_N = |v|_M$ для всех $v \in TM$. Докажите, что f сохраняет и скалярное произведение, то есть является изометрическим погружением.

3. Докажите, что любое одномерное риманово многообразие локально изометрично $\mathbb{R}$. А именно, у любой точки есть окрестность, изометричная интервалу прямой.

   Примечание: в размерностях 2 и выше аналогичное утверждение неверно, например, сфера не локально изометрична плоскости.

1.2 Метрические коэффициенты

Напомним, что *карта* на гладком многообразии M — это пара (U, φ), где $U \subset M$ — открытое множество, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм на открытое множество $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Карты также называются *локальными координатами*.

Карта (U, φ) стандартным образом определяет координаты касательных векторов и задает координатные векторные поля на U.

Определение 1.5. Пусть $M = (M, g)$ — риманово многообразие, (U, φ) — карта на M, и пусть $X_1, \dots, X_n$ — координатные поля этой карты. *Метрические коэффициенты* данной карты — это функции $g_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$, определяемые равенством

$$g_{ij}(p) = g(X_i(p), X_j(p)), \qquad p \in U.$$

Другими словами, $(g_{ij}(p))$ — матрица скалярного произведения g_p в базисе пространства T_pM, определяемом данной картой. Удобно считать метрические коэффициенты не набором числовых функций, а матрично-значной функцией $p \mapsto (g_{ij}(p))$.

Гладкость метрики равносильна гладкости всех метрических коэффициентов для произвольного набора карт, покрывающих всё многообразие. Это нетрудно доказать, раскладывая произвольные поля по координатным.

Метрические коэффициенты часто рассматриваются как функции на координатной области $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, а не на носителе карты $U \subset M$. При этом традиционно функции от координат и функции на многообразии обозначаются одинаково.

Поведение коэффициентов при замене координат. Коэффициенты g_{ij} зависят от выбора карты, но их можно пересчитывать из одних локальных координат в другие, зная отображение перехода. А именно, пусть (U, φ) и (U, ψ) — две карты на римановом многообразии, $f = \varphi \circ \psi^{-1}$ — отображение перехода между картами (вычисляющее координаты точки в первой карте по ее координатам во второй карте). Пусть $G = (g_{ij})$ и $\widetilde{G} = (\widetilde{g}_{ij})$ — матрицы метрических коэффициентов в точке $p \in M$ относительно φ и ψ соответственно, A — матрица дифференциала $d_{\psi(p)}f$. Тогда

$$\widetilde{G} = A^T G A.$$

Это проверяется вычислением с помощью матричной записи подстановки векторов в билинейную форму.

Рассматривая G и $\widetilde{G}$ как функции на координатных областях, можно переписать формулу в виде

$$\widetilde{G}(y) = [d_y f]^T \cdot G(f(y)) \cdot [d_y f]$$

для $y \in \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $[d_y f]$ — матрица дифференциала $d_y f$.

Отметим, что для пересчета коэффициентов по этой формуле из одних координат в другие, используется отображение перехода f, действующее в обратном направлении.

Компактная запись метрики в координатах. Если для координатных функций карты зафиксированы обозначения, например, $x_1, \dots, x_n$, то риманову метрику с коэффициентами g_{ij} можно записывать «через дифференциалы» в виде $\sum g_{ij} dx_i dx_j$. Например, стандартная метрика плоскости в полярных координатах (r, φ) имеет вид $dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Эта запись часто используется в комбинации с традиционным обозначением ds для квадрата элемента длины:

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j.$$

В отличие от выражения dx_i, которое является дифференциалам координатной функции x_i, в обозначении ds отдельные буквы смысла не имеют. Выражение ds^2 в такой записи служит обозначением самой римановой метрики (вместо буквы g).

1.3 Примеры и конструкции

Пример 1.6 ($\mathbb{R}^n$)**.** Пространство $\mathbb{R}^n$ имеет стандартную структуру риманова многообразия: касательное пространство $T_x\mathbb{R}^n$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ канонически отождествляется с $\mathbb{R}^n$ и снабжается стандартным скалярным произведением.

Пример 1.7 (подмногообразия)**.** Подмногообразия риманового многообразия M естественно снабжаются сужением римановой метрики из M. А именно, пусть $K \subset M$ — гладкое подмногообразие, тогда для каждой точки $p \in K$ касательное пространство T_pK — линейное подпространство в T_pM, и оно снабжается сужением скалярного произведения из T_pM.

Пример 1.8 (погружения)**.** Пусть K — гладкое многообразие (без метрики), $f\colon K \to M$ — гладкое погружение (т.е. $\ker d_x f = \{0\}$ для всех $x \in M$). Тогда K естественно снабжается такой римановой метрикой $\widetilde{g}$, что f становится изометрическим погружением. А именно,

$$\widetilde{g}(v, w) = g(df(v), df(w))$$

для любых касательных векторов $v, w \in TK$ с общей точкой приложения.

Метрика $\widetilde{g}$ обозначается f^*g и называется обратным переносом (pull-back) метрики g посредством отображения f.

Этот пример — обобщение предыдущего: если $K \subset M$ — подмногообразие, то сужение римановой метрики на K равно i^*g, где $i\colon K \to M$ — отображение включения.

Пример 1.9 (произведения)**.** На декартовом произведении $M \times N$ римановых многообразий M и N естественно вводится риманова метрика: для точки $p = (x, y) \in M \times N$ отождествляем $T_p(M \times N)$ с $T_xM \times T_yN$ и определяем скалярное произведение равенством

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle_{M \times N} = \langle v_1, w_1 \rangle_M + \langle v_2, w_2 \rangle_N$$

для любых $v_1, w_1 \in T_xM$ и $v_2, w_2 \in T_yN$.

В более инвариантных обозначениях это определение можно записать так:

$$\langle v, w \rangle_{M \times N} = \langle d\pi_1(v), d\pi_1(w) \rangle_M + \langle d\pi_2(v), d\pi_2(w) \rangle_N$$

для любых касательных векторов $v, w \in T(M \times N)$ с общей точкой приложения, где π_1 и π_2 — проекции из $M \times N$ на M и N соответственно.

Как обычно, для задания симметрично евклидова скалярного произведения бывает проще определить соответствующую квадратичную форму, в данном случае это квадрат длины вектора. Тогда формулы для метрики произведения будут менее громоздкими:

$$|(\xi, \eta)|^2_{M \times N} = |\xi|^2 + |\eta|^2_N$$

для вектора $(\xi, \eta) \in T(M \times N) \simeq TM \times TN$.

Пример 1.10 (задание метрики коэффициентами g_{ij})**.** Пусть многообразие покрывается одной картой. Тогда его можно отождествить с открытой областью $U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть на U заданы n^2 гладких функций $g_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ так, что для каждой точки $p \in U$ матрица $(g_{ij}(p))$ — матрица положительно определенной симметричной билинейной формы. Тогда эти функции задают риманову метрику на U, для которой они являются метрическими коэффициентами.

Если многообразие не покрывается одной картой, то можно выбрать атлас карт и задать метрические коэффициенты в каждой карте этого атласа так, чтобы они правильно преобразовывались при переходах между картами. Тогда эти данные корректно зададут метрику на всем многообразии.

1.4 Длина и расстояние

Пусть $M = (M, g) = (M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — риманово многообразие, $\dim M = n$.

Определение 1.11. Норма (длина) касательного вектора $v \in TM$ естественно определяется равенством
$$|v|_g = \sqrt{g(v,v)}.$$
Если метрика g ясна из контекста, ее можно не писать в обозначении.

Длина гладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to M$ определяется равенством
$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g \, dt$$
где $\gamma'(t)$ понимается как касательный вектор из $T_{\gamma(t)}M$.

Кусочно-гладкая кривая — непрерывная кривая, составленная из конечного набора гладких кривых. *Длина* кусочно-гладкой кривой — сумма длин ее гладких участков.

Для длины кривой в разных источниках используются разные обозначения, в том числе s, от которого происходит обозначение ds^2 для римановой метрики.

Нетрудно проверить, что длина гривой не меняется при монотонных кусочно-гладких заменах параметра, и что у любой регулярной кривой есть натуральная параметризация.

Определение 1.12. Пусть $x, y \in M$. *Риманово расстояние* между x и y (обозначание: $d_g(x,y)$ или $d_M(x,y)$ или просто $d(x,y)$ или даже $|xy|$) — инфимум длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих x и y.

Замечание 1.13. Если x и y лежат в разных компонентах связности многообразия, то соединяющих их кривых нет, и расстояние равно бесконечности. Чтобы избежать бесконечных расстояний, обычно рассматривают только связные римановы многообразия. В общем случае всегда можно изучать компоненты связности отдельно друг от друга.

Лемма 1.14. *Пусть $M = (M^n, g)$ — риманово многообразие, $p \in M$. Тогда*

1. *Существует такая карта в окрестности p, что матрица метрических коэффициентов (g_{ij}) в точке p в этой карте — единичная матрица.*

2. *Для любой карты φ из п.1 верно, что*
$$\frac{d_M(x,y)}{|\varphi(x) - \varphi(y)|} \to 1 \quad \text{при } x, y \to p,\ x \neq y,$$
где d_M — риманово расстояние в M.

Доказательство. 1. Выберем базис $v_1, \ldots, v_n$ в T_pM, ортонормированный относительно скалярного произведения g_p, и выберем любую карту φ_0 в окрестности p. Пусть векторы $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ — образы $v_1, \ldots, v_n$ в этой карте, т.е. $w_i = d_p\varphi_0(v_i)$. В качестве искомой карты подойдет композиция $L \circ \varphi_0$, где $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, переводящее $w_1, \ldots, w_n$ в стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$.

