

Формула Кошуля:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle$$

Формула первой вариации энергии для вариации кривых  $\{\gamma_s\}$ :

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(\gamma_s) = \langle V, \gamma' \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \frac{\nabla}{dt} \gamma' \rangle dt, \quad \text{где } V(t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma_s(t)$$

Определение тензора кривизны:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Секционная кривизна в двумерном направлении, порожаемом векторами  $X$  и  $Y$ :

$$\text{Sec}_M(X, Y) = \frac{k(X, Y)}{|X \wedge Y|^2} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

Тензор кривизны при постоянной секционной кривизне  $K$ :

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

Формула Гаусса ( $R$  — кривизна подмногообразия,  $\bar{R}$  — кривизна многообразия,  $B$  — вторая форма):

$$\langle R(X, Y)V, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)V, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, V) \rangle - \langle B(Y, W), B(X, V) \rangle$$

Уравнение Якоби ( $Y$  — поле Якоби вдоль  $\gamma$ ):

$$Y'' + R(Y, \gamma')\gamma' = 0.$$

Вторая вариация энергии ( $\{\gamma_s(t)\}$  — вариация геодезической  $\gamma = \gamma_0$ ,  $V = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s$ ,  $V' = \frac{\nabla}{dt} V$ ):

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(\gamma_s) = \langle \frac{\nabla}{ds} \frac{d}{ds} \gamma_s(t), \gamma'(t) \rangle \Big|_{t=a}^b + \int_a^b (|V'|^2 - \langle R(V, \gamma')\gamma', V \rangle) dt$$

Уравнение Рикатти ( $A(t)$  — самосопряженный оператор, соответствующий гессиану дистанционной функции в точке  $\gamma(t)$ ,  $\gamma$  — градиентная линия дистанционной функции):

$$A' + A^2 + R(\cdot, \gamma')\gamma' = 0$$