2. Пусть (U, φ) — карта из п.1. Можно считать, что $\varphi(p) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как метрические коэффициенты g_{ij} непрерывны, существует такая подокрестность $V \ni p$, что

$$(1+\varepsilon)^{-1} \le \frac{|v|_g}{|d\varphi(v)|} \le 1+\varepsilon$$

для любого ненулевого касательного вектора v с точкой приложения из V. Отсюда для любой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в V, получаем оценку

$$(1+\varepsilon)^{-1} \le \frac{L_g(\gamma)}{L(\varphi\circ\gamma)} \le 1+\varepsilon. \tag{1.1}$$

Пусть $r > 0$ таково, что область $\varphi(V)$ содержит замкнутый евклидов шар $\overline{B}_r(0)$. Рассмотрим уменьшенную окрестность $V' = \varphi^{-1}(B_{r/2}(0))$. Выберем точки $x, y \in V'$ и сравним риманово расстояние $d_M(x,y)$ с евклидовым расстоянием $|\varphi(x) - \varphi(y)|$.

Точки x и y можно соединить гладкой кривой γ_0, для которой $\varphi\circ\gamma_0$ параметризует отрезок $[\varphi(x), \varphi(y)]$ в шаре $B_{r/2}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Применяя(1.1) к γ_0, получаем, что

$$d_M(x,y) \le L_g(\gamma_0) \le (1+\varepsilon)L(\varphi\circ\gamma_0) = (1+\varepsilon)\cdot|\varphi(x)-\varphi(y)|, \tag{1.2}$$

где первое неравенство следует из определения риманова расстояния. Теперь оценим $d_M(x,y)$ снизу. Пусть γ — кусочно-гладкая кривая в M, соединяющая x и y. Если она лежит в V, то из (1.1) следует, что

$$L_g(\gamma) \ge (1+\varepsilon)^{-1}L(\varphi\circ\gamma) \ge (1+\varepsilon)^{-1}\cdot|\varphi(x)-\varphi(y)|. \tag{1.3}$$

Если же кривая γ не лежит в V, то у неё есть начальный и конечный участок, φ-образы которых соединяют точки x и y с границей шара $B_r(0)$ и, следовательно, имеют длину не меньше $r/2$ каждый. Оценивая снизу длину γ сумой длин этих участков с помощью (1.1), получаем, что

$$L_g(\gamma) \ge 2\cdot\frac{r}{2}\cdot(1+\varepsilon)^{-1} = (1+\varepsilon)^{-1}r > (1+\varepsilon)^{-1}\cdot|\varphi(x)-\varphi(y)|,$$

так как $|\varphi(x)-\varphi(y)| < r$. Таким образом, для любой кривой γ, соединяющей x и y в M, выполняется неравенство (1.3). Отсюда и из (1.2) следует оценка

$$(1+\varepsilon)^{-1} \le \frac{d(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} \le 1+\varepsilon$$

для любых различных $x, y \in V'$, где V' — окрестность точки p, зависящая от ε. Это свойство равносильно доказываемому утверждению. □

Теорема 1.15. *Пусть M — связное риманово многообразие, d — риманово расстояние, определенное выше. Тогда*

1. *(M,d) — метрическое пространство.*

2. *Топология, определяемая метрикой d, совпадает с топологией многообразия.*

Доказательство. Так как многообразие связно, любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, откуда следует, что все расстояния конечны. Симметричность и неравенство треугольника из определения метрического пространства легко следуют из определений. Положительность и совпадение топологий следуют из леммы 1.14. □

Задачи и упражнения. Ниже буквы M и N обозначают римановы многообразия.

1. Пусть $f\colon M \to N$ — изометрическое погружение. Докажите, что f не увеличивает расстояния, то есть $d_N(f(x), f(y)) \le d_M(x, y)$ для любых $x, y \in M$.

2. Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Докажите, что f не увеличивает расстояния тогда и только тогда, когда его дифференциал df не увеличивает длины касательных векторов.

3. Докажите, что в произведении римановых многообразий расстояние может вычисляться как в теореме Пифагора. А именно, в произведении $M \times N$ со стандартной метрикой, определенной выше, выполняется равенство

$$d_{M\times N}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_M(x_1, x_2)^2 + d_N(y_1, y_2)^2}$$

   для любых $x_1, x_2 \in M$, $y_1, y_2 \in N$.

1.5 Риманов объем

Пусть $M = (M, g) = (M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — риманово многообразие, $\dim M = n$. Риманов объем на M — это борелевская мера на M, которую можно определять разными эквивалентными способами. Мы дадим два определения.

Определение 1.16 (бескоординатное определение объема)**.** Риманов объем — n-мерная мера Хаусдорфа.

Напоминание. Мера Хаусдорфа определена для любого метрического пространства $X = (X, d)$ и каждого числа $n \ge 0$ («размерности»). Это функция $\mathcal{H}^n$ на множестве всех подмножеств пространства X со значениями в $[0, +\infty]$. Она является внешней мерой (т.е. обладает свойством счетной субаддитивности), а на борелевской σ-алгебре она является счетно-аддитивной, то есть мерой в обычном смысле.

Мера Хаусдорфа обладает следующими свойствами:

1. Монотонность относительно метрики: если X, Y — метрические пространства и отображение $f\colon X \to Y$ не увеличивает расстояния (т.е. липшицево с константой 1), то для любого множества $A \subset X$ верно неравенство $\mathcal{H}^n(f(A)) \le \mathcal{H}^n(A)$.

2. Однородность: $\mathcal{H}^n_{(X,\lambda d)} = \lambda^n \mathcal{H}^n(X, d)$ для любого $\lambda > 0$.

   Из этого свойства следует такое обобщение предыдущего: если $f\colon X \to Y$ — липшицево с константой C, то $\mathcal{H}^n(f(A)) \le C^n \mathcal{H}^n(A)$ для любого $A \subset X$.

3. Нормировка: в $\mathbb{R}^n$ на борелевской σ-алгебре мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^n$ совпадает с мерой Лебега (достаточно зафиксировать то, что мера куба $[0, 1]^n$ равна 1).

Определение 1.17 (координатная формула для объема)**.** Пусть (U, φ) — карта в M и $A \subset U$ — измеримое множество. *Риманов объем* множества A определяется равенством

$$\mathrm{vol}_g(A) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx, \tag{1.4}$$

где $(g_{ij}(x))$ — матрица метрических коэффициентов в точке $x \in \varphi(U)$, а интеграл берется по стандартной мере Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для произвольного измеримого множества $A \subset M$ объем определяется так: разобьем A на счетный набор измеримых множеств A_i, каждое из которых лежит в некоторой карте, и положим $\mathrm{vol}_g(A) = \sum \mathrm{vol}_g(A_i)$, где каждое слагаемое в правой части вычисляется по формуле (1.4) с помощью произвольной карты, содержащей A_i.

Обозначения: vol_g, vol_M, $\mathrm{vol}_{(M,g)}$ и т.п.

Теорема 1.18. *Определение 1.17 корректно, то есть не зависит от выбора разбиения и карт.*

Доказательство. Независимость от разбиения доказывается рассмотрением общего измельчения любых двух разбиений. Независимость от выбора карты доказывается с помощью формулы замены переменной в интеграле и формул для пересчета метрических коэффициентов. □

Теорема 1.19. *Два определения риманова объема совпадают.*

Доказательство. Основной шаг доказательства — следующее локальное сравнение двух определений с координатной мерой Лебега: для любой точки $p \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \ni p$ и карта $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ такие, что для любого измеримого $A \subset U$

$$(1+\varepsilon)^{-1} m_n(\varphi(A)) \le \mathcal{H}^n(A) \le (1+\varepsilon)\, m_n(\varphi(A)) \tag{1.5}$$

и

$$(1+\varepsilon)^{-1} m_n(\varphi(A)) \le \mathrm{vol}_g(A) \le (1+\varepsilon)\, m_n(\varphi(A)). \tag{1.6}$$

Чтобы вывести теорему из этих локальных оценок, заметим, что из (1.5) и (1.6) следует

$$(1+\varepsilon)^{-2}\, \mathcal{H}^n(A) \le \mathrm{vol}_g(A) \le (1+\varepsilon)^2\, \mathcal{H}^n(A) \tag{1.7}$$

для любого «достаточно маленькго» измеримого множества $A \subset M$. Разбив «большое» множество A на счетный набор «достаточно маленьких» частей A_i и сложив неравенства (1.7) для A_i, получим, что (1.7) выполняется для любого измеримого $A \subset M$. В силу произвольности ε отсюда следует, что $\mathcal{H}^n(A) = \mathrm{vol}_g(A)$.

Чтобы доказать (1.5) и (1.6), выберем карту, в которой метрические коэффициенты g_{ij} в точке p образуют единичную матрицу. Тогда в достаточно малой окрестности точки p неравенство (1.5) следует из свойств меры Хаусдорфа и локального сравнения римановых расстояний с евклидовыми (лемма 1.14), а неравенство (1.6) — из непрерывности функции $\sqrt{\det(g_{ij})}$. □

2 Модельные пространства

2.1 Гиперболическое пространство

Определение 2.1 ($\mathbb{H}^n$, модель Пуанкаре в полуплоскости)**.** *Гиперболическим пространством* или *пространством Лобачевского* размерности n (обозначение: $\mathbb{H}^n$) будем называть любое риманово многообразие, изометричное следующему примеру: в качестве многообразия берём открытое полупространство $\{x_n > 0\}$ в $\mathbb{R}^n$, а риманову метрику задаем равенством

$$g = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_n)^2,$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$.

Описанный выше конкретный пример называется *моделью Пуанкаре в полупространстве*. При рассмотрении этой модели гиперплоскость $\{x_n = 0\}$ называется *абсолютом* пространства $\mathbb{H}^n$.

Теорема 2.2. *Следующие отображения являются изометриями $\mathbb{H}^n$ в модели Пуанкаре в полупространстве:*

1. *Евклидовы изомерии, переводящие полупространство в себя.*

2. *Евклидовы гомотетии с центром на абсолюте и положительным коэффициентом;*

3. *Евклидовы инверсии с центром на абсолюте.*

Доказательство. Проверяется вычислением. Для случая инверсии достаточно разобраться с инверсией относительно сферы радиуса 1 с центром в 0 и проверить сохранение метрики для точки p на единичной сфере (остальные случаи сводятся к этому с помощью гомотетий и параллельных переносов). Для этой инверсии φ и такой точки p нетрудно проверить, что дифференциал $d_p\varphi$ совпадает с отражением относительно касательной плоскости к сфере в точке p. $\square$

2.2 Модельные пространства постоянной кривизны

Определение 2.3. Пусть $\kappa \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Модельным пространством* размерности n кривизны κ (обозначение: M^n_κ) будем называть, в зависимости от знака κ, следующее риманово многообразие:

- $\mathbb{R}^n$, если $\kappa = 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,\mathbb{S}^n$ — сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, если $\kappa > 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\,\mathbb{H}^n$ — гиперболическое пространство, масштабированное с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$, если $\kappa < 0$.

Теорема 2.4. *Группа изометрий пространства $M = M^n_\kappa$ действует транзитивно на ортонормированных базисах касательных пространств.*

А именно, для любых точек $p, q \in M^n_\kappa$ и ортонормированных базисов $(v_1, \dots, v_n)$ и $(w_1, \dots, w_n)$ касательных пространств T_pM и T_qM соответственно, существует такая изометрия $f\colon M \to M$, что $f(p) = q$ и $df(v_i) = w_i$ для всех i.

Доказательство. Для $\mathbb{R}^n$ и сферы утверждение следует из линейной алгебры. Для $\mathbb{H}^n$ достаточно доказать его для случая $p = q$, общий случай выводится из этого с помощью гомотетий и параллельных переносов. В случае $p = q$ заметим, что для любой линейной гиперплоскости $L \subset T_pM$ существует изометрия, которая переводит p в себя, и дифференциал которой в точке p есть отражение относительно L. В качестве такой изометрии можно взять инверсию относительно сферы, проходящей через p и касающейся L, если L не вертикальна, либо евклидово отражение относительно соответствующей вертикальной гиперплоскости. Осталось вспомнить, что в евклидовом пространстве, каковым является $T_p\mathbb{H}^n$, композициями отражений относительно гиперплоскостей можно получить любое ортогональное преобразование. $\square$

Задачи и упражнения. Пусть $M = M^n_\kappa$ — одно из модельных пространств.

1. Пусть $p \in M$, $V \subset T_pM$ — линейное подпространство, $m = \dim V$. Докажите, что существует m-мерное гладкое подмногообразие $N \subset M$, которое изометрично M^m_κ, содержит p и таково, что $T_pN = V$.

2. Пусть $X, Y \subset M$ — два подмножества, $f\colon X \to Y$ — отображение, сохраняющее расстояния. Докажите, что существует такая изометрия $F\colon M \to M$, что $F|_X = f$.

3 Тензоры и связности

3.1 Обозначения

Пусть M — гладкое многообразие.

Будем обозначать через $\mathcal{F}(M)$ пространства всех гладких функций из M в $\mathbb{R}$. На $\mathcal{F}(M)$ имеется естественная структура алгебры над $\mathbb{R}$ — функции можно складывать, умножать на вещественные константы и перемножать между собой.

Через $\mathcal{X}(M)$ будем обозначать пространство всех гладких векторных полей на M. Значение векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ в точке $p \in M$ обычно обозначается через X_p (вместо $X(p)$), аналогичные обозначения могут использоваться и для других отображений из M в различные структуры.

Пространство $\mathcal{X}(M)$ имеет естественную модуля над $\mathcal{F}(M)$ — векторные поля можно поточечно складывать и умножать на функции. То есть, для векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ и функции $f \in \mathcal{F}(M)$ запись fX означает векторное поле, значение которого в точке $p \in M$ равно $f(p)X_p$.

С другой стороны, каждое векторное поле можно рассматривать как оператор дифференцирования, действующий на $\mathcal{F}(M)$. Для векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ и функции $f \in \mathcal{F}(M)$ результат дифференцирования f вдоль X — это функция, значение которой в точке p равно производной f вдоль вектора X_p. Мы будем обозначать эту функцию через Xf или, в особо торжественных случаях, через $D_X f$. Таким образом, имеется несколько обозначений для производной вдоль векторного поля:

$$Xf = D_X f = df(X).$$

Аналогично, одиночный касательный вектор $v \in T_pM$ рассматривается как оператор дифференцирования, действующий из $\mathcal{F}(M)$ в $\mathbb{R}$:

$$vf = D_v f = df(v),$$

Замечание 3.1. Для любых функций $f, g \in \mathcal{F}(M)$ и векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ верно равенство

$$(fX) \cdot g = f \cdot (Xg)$$

(это следует из линейной зависимости производной вдоль вектора от вектора). Поэтому значение выражения fXg не зависит от расстановки скобок в нем, и такие формулы при желании можно писать, не опасаясь двусмысленности (но так писать не рекомендуется, в отличие от выражений типа fgX). Похожее выражение Xfg уже зависит от расстановки скобок, такие формулы писать нельзя.

Замечание 3.2. Если интерпретировать векторные поля как операторы дифференцирования функций, то выражения $\frac{\partial}{\partial x_i}$ приобретают смысл координатных векторных полей системы координат $(x_1, \dots, x_n)$, и они часто используются для этой цели. В случаях, когда ясно, о какой системе координат идет речь, мы будем использовать для координатных полей короткие обозначения ∂_i.

3.2 Тензоры

Нам будут нужны только специальные типы тензоров, которые удобно интерпретировать как полилинейные отображения.

Определение 3.3. Пусть M — гладкое многообразие и $k \geq 1$. *Тензор типа* $(k, 0)$ — это гладкое семейство $A = \{A_x\}_{x \in M}$ полилинейных форм вида

$$A_x \colon \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R},$$

где отображение A_x линейно по каждому из k аргументов. Под гладкостью понимается следующее свойство: для любого набора векторных полей $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ результат поточечной подстановки $A(X_1, \dots, X_k)$ — гладкая функция на M.

Тензор типа $(k, 1)$ определяется аналогично, только областью значений оператора A_x служит T_xM, а не $\mathbb{R}$.

Например, любая риманова метрика является тензором типа $(2, 0)$.

Определение 3.4 (коэффициенты тензора)**.** Пусть A — тензор типа $(k, 0)$ на многообразии M. Пусть на M выбрана карта (U, φ), и $E_1, \dots, E_n$ — координатные векторные поля этой карты. *Коэффициентами тензора* A в данной карте называется набор функций

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \colon U \to \mathbb{R},$$

где индексы $i_1, \dots, i_k$ пробегают множество $\{1, \dots, n\}$, определяемых равенством

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) = A_x(E_1(x), \dots, E_k(x)).$$

Как обычно, функции на U можно рассматривать и как функции на координатной области $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Для тензора A типа $(k, 1)$ коэффициенты определяются похожим образом. Они нумеруются k нижними индексами $i_1, \dots, i_k$ и одним верхним индексом j, и коэффициент $a^j_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x)$ равен j-й координате касательного вектора $A_x(E_1(x), \dots, E_k(x))$ при разложении по базису $E_1(x), \dots, E_k(x)$.

Ясно, что коэффициенты тензора в карте однозначно определяют его сужение на носитель этой карты.

Тензоры удобно рассматривать как операторы на $\mathcal{X}(M)$. А именно, тензор A типа $(k, 0)$ может рассматриваться как отображение

$$A \colon \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k \text{ раз}} \to \mathcal{F}(M),$$

определяемое равенством

$$A(X_1, \dots, X_k)(p) = A_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$$

для всех $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ и $p \in M$. Точно так же тензор A типа $(k, 1)$ может рассматриваться как отображение

$$A \colon \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k \text{ раз}} \to \mathcal{X}(M),$$

Очевидно, что действие тензора на векторных полях однозначно определяет этот тензор. В дальнейшем мы будем отождествлять тензор и соответствующий ему оператор на векторных полях.

Легко видеть, что действие тензора на векторных полях линейно по каждому аргументу над алгеброй $\mathcal{F}(M)$:

$$A(f_1X_1,\dots,f_kX_k)=f_1\dots f_k\,A(X_1,\dots,X_k)$$

для любых $X_1,\dots,X_k\in\mathcal{X}(M)$ и $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}(M)$. Вскоре мы увидим, что любой оператор с таким свойством является тензором. Для этого сначала докажем лемму.

Лемма 3.5. *Пусть M — гладкое многообразие, $p\in M$, и W — произвольное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Пусть $A\colon\mathcal{X}(M)\to W$ — отображение, линейное над $\mathbb{R}$ и такое, что*

$$A(fX)=f(p)A(X)\tag{3.1}$$

для всех $X\in\mathcal{X}(M)$ и $f\in\mathcal{F}(M)$.

Тогда значение $A(X)$ зависит только от вектора X_p, но не от его продолжения до векторного поля X. То есть существует такое линейное отображение $a\colon T_pM\to W$, что $A(X)=a(X_p)$ для всех $X\in\mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Сначала докажем локальность: если поля $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ совпадают в некоторой окрестности $U\ni p$, то $A(X)=A(Y)$. Для этого подставим в условие (3.1) поле $Z=X-Y$ и такую функцию f, что $f(p)=1$ и $f|_{M\setminus U}=0$. Так как $fZ=f\cdot(X-y)0$ всюду на M, в силу линейности имеем $A(fZ)=0$, откуда $A(Z)=f(p)A(Z)=A(fZ)=0$. Отсюда $f(X)-f(Y)=f(X-Y)=f(Z)=0$, и локальность доказана.

Локальность позволяет доопределить оператор A на векторных полях, заданных не всюду на M, а только в окрестности точки p. А именно, пусть X — векторное поле в окрестности $U\ni p$. Тогда существует векторное поле $\widetilde{X}\in\mathcal{X}(M)$, совпадающее с X в некоторой меньшей окрестности $U'\subset U$ точки p (например, можно умножить X на подходящую срезающую функцию и продолжить нулём). Определим $A(X)=A(\widetilde{X})$, в силу локальности это определение корректно (не зависит от выбора $\widetilde{X}$). Ясно, что линейность и условие (3.1) продолжают выполняться и для векторных полей и функций, заданных только в окрестности точки p.

Зафиксируем карту (U,φ) в окрестности p, и пусть $E_1,\dots,E_n$ — координатные поля этой карты. Пусть $X\in\mathcal{X}(M)$. В карте U поле X раскладывается по базису (E_i):

$$X|_U=\sum c_iE_i,$$

где $c_1,\dots,c_n$ — гладкие функции на U. Из линейности и условия (3.1) имеем

$$A(X)=\sum c_i(p)A(E_i).\tag{3.2}$$

Так как векторы $A(E_i)\in W$ не зависят от X, а коэффициенты $c_i(p)\in\mathbb{R}$ зависят только от вектора X_p, получаем, что значение $A(X)$ зависит только от X_p. Более формально, рассмотрим базис $(e_i)=(A(E_i))$ касательного пространства T_pM и определим линейное отображение $a\colon T_pM\to W$ значениями на базисе: $a(e_i)=A(E_i)$ для $i=1,\dots,n$. Тогда из равенства (3.2) следует, что $A(X)=a(X_p)$, что и требовалось доказать. □

Следствие 3.6. *Пусть M — гладкое многообразие, $k\ge 1$, и отображение*

$$A\colon\ \underbrace{\mathcal{X}(M)\times\dots\times\mathcal{X}(M)}_{k\ \text{раз}}\to\mathcal{F}(M),$$

линейно над $\mathcal{F}(M)$ по каждому аргументу. Тогда A — тензор типа $(k, 0)$. Более формально, существует тензор типа $(k, 0)$, действие которого на векторных полях совпадает с A.

Аналогично, если отображение

$$A\colon \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k \text{ раз}} \to \mathcal{X}(M)$$

линейно над $\mathcal{F}(M)$ по каждому аргументу, то оно — тензор типа $(k, 1)$.

Доказательство. Индукция по k.

База $k = 1$: Применив лемму 3.5 к каждой точке $p \in M$, получаем семейство $\{a_p\}_{p \in M}$, где $a_p\colon T_pM \to \mathbb{R}$ — такое линейное отображение, что $A(X)_p = a_p(X_p)$ для всех $X \in \mathcal{X}(M)$. Семейство $\{a_p\}$ и есть искомый тензор.

Переход от $k-1$ к k: Предположим, что утверждение уже доказано для операторов с $k-1$ аргументами. Для фиксированного $X \in \mathcal{X}(M)$ рассмотрим отображение

$$B_X\colon \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k-1 \text{ раз}} \to \mathcal{F}(M),$$

определяемое равенством

$$B_X(X_1, \ldots, X_{k-1}) = A(X_1, \ldots, X_{k-1}, X).$$

Применяя к B_X индукционное предположение, получаем семейство $\{b_p(X)\}_{p \in M}$ полилинейных форм вида

$$b_p(X)\colon \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k-1 \text{ раз}} \to \mathbb{R},$$

для которых верно равенство

$$B_X(X_1, \ldots, X_{k-1})_p = (b_p(X))(X_1(p), \ldots, X_k(p))$$

для всех $X_1, \ldots, X_{k-1}$ и $p \in M$.

Зафиксировав $p \in M$, рассмотрим $b_p(X)$ как функцию от $X \in \mathcal{X}(M)$, область значений которой — пространство $(k-1)$-линейных форм на T_pM. Из линейности A над $\mathcal{F}(M)$ по последнему аргументу легко следует, что отображение $X \mapsto b_p(X)$ удовлетворяет условиям леммы 3.5. Следовательно, ему соответствует линейное отображение b'_p из T_pM в пространство $(k-1)$-линейных форм на M. Для каждой точки $p \in M$ определим k-линейное отображение

$$a_p\colon \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}$$

равенством

$$a_p(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k) = b'_p(v_k)(v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

Тогда семейство $\{a_p\}_{p \in M}$ — искомый тензор.

Утверждение для тензоров типа $(k, 0)$ доказано. Для тензоров типа $(k, 1)$ доказательство точно такое же, отличие только в областях значений операторов. $\square$

3.3 Аффинные связности

На гладких многообразиях нет естественной операции дифференцирования векторного поля вдоль касательного вектора, которая давала бы касательный вектор того же многообразия. Чтобы обойти эту трудность, на многообразии можно ввести дополнительную структуру, называемую *аффинной связностью.*

Определение 3.7. Пусть M — гладкое многообразие. *Аффинная связность* на M — это отображение $\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, значение которого на полях $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ записывается в виде $\nabla_X Y$, обладающее следующими свойствами:

1. ∇ линейно над $\mathbb{R}$ по каждому аргументу.

2. ∇ тензориально (т.е. линейно над $\mathcal{F}(M)$) по первому аргументу:
$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$
для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и $f \in \mathcal{F}(M)$.

3. По второму аргументу ∇ удовлетворяет правилу Лейбница:
$$\nabla_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y$$
для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и $f \in \mathcal{F}(M)$, где Xf, как обычно, обозначает производную функции f вдоль векторного поля X.

Пример 3.8 (координатное дифференцирование)**.** Если данное многообразие — открытая область $U \subset \mathbb{R}^n$, то обычное дифференцирование векторных полей, рассматриваемых как функции из U в $\mathbb{R}^n$, является аффинной связностью.

Теперь рассмотрим произвольное многообразие M и его карту (U, φ). Отождествляя с помощью φ область $U \subset M$ с координатной областью $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, получаем аффинную связность D^φ на U, называемую *координатным дифференцированием* векторных полей. Ее можно описать следующим образом.

Пусть $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные поля карты φ, тогда любое поле $Y \in \mathcal{X}(U)$ можно представить в виде
$$Y = \sum_{i=1}^n \eta_i \partial_i,$$
где $\eta_1, \dots, \eta_n$ — некоторые гладкие функции на U. Координатное дифференцирование такого поля Y вдоль поля $X \in \mathcal{X}(U)$ выражается формулой
$$D_X^\varphi Y = \sum_{i=1}^n (X\eta_i) \partial_i,$$
где $X\eta_i$, как обычно, обозначает производную функции η_i вдоль векторного поля X.

Лемма 3.9. *Пусть M — гладкое многообразие. Тогда*

1. *Если ∇ и ∇' — аффинные связности на M, то $\nabla - \nabla'$ — тензор типа $(2,1)$ на M.*

2. *И обратно, сумма аффинной связности и $(2,1)$-тензора — аффинная связность.*

Доказательство. 1. Достаточно проверить, что $\nabla - \nabla'$ линейно над $\mathcal{F}(M)$ по второму аргументу. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и $f \in \mathcal{F}(M)$. Тогда

$$\nabla_X(fY) - \nabla'_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y - f\nabla'_X Y - (Xf)Y = f \cdot (\nabla_X Y - \nabla'_X Y),$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть ∇ — аффинная связность, T — $(2,1)$-тензор, $\nabla' = \nabla + T$. Ясно, что ∇' билинейно над $\mathbb{R}$ и тензориально по первому аргументу. Проверка правила Лейбница для ∇':

$$\nabla'_X(fY) = \nabla_X(fY) + T(X, fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y + fT(X,Y) = f\nabla'_X Y + (Xf)Y.$$

Таким образом, ∇' — аффинная связность. $\square$

Из леммы 3.9 ясно, как устроено пространство всех аффинных связностей на фиксированном многообразии M: это суммы одной из них и всевозможных $(2,1)$-тензоров. (Существование хотя бы одной связности на каждом многообразии оставляется упражнением.)

Замечание 3.10. Из тензориальности аффинной связности по первому аргументу следует, что первым аргументом может быть один касательный вектор, а не векторное поле. А именно, пусть $p \in M$, $v \in T_pM$ и $Y \in \mathcal{X}(M)$. Тогда корректно определен вектор

$$\nabla_v Y \in T_pM,$$

равный $(\nabla_X Y)_p$ для любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ такого, что $X_p = v$.

Лемма 3.11 (локальность аффинной связности)**.** *Пусть ∇ — аффинная связность на M, $p \in M$, и пусть $U \subset M$ — окрестность точки p. Тогда значение $(\nabla_X Y)_p$ однозначно определяется сужениями полей X и Y на U.*

Более формально, если векторные поля $X, X', Y, Y' \in \mathcal{X}(M)$ таковы, что $X|_U = X'|_U$ и $Y|_U = Y'|_U$, то $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{X'} Y')_p$.

Доказательство. Для первого аргумента утверждение следует из предыдущего замечания, остается доказать утверждение в случае, когда $X = X'$. Рассмотрим поле $Z = Y - Y'$ и функцию $f \in \mathcal{F}(M)$, которая равна 0 на $M \setminus U$ и 1 в точке p. Тогда fZ — нулевое векторное поле, откуда

$$0 = \nabla_X(fZ) = f \cdot \nabla_X Z + (Xf) \cdot Z.$$

Подставляя точку p и вспоминая, что $f(p) = 1$ и $Z_p = 0$, получаем, что $(\nabla_X Z)_p = 0$, откуда $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Y')_p$. $\square$

Из леммы 3.11 следует, что для аффинной связности ∇ на M естественно определено сужение на любую открытую область $U \subset M$. Однако явно это сужение, как правило, не пишут. Вместо этого, допуская некоторую вольность обозначений, в оператор ∇ подставляют векторные поля, определенные не на всем многообразии, а на открытом подмножестве. Мы будем пользоваться такими обозначениями, рассматривая аффинные связности в картах.

Аффинная связность в координатах. Пусть ∇ — аффинная связность на многообразии M^n, (U, φ) — карта на M, $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные поля этой карты. Как объяснено выше, эти поля (определенные только на U) можно подставлять в ∇. Для каждой пары индексов $i, j \in \{1, \dots, n\}$ определим на U векторное поле

$$\Gamma_{ij} = \nabla_{\partial_i} \partial_j.$$

Раскладывая Γ_{ij} по координатным полям, получаем набор функций Γ_{ij}^k ($k = 1, \dots, n$), удовлетворяющих равенству

$$\Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Функции Γ_{ij}^k называются *символами Кристоффеля* аффинной связности ∇ в данной карте.

Из векторных полей Γ_{ij} можно составить семейство билинейных операторов $\Gamma = \{\Gamma_x\}_{x\in U}$,

$$\Gamma_x \colon T_xM \times T_xM \to T_xM,$$

определяемых значениями на базисе:

$$\Gamma(\partial_i, \partial_j) = \Gamma_{ij} = \nabla_{\partial_i}\partial_j.$$

Для фиксированной карты φ построенное семейство операторов Γ является $(2,1)$-тензором на U. Но это не тензор в общепринятом смысле, так как Γ существенно (и довольно сложно) зависит от φ. Чтобы напомнить о зависимости от φ, в некоторых формулах мы будем использовать обозначение Γ^φ вместо Γ.

Лемма 3.12. *В любой карте (U, φ) аффинная связность ∇ выражается через символы Кристоффеля следующим образом: для любых $X, Y \in \mathcal{X}(U)$,*

$$\nabla_X Y = D_X^\varphi Y + \Gamma^\varphi(X, Y), \tag{3.3}$$

где D^φ — координатное дифференцирование в данной карте, Γ^φ — семейство билинейных операторов, составленных из символов Кристоффеля как описано выше.

Доказательство. Удобнее проверять эквивалентное равенство

$$\nabla_X Y - D_X^\varphi Y = \Gamma^\varphi(X, Y).$$

В этом равенстве и правая, и левая часть тензориальны (по лемме 3.9), поэтому достаточно проверить его для случая, когда X и Y — координатные поля. На координатных полях координатное дифференцирование обращается в ноль, после чего доказываемое равенство превращается в определение Γ. $\square$

Следствие 3.13. *Для аффинной связности ∇ на M и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ значение $\nabla_X Y$ в точке $p \in M$ однозначно определяется значением X в точке p и значениями Y на любой гладкой кривой $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = X_p$, где $\dot\gamma$ обозначает вектор скорости кривой.*

Другими словами, если $X, X', Y, Y' \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$, и существует гладкая кривая $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такая, что $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X_p = X'_p$ и $Y_{\gamma(t)} = Y'_{\gamma(t)}$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{X'} Y')_p$.

Доказательство. Оба слагаемых в правой части формулы (3.3) однозначно определяются указанными данными. $\square$

Задачи и упражнения. 1. Вычислите символы Кристоффеля стандартного дифференцирования векторных полей на плоскости в полярных координатах.

2. Докажите, что сумма двух аффинных связностей никогда не является аффинной связностью.

3. Пусть $\nabla^1, \dots, \nabla^m$ — аффинные связности на многообразии M, $f_1, \dots, f_m$ — функции из $\mathcal{F}(M)$, сумма которых равна константе 1. Докажите, что $\sum_{i=1}^m f_i \nabla^i$ — аффинная связность.

3.4 Связность Леви-Чивиты

На римановом многообразии среди аффинных связностей имеется одна выделенная (согласованная с римановой метрикой), которая называется *связностью Леви-Чивиты*. Этот раздел посвящен ее построению.

Определение 3.14. Аффинная связность ∇ на многообразии M называется *симметричной*, если

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y.

Пример 3.15. Координатное дифференцирования — симметричная связность. Это следует из формулы для скобки Ли в координатах.

Лемма 3.16. *Пусть ∇ — аффинная связность на M. Тогда отображение*

$$T\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

определяемое равенством

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \qquad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

является $(2, 0)$-тензором.

Определение 3.17. Тензор T из леммы 3.16 называется *тензором кручения* аффинной связности ∇. Определение симметричной связности можно переформулировать через тензор кручения: аффинная связность симметрична тогда и только тогда, когда ее тензор кручения равен 0.

Доказательство леммы. Очевидно, что T кососимметричен: $T(Y, X) = -T(X, Y)$, поэтому достаточно проверить его тензориальность по второму аргументу. Она выводится прямым вычислением из определения аффинной связности и правила Лейбница для скобки Ли:

$$[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf)Y$$

для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и $f \in \mathcal{F}(M)$. □

Лемма 3.18. *Пусть ∇ — аффинная связность, (U, φ) — карта. Симметричность ∇ на U равносильна симметричности символов Кристоффеля, т.е. равенству $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ для всех i, j.*

Доказательство. Напомним, что $\Gamma_{ij} = \nabla_{\partial_i} \partial_j$, где $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные поля данной карты. Пусть T — тензор кручения связности ∇. Так как $[\partial_i, \partial_j] = 0$, имеем

$$T(\partial_i, \partial_j) = \Gamma_{ij} - \Gamma_{ij}.$$

Следовательно, если связность симметрична, то $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$. Обратно, если $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$, то T обращается в ноль на координатных полях, а значит (в силу тензориальности) и на любых векторных полях в пределах данной карты. □

Определение 3.19. Пусть M — риманово многообразие. Аффинная связность ∇ на M называется *римановой*, если она удовлетворяет правилу Лейбница для дифференцирования скалярного произведения:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{3.4}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Угловые скобки, как обычно, обозначают риманову метрику.

Связность Леви-Чивиты на M — это риманова симметричная аффинная связность.

Пример 3.20. Обычное дифференцирование векторных полей в $\mathbb{R}^n$ — связность Леви-Чивиты для $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой.

Пример 3.21 (связность Леви-Чивиты на подмногообразии)**.** Пусть $\widetilde{M}$ — риманово многообразие, $M \subset \widetilde{M}$ — гладкое подмногообразие, $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты на $\widetilde{M}$. Тогда можно построить связность Леви-Чивиты ∇ на M следующим образом: для векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и точки $p \in M$ определяем

$$(\nabla_X Y)_p = \mathrm{pr}_{TM}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}), \tag{3.5}$$

где $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — произвольные локальные продолжения полей X и Y на $\widetilde{M}$ в окрестности точки p, pr_{TM} — ортогональная проекция из $T_p\widetilde{M}$ на T_pM.

Доказательство. Так как правая часть формулы (3.5) однозначно определяется сужением поля $\widetilde{Y}$ на любую кривую, выходящую из p в направлении $\widetilde{Y}$ (см. следствие 3.13), и такую кривую можно выбрать лежащей в подмногообразии, формула корректно определяет вектор $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$. Ясно, что зависимость этого вектора от p — гладкая, поэтому формула корректно определяет поле $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$.

Аксиомы связности Леви-Чивиты легко проверяются, если выбирать согласованные друг с другом локальные продолжения всех рассматриваемых полей и функций. □

Лемма 3.22. *Разность левой и правой части формулы* (3.4)*, рассматриваемая как функция от X, Y, Z — тензор.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемую разность через $A(X, Y, Z)$:

$$A(X, Y, Z) = X\langle Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Тензориальность по X тривиальна. Кроме того, выражение симметрично по Y и Z, поэтому достаточно проверить тензориальность по Z. Для любой функции $f \in \mathcal{F}(M)$ из линейности скалярного произведения и правил Лейбница для дифференцирования функций и связности получаем

$$\begin{aligned}
A(X, Y, fZ) &= X(f\langle Y, Z\rangle) - \langle \nabla_X Y, fZ\rangle - \langle Y, \nabla_X(fZ)\rangle \\
&= fX\langle Y, Z\rangle + (Xf)\langle Y, Z\rangle - f\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \big(f\langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle Y, (Xf)Z\rangle\big) \\
&= fX\langle Y, Z\rangle - f\langle \nabla_X Y, Z\rangle - f\langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
&= fA(X, Y, Z),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.23 («основная теорема римановой геометрии»)**.** *На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивиты.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение локально, то есть для случая, когда многообразие покрывается одной картой (M, φ). Как обычно, используем обозначения ∂_i для координатных полей и g_{ij} для метрических коэффициентов.

1. *Единственность.* Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты на U. Как обычно, обозначим $\Gamma_{ij} = \nabla_{\partial_i}\partial_j$ и вспомним, что $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$. Дифференцируя последнее равенство по k-й координате, получаем

$$\partial_k g_{ij} = \langle \Gamma_{ik}, \partial_j\rangle + \langle \Gamma_{jk}, \partial_i\rangle.$$

Переобозначая индексы и пользуясь симметричностью символов Кристоффеля, получаем еще два аналогичных равенства:

$$\partial_i g_{jk} = \langle \Gamma_{ij}, \partial_k\rangle + \langle \Gamma_{ik}, \partial_j\rangle$$

и

$$\partial_j g_{ik} = \langle \Gamma_{ij}, \partial_k\rangle + \langle \Gamma_{jk}, \partial_i\rangle.$$

Складывая два последних равенства и вычитая первое, получаем, что

$$2\langle \Gamma_{ij}, \partial_k\rangle = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}. \tag{3.6}$$

Это равенство для каждого вектора Γ_{ij} в каждой точке однозначно определяет его скалярные произведения со всеми базисными векторами ∂_k ($k = 1, \dots, n$). Значит, оно однозначно определяет векторное поле Γ_{ij}. Так как связность в карте выражается через символы Кристоффеля, отсюда следует, что связность Леви-Чивиты однозначно определяется римановой метрикой.

2. *Существование.* Формулу (3.6) можно использовать в качестве определения связности. А именно, для каждой каждой тройки номеров $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ определим функцию

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}}{2} \tag{3.7}$$

на U. Для каждой точки $x \in U$ и каждой пары индексов i, j существует вектор $\Gamma_{ij}(x) \in T_x M$ такой, что

$$\langle \Gamma_{ij}(x), \partial_k(x)\rangle = \Gamma_{ij,k}(x) \qquad \text{для всех } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Это следует из того, что скалярное произведение невырождено, а векторы $\partial_1(x), \dots, \partial_n(x)$ образуют базис $T_x M$. Легко видеть, что вектор $\Gamma_{ij}(x)$ гладко зависит от x, так как его координаты получаются из набора чисел $(\Gamma_{ij,k})_{k=1}^n$ умножением на матрицу, обратную к (g_{ij}). Построим поточечно билинейный оператор Γ на векторных полях, значения которого на координатных полях ∂_i и ∂_j равны Γ_{ij} для всех пар i, j и определим в рассматриваемой карте φ аффинную связность ∇ равенством

$$\nabla_X Y = D^\varphi_X Y + \Gamma(X, Y).$$

Эта формула задает связность, так как в правой части строит сумма координатной связности и $(2,1)$-тензора. Эта связность симметрична, так как $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ по определению Γ_{ij}. Остается проверить, что построенная связность ∇ удовлетворяет правилу Лейбница для скалярного произведения (3.4). По лемме 3.22 достаточно проверить это условие для координатных полей $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_k$. Подставляя определения, получаем

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle + \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k\rangle = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} = \partial_i g_{jk} = \partial_i\langle \partial_j, \partial_k\rangle,$$

что и требовалось доказать. (Второе равенство в цепочке получается подстановкой определения (3.7)).

3. *Общий случай.* Теперь рассмотрим произвольное многообразие M, не обязательно покрываемое одной картой. Как уже доказано, в каждой его карте существует единственная связность Леви-Чивиты. В силу локальности аффинная связность однозначно определяется своими сужениями на карты, откуда следует единственность

Осталось доказать существование. Для $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ определим векторное поле $\nabla_X Y$ так: для каждой точки $p \in M$ выберем карту (U_p, φ_p) в окрестности p и определим

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla^U_X Y)_p,$$

где ∇^U — связность Леви-Чивиты в области U, построенная на предыдущем шагу доказательства. Определение корректно в силу локальной единственности — для любых двух карт, содержащих p, построенные для них локальные связности совпадают на пересечении носителей и, следовательно, дают одинаковые значения для $(\nabla_X Y)_p$. Построенный таким образом оператор ∇ является связностью Леви-Чивиты для M, так как все свойства из определения связности Леви-Чивиты локальны и выполняются для связностей ∇^U. $\square$

Замечание 3.24. Функции $\Gamma_{ij,k} = \langle \Gamma_{ij}, \partial_k \rangle = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle$ называются *символами Кристоффеля первого рода* (данной римановой метрики в данной карте). Их легко вычислять по формуле (3.7). Вычислив $\Gamma_{ij,k}$, можно найти символы Кристоффеля второго рода (Γ_{ij}^k) умножением на обратную матрицу метрических коэффициентов. После этого значение связности Леви-Чивиты на векторных полях, записанных в координатах, можно находить по формуле (3.3). А именно, если $X = \sum \xi_i \partial_i$ и $Y = \sum \eta_i \partial_i$, то

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_i \xi_i \partial_i \eta_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \xi_i \eta_j \right) \partial_k.$$

Первое слагаемое в скобках представляет координатное дифференцирование, второе равно выражению $\Gamma^\varphi(X, Y)$ из формулы (3.3).

Есть и бескординатное выражение для связности Леви-Чивиты, оно содержится в следующей теореме.

Теорема 3.25 (формула Кошуля). *Пусть M — риманово многообразие, ∇ — его связность Леви-Чивиты. Тогда для любых $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ верно равенство*

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle.$$

Доказательство. Из римановости связности имеем

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle, \\ Y\langle X, Z \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Z Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Сложив первые два равенства и вычтя третье, получаем

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle.$$

Пользуясь симметричностью связности, перепишем выражения в правой части:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y + \nabla_Y X &= 2\nabla_X Y - [X, Y], \\ \nabla_X Z - \nabla_Z X &= [X, Z], \\ \nabla_Y Z - \nabla_Z Y &= [Y, Z], \end{aligned}$$

после чего формула принимает вид

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle 2\nabla_X Y - [X, Y], Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle,$$

эквивалентный равенству из формулировки. $\square$

Замечание 3.26. С помощью формулы Кошуля можно по-другому доказать основную теорему римановой геометрии. Из доказательства формулы следует единственность связности Леви-Чивиты, а саму формулу можно использовать в качестве определения векторного поля $\nabla_X Y$, проверив тензориальность правой части по Z. Аксиомы связности Леви-Чивиты при таком определении проверяются прямолинейным (но довольно громоздким) вычислением.

3.5 Ковариантное дифференцирование вдоль кривой

Следствие 3.13 подсказывает, что можно определить значение связности для векторного поля, определенного вдоль кривой, а не на всем многообразии или открытой области. Такое определение легко дать для регулярных кривых, локально продолжая векторное поле с кривой на окрестность Для произвольных гладких кривых (у которых скорость может обращаться в ноль) определение становится более техническим.

Определение 3.27. Пусть M — гладкое многообразие, X — топологическое пространство, $f\colon X \to M$ — непрерывное отображение. *Векторное поле вдоль* f — это непрерывное отображение $V\colon X \to TM$ такое, что $V(x) \in T_{f(x)}M$ для всех $x \in X$.

Нам в основном понадобятся векторные поля вдоль гладкой кривой $\gamma\colon I \to M$ (где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал). По умолчанию векторные поля вдоль кривых предполагаются гладкими. Пространство всех векторных полей вдоль кривой γ будем обозначать через $\mathcal{X}(\gamma)$. На множестве $\mathcal{X}(\gamma)$ имеются естественные структуры векторного пространства над $\mathbb{R}$ и модуля над алгеброй гладких функций $\mathcal{F}(I)$, где I — область определения кривой γ. Параметр кривой обычно будем обозначать буквой t.

Теорема 3.28. *Пусть M — гладкое многообразие, $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая, ∇ — аффинная связность на M. Тогда существует единственный оператор*

$$\nabla^\gamma\colon \mathcal{X}(\gamma) \to \mathcal{X}(\gamma),$$

обладающий следующими свойствами:

1. *Согласованность с ∇: Если векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ продолжает поле $X \in \mathcal{X}(\gamma)$, то есть $X(t) = \widetilde{X}(\gamma(t))$ для всех $t \in I$, то $\nabla^\gamma X(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\widetilde{X}$.*

2. *Линейность над $\mathbb{R}$.*

3. *Правило Лейбница: $\nabla^\gamma(fX) = f\nabla^\gamma X + f'X$ для любых $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ и $f \in \mathcal{F}(I)$.*

Доказательство. 1. Единственность. Так же, как для обычной аффинной связности, из условий следует локальность: если поля $X, Y \in \mathcal{X}(\gamma)$ совпадают в окрестности точки $t_0 \in I$, то $\nabla^\gamma X$ и $\nabla^\gamma Y$ совпадают в точке t_0. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда кривая содержится в одной карте (U, φ).

Пусть $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные поля карты. Условие согласованности с ∇ однозначно определяет значения $\nabla^\gamma\partial_i$, где ∂_i обозначает сужение ∂_i на γ (то есть, формально, $\partial_i \circ \gamma$). Любой поле $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ можно представить в виде $X = \sum f_i\partial_i$, где f_i — гладкие функции на I, после чего $\nabla^\gamma X$ однозначно определяется из линейности и правила Лейбница.

2. Существование. Пусть $\gamma\colon I \to M$ лежит в одной карте (U, φ). Для поля $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ с координатным разложением $X = \sum f_i\partial_i(\gamma(t))$ определим

$$\nabla^\gamma X(t) = \sum f_i'(t)\partial_i + \Gamma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), X(t)), \tag{3.8}$$

где $\Gamma_{\gamma(t)}$ — билинейный оператор на $T_{\gamma(t)}M$, составленный из символов Кристоффеля карты φ. Если поле X продолжается до поля $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(U)$, то формула совпадает с координатным выражением для аффинной связности. Поэтому условие согласованности с ∇ выполняются. Линейность над $\mathbb{R}$ и правило Лейбница легко следуют из определения.

Если кривая не лежит в одной карте, то оператор ∇^γ строится аналогично построению связности Леви-Чивиты: определяем значение в точке с помощью произвольной карты, определение корректно в силу единственности. □

Определение 3.29. Оператор ∇^γ, построенный в теореме 3.28, называется *ковариантным дифференцированием* вдоль пути γ (относительно связности ∇). Обычно используются другие обозначения: для параметра пути γ фиксируется какая-либо буква, например t, после чего вместо $\nabla^\gamma X(t)$ пишут $\frac{\nabla}{dt}X(t)$. Формулу (3.8) будем обычно кратко записывать в виде

$$\frac{\nabla}{dt}X = X'_{coord} + \Gamma(\gamma', X).$$

В случае, когда кривая γ и аффинная связность ∇ ясны из контекста, вместо $\frac{\nabla}{dt}X(t)$ можно писать просто $X'(t)$.

Следующие теоремы переводят аксиомы связности Леви-Чивиты на язык дифференцирования вдоль путей.

Теорема 3.30. *Пусть M — гладкое многообразие, ∇ — симметричная аффинная связность на M, $f\colon \mathbb{R}^2 \to M$ — гладкое отображение. Тогда*

$$\frac{\nabla}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\nabla}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),$$

где $\frac{\nabla}{dx}$ и $\frac{\nabla}{\partial y}$ — ковариантные производные вдоль путей, получающихся фиксированием значений другой переменной.

Доказательство. Достаточно проверить равенство в пределах одной карты (U,φ). С помощью координатной формулы для аффинной связности перепишем доказываемое равенство в виде

$$\frac{\nabla^\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) + \Gamma^\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\nabla^\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) + \Gamma^\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

где ∇^φ — координатное дифференцирование карты φ, Γ^φ — оператор, составленный из символов Кристоффеля. Это равенство верно, так как и координатная вторая производная, и символы Кристоффеля симметричной связности симметричны. □

Теорема 3.31. *Пусть M — риманово многообразие, ∇ — риманова связность. Тогда для любой гладкой кривой $\gamma\colon I \to M$ и полей $X, Y \in \mathcal{X}(\gamma)$ верно равенство*

$$\tfrac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \tfrac{\nabla}{dt}X(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), \tfrac{\nabla}{dt}Y(t)\rangle.$$

Доказательство. Так как обе части локальны и билинейны над $\mathbb{R}$, достаточно проверить равенство для кривой, лежащей в одной карте, и только для полей, получаемых умножением координатных полей на гладкие функции. Для самих координатных полей равенство следует из согласованности $\frac{\nabla}{dt}$ с ∇ и римановости связности ∇. Далее прямым вычислением из аксиом проверяется, что при умножении X или Y на гладкую функцию равенство сохраняется. □

Бывает полезна и формула ковариантной производной композиции:

Теорема 3.32. *Пусть гладкие кривые $\gamma\colon I \to M$ и $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \to M$ связаны гладкой заменой переменной: $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$. Пусть $X \in \mathcal{X}(\gamma)$, и пусть $\widetilde{X}(t) = X(s(t))$. Тогда*

$$\frac{\nabla}{dt}\widetilde{X}(t) = \frac{\nabla}{ds}\Big|_{s=s(t)} X(s)\cdot s'(t)$$

для всех t.

Доказательство. Легко следует из координатной формулы. □

3.6 Параллельный перенос

Пусть M — гладкое многообразие, ∇ — аффинная связность на M. Зафиксируем эти обозначения до конца раздела.

Определение 3.33. Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Поле $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ называется *параллельным полем*, если $\frac{\nabla}{dt}X(t) = 0$ для всех $t \in I$.

Параллельные поля вдоль γ образуют векторное пространство. Действительно, из линейности оператора $\frac{\nabla}{dt}$ следует, что сумма параллельных полей и произведение параллельного поля и константы — тоже параллельные поля.

Теорема 3.34. *Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая, $t_0 \in I$ и $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. Тогда существует единственное параллельное поле $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ такое, что $X(t_0) = v_0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда γ лежит в одной карте (U, φ). Пусть $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные поля карты. Любое поле $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ можно, разложив по координатным полям, представить в виде

$$X(t) = \sum f_i(t) \cdot \partial_i(\gamma(t)),$$

где $f_1, \dots, f_n$ — гладкие функции на I. С помощью координатного представления ковариантной производной легко видеть, что условие параллельности поля X равносильно системе дифференциальный уравнений на функции $f_1, \dots, f_n$:

$$f_k' = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_i', f_j),$$

где γ_i' — производная i-й координатной функции кривой γ. Так как эта система дифференциальных уравнений линейна, доказываемое утверждение следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных О.Д.У.

Случай, когда кривая не лежит в одной карте, можно вывести из разобранного, разбив кривую на участки, каждый из которых лежит в одной карте. □

Определение 3.35. Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая, $a, b \in I$. Отображение

$$P_{\gamma,a,b}\colon T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M,$$

называемое *параллельным переносом вдоль* γ (между параметрами a и b), определяется следующим образом: для каждого $v \in T_{\gamma(a)}M$ полагаем $P_\gamma(v) = X_v(b)$, где X_v — параллельное поле вдоль γ, определяемое условием $X_v(a) = v$. Такое поле X_v существует и единственно по предыдущей теореме.

В случае, когда $I = [a, b]$, вместо $P_{\gamma,a,b}$ пишем просто P_γ.

Из определения сразу следует, что $P_{\gamma,b,c} \circ P_{\gamma,a,b} = P_{\gamma,a,c}$ для любых $a, b, c \in I$. Как следствие, $P_{\gamma,a,b}$ — биекция между $T_{\gamma(a)}M$ и $T_{\gamma(b)}M$, и $P_{\gamma,a,b}^{-1} = P_{\gamma,b,a}$. Кроме того, из теоремы 3.32 следует, что параллельный перенос не меняется при замене параметризации кривой.

Теорема 3.36. *Параллельный перенос $P_{\gamma,a,b}$ — линейная биекция. Если M — риманово многообразие и ∇ — риманова связность, то $P_{\gamma,a,b}$ сохраняет скалярное произведение.*

Доказательство. Будем обозначать $P_{\gamma,a,b}$ через P. Пусть $v, w \in T_{\gamma(a)}M$, и пусть X_v, X_w — соответствующие параллельные поля как в определении 3.35. Из определений следует, что их сумма $X_v + X_w$ — тоже параллельное поле, откуда

$$P(v + w) = (X_v + X_w)(b) = P(v) + P(w).$$

Аналогично доказывается, что $P(cv) = cP(v)$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$. Таким образом, P — линейное отображение.

Теперь пусть M — риманово многообразие, ∇ — риманова связность. Тогда скалярное произведение параллельных полей $\langle X_v, X_w \rangle$ — константа, что проверяется дифференцированием:

$$\langle X_v, X_w \rangle' = \langle \tfrac{\nabla}{dt} X_v, X_w \rangle + \langle X_v, \tfrac{\nabla}{dt} X_w \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle P(v), P(w) \rangle = \langle X_v(b), X_w(b) \rangle = \langle X_v(a), X_w(a) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Таким образом, P сохраняет скалярное произведение. □

Следующая теорема выражает ковариантную производную через параллельный перенос. Она помогает сводить вопросы об аффинных связностях к вопросам о производных функций одной переменной со значениями в фиксированном векторном пространстве.

Теорема 3.37. *Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая, X — векторное поле вдоль γ. Тогда*

$$\frac{\nabla}{dt}\Big|_{t=t_0} X(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} P_{\gamma,t,t_0}(X(t))$$

для любого $t_0 \in I$.

Доказательство. Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ касательного пространства $T_{\gamma(t_0)}M$ и продолжим каждый вектор e_i до параллельного поля E_i вдоль γ. Для каждого $t \in I$ векторы $E_1(t), \dots, E_n(t)$ образуют базис пространства $T_{\gamma(t)}M$. Разложим $X(t)$ по этому базису: $X(t) = \sum f_i(t) E_i(t)$. Так как E_i — параллельные поля, левая часть доказываемого равенства принимает вид

$$\frac{\nabla}{dt} X(t) = \sum f_i'(t) E_i(t).$$

В силу параллельности E_i и линейности параллельного переноса,

$$P_{\gamma,t,t_0}(X(t)) = \sum f_i(t) e_i,$$

Дифференцируя это равенство по t и подставляя $t = t_0$, получаем требуемое. □

4 Геодезические и экспонента

Всюду в этом разделе M обозначает риманово многообразие, n — его размерность, ∇ — его связность Леви-Чивиты. Риманова метрика рассматриваемого многообразия обозначается угловыми скобками $\langle , \rangle$ или буквой g.

4.1 Определения

Определение 4.1. Гладкая кривая $\gamma\colon I \to M$ (где $I \subset M$ — интервал) называется *геодезической линией*, или просто *геодезической*, если

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = 0 \tag{4.1}$$

для всех $t \in I$.

Уравнение (4.1) будем называть *уравнением геодезической.* Определение геодезической можно переформулировать так: γ — геодезическая, если γ' — параллельное поле вдоль γ. Заметим, что любая постоянная кривая — геодезическая.

Предложение 4.2. *Если γ — геодезическая, то $|\gamma'|$ — константа.*

Доказательство. Продифференцируем функцию $|\gamma'|^2$:

$$(|\gamma'|^2)' = \langle \gamma', \gamma' \rangle' = 2\langle \tfrac{\nabla}{dt}\gamma', \gamma' \rangle = 0,$$

где последнее равенство следует из уравнения геодезической для γ. Отсюда $|\gamma'|^2$ — константа, следовательно, $|\gamma'|$ — тоже константа. □

Предложение 4.3. *При линейной замене параметра из геодезической получается геодезическая. То есть, если γ — геодезическая и $a, b \in \mathbb{R}$, то кривая $t \mapsto \gamma(at+b)$ — тоже геодезическая.*

Доказательство. Следует из формулы замены параметра в ковариантной производной (теорема 3.32). □

Теорема 4.4. *Пусть $v \in T_pM$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует единственная геодезическая $\gamma\colon (\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такая, что $\gamma'(0) = v$.*

Как следствие, существует единственная «максимально продолженная» геодезическая $\gamma_v\colon I \to M$, где $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий 0, такая, что $\gamma_v'(0) = v$ и любая геодезическая с теми же начальными данными является сужением γ_v.

Замечание. Условие $\gamma'(0) = v$ в теореме подразумевает равенство $\gamma(0) = p$, где p — точка приложения вектора v (то есть $v \in T_pM$).

Доказательство теоремы. Зафиксируем карту в окрестности p, и пусть $\{\Gamma_{ij}^k\}$ — символы Кристоффеля в этой карте. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ — гладкая кривая в рассматриваемой окрестности, $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ — ее координатные функции в карте. С помощью координатного выражения для ковариантной производной уравнение геодезической для γ переписывается в виде системы дифференциальных уравнений на эти функции

$$\gamma_k''(t) = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Теперь первое утверждение теоремы следует из существования и единственности локального решения задачи Коши для уравнений второго порядка.

Второе утверждение выводится из первого стандартными рассуждениями: из локальной единственности следует, что решения, определенные на разных интервалах, согласованы между собой, поэтому в качестве I возьмем объединение областей определения всевозможных решений, а в качестве γ_v — объединение всех решений. □

Определение 4.5. Определим отображение $\exp$ из подмножества касательного расслоения TM со значениями в M следующим образом. Для вектора $v \in TM$ построим геодезическую γ_v по начальным данным $\gamma'(0) = v$ и положим $\exp(v) = \gamma_v(1)$, если $\gamma_v(t)$ продолжается до значения $t = 1$. Если не продолжается, то $\exp(v)$ не определено.

Для точки $p \in M$ обозначаем через $\exp_p$ сужение $\exp$ на T_pM (точнее, на пересечение T_pM с областью определения $\exp$).

Теорема 4.6. *Отображение* $\exp$ *определено на открытом подмножестве T_pM, включающем все нулевые касательные векторы, и является гладким.*

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы показано, что exp — сужение на $t = 1$ общего решения задачи Коши для ОДУ второго порядка. Открытость области определения и гладкость следуют из теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных данных (эту теорему надо перенести с $\mathbb{R}^n$ на многообразия, это требует некоторой технической работы, которую мы опустим).

То, что exp определена на нулевых векторах, следует из того, что постоянные кривые — геодезические, откуда $\exp_p(0) = p$ для любого $p \in M$. □

Предложение 4.7. *Отображение* $\exp_p$ *переводит прямые, проходящие через* $0 \in T_pM$, *в геодезические, с сохранением скорости. А именно, для вектора* $v \in T_pM$ *обозначим через* γ_v *максимально продолженную геодезическую с начальными данными* $\gamma_v'(0) = v$. *Тогда*

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$$

при всех t, *для которых определена хотя бы одна из частей равенства.*

Доказательство. Случаи, когда $t = 0$ или $v = 0$, тривиальны, так как $\exp_p(0) = p$. Будем считать, что $v \neq 0$, и пусть $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Так как при линейных заменах параметра геодезические остаются геодезическими, имеем

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$$

при всех t, для которых определена хотя бы одна из частей. Подставляя $t = 1$, получаем

$$\exp_p(cv) = \gamma_v(c),$$

если хотя бы одно из выражений определено. Заменяя c на t, получаем доказываемое равенство. □

4.2 Радиус инъективности

Лемма 4.8. $d_0 \exp_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ *для любой точки* $p \in M$.

Примечание: $d_0 \exp_p$ *— дифференциал отображения* $\exp_p \colon T_pM \to M$ *в точке* $0 = 0_{T_pM}$. *С учетом стандартных отождествлений этот дифференциал является линейным отображением из* T_pM *в себя.*

Доказательство. Следует из предложения 4.7. А именно, для каждого $v \in T_pM$ найдем значение $d_0 \exp_p(v)$ как производную $\exp_p$ вдоль прямой $t \mapsto tv$ в точке $t = 0$:

$$d_0 \exp_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \gamma_v'(0) = v,$$

где γ_v обозначает геодезическую с начальной скоростью v, как в предложении 4.7. □

Из леммы 4.8 следует, что к отображению $\exp_p$ в нуле применима теорема об обратной функции. Следовательно, сужение $\exp_p$ на достаточно малую окрестность нуля в T_pM — диффеоморфизм на окрестность точки p в M.

Определение 4.9. *Радиус инъективности* риманова многообразия M в точке $p \in M$ (обозначение: $\mathrm{inj}_M(p)$ или $\mathrm{injrad}_M(p)$) — супремум таких $r > 0$, что сужение отображения $\exp_p$ на шар $B_r(0) \subset T_pM$ является диффеоморфизмом на образ.

Нетрудно видеть, что супремум в определении либо достигается, либо равен ∞.

Теорема 4.10. *Для любой точки $p \in M$ существует $\varepsilon > 0$ и такая окрестность $U \ni p$, что*

1. $\mathrm{inj}_M(x) \geq \varepsilon$ *для всех* $x \in U$.

2. Для любых $x, y \in U$ существует единственная геодезическая $\gamma_{xy}\colon [0,1] \to M$ такая, что $\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = y$ и $L(\gamma_{xy}) < \varepsilon$.

3. Вектор $\gamma'_{xy}(0)$ гладко зависит от пары (x, y).

Доказательство. Для точки $x \in M$ и касательного вектора $v \in T_xM$ обозначим

$$E(x) = (x, \exp_x(v)) \in M \times M.$$

Это определяет отображение E из открытого подмножества касательного расслоения (области определения exp) в $M \times M$. Обозначим через 0_p нулевой вектор пространства T_pM. Из леммы 4.8 легко следует, что E имеет невырожденный дифференциал в точке 0_p. Отсюда по теореме об обратной функции существуют окрестности $V \subset TM$ точки 0_p и $W \subset M \times M$ точки (p, p) такие, что E диффеоморфно отображает V на W. Уменьшив при необходимости окрестность V, можно считать, что она имеет вид

$$V = \bigcup_{x \in U_0} B_\varepsilon^{T_xM}(0)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой окрестности $U_0 \ni p$, где $B_\varepsilon^{T_xM}(0)$ — шар радиуса ε с центром в нуле в касательном пространстве T_xM. Окрестность $W = E(V) \subset M \times M$ содержит «квадратную» окрестность вида $U \times U$, где $U \subset M$ — окрестность точки p. Легко видеть, что построенные ε и U удовлетворяют требованиям. □

Следствие 4.11. *Функция* inj_M *отделена от нуля на любом компакте* $A \subset M$.

Доказательство. Из теоремы 4.10 следует, что у каждой точки многообразия есть окрестность, в которой значения inj_M отделены от 0. Покрыв множество A конечным набором таких окрестностей, получаем требуемое. □

4.3 Нормальные координаты

Определение 4.12. Пусть M^n — риманово многообразие, $p \in M$, $r = \mathrm{inj}_M(p)$. Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ и рассмотрим отображение

$$f\colon B_r^{\mathbb{R}^n}(0) \to M,$$

определяемое равенством

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp_p\Big(\sum x_i e_i\Big),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $x \in B_r^{\mathbb{R}^n}(0)$. Через $B_r^{\mathbb{R}^n}(0)$ здесь обозначается r-шар с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$, если $r < \infty$, или всё пространство $\mathbb{R}^n$, если $r = \infty$.

Отображение f является диффеоморфизмом на образ. Соответствующая карта (то есть обратное отображение f^{-1}) называется *нормальным координатами* с центром в p.

Теорема 4.13. *В центре нормальных координат для метрических коэффициентов g_{ij} и символов Кристоффеля Γ_{ij}^k выполняются следующие равенства:*

1. *(g_{ij}) — единичная матрица.*

2. *$\Gamma_{ij}^k = 0$ для всех номеров координат i, j, k.*

3. $\partial_k g_{ij} = 0$ *для всех номеров координат* i, j, k.

Доказательство. 1. Следует из леммы 4.8.

2. Вспомним координатное уравнение геодезической: кривая $\gamma = \gamma(t)$ с координатами $x(t) \in \mathbb{R}^n$ является геодезической тогда и только тогда, когда

$$x'' + \Gamma_{x(t)}(x', x') = 0,$$

где $\Gamma_{x(t)}$ — билинейный оператор на $\mathbb{R}^n$, составленный из символов Кристоффеля в точке $\gamma(t)$. Для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ прямая $x(t) = tv$ соответствует геодезической, откуда $\Gamma_0(v, v) = 0$. Так как Γ_0 — симметричный билинейный оператор, отсюда следует, что он равен нулю.

3. Производные метрических коэффициентов выписываются через символы Кристоффеля:

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \nabla_{\partial_k} \partial_j, \partial_i \rangle.$$

Координаты векторов $\nabla_{\partial_k} \partial_i$ и $\nabla_{\partial_k} \partial_j$ суть символы Кристоффеля, поэтому в начале координат они равны нулю. □

Следствие 4.14. *В нормальных координатах, в координатной* r*-окрестности нуля относительное отличие римановой метрики от евклидовой оценивается величиной* $O(r^2)$, *где* $r \to 0$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы, раскладывая g_{ij} по формуле Тейлора, получаем

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2)$$

в координатной r-окрестности нуля. Отсюда следуют искомые оценки. □