Инварианты Васильева гладких подмногообразий

С. С. Подкорытов

Фиксируем m-мерное гладкое многообразие V. Пусть Ξ — множество компактных n-мерных подмногообразий многообразия V с редукцией структурной группы нормального расслоения к фиксированной группе Ли с представлением в группе $GL_{m-n}(\mathbf{R})$. Фиксируем класс $\xi \subset \Xi$ вложенной кобордантности таких подмногообразий.

Определение.

Пусть Q — абелева группа. Функционал $f : \xi \to Q$ будем называть инвариантом Васильева порядка не выше d, если его значение не меняется при изотопии и выполнено следующее требование. Выберем произвольные подмногообразие $X \in \xi$, число k, $0 \le k \le n+1$, и набор оснащённых вложений $r_i : D^k \times D^{n-k+1} \to V$, $0 \le i \le d$, с непересекающимися образами таких, что $r_i(D^k \times D^{n-k+1}) \cap X = r_i(\partial D^k \times D^{n-k+1})$, причём на этих пересечениях оснащения согласованы с редукцией. Для каждого подмножества $I \subset \{i : 0 \le i \le d\}$ рассмотрим подмногообразие $X_I \in \xi$, которое получается из подмногообразия X вложенными перестройками вдоль вложений r_i, $i \in I$. Нужно, чтобы тогда выполнялось соотношение

$$\sum_I (-1)^{\# I} f(X_I) = 0.$$

Определение.

Функционал $\varphi : \xi \to \mathbf{Z}_2$ будем называть *разрешающим,* если его значение не меняется при изотопии и меняется при каждой перестройке. Если существует разрешающий функционал, то будем говорить, что класс ξ *разрешим.*

Обозначения.

Для каждого целого $i \ge 0$ определим отображение $\beta_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ формулой

$$\beta_i(x) = \frac{1}{i!} x \cdot \ldots \cdot (x-i+1).$$

Определим отображение $\delta : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}$, полагая $\delta(0)=0$, $\delta(1)=1$.

Утверждение.

Будем предполагать, что многообразие V связно и $m-n>1$.

Случай $n \equiv 0 \pmod 2$. Для любого инварианта Васильева $f : \xi \to Q$ порядка не выше d существует единственный набор элементов $q_i \in Q$, $0 \le i \le d$, такой, что

$$f(X) = \sum_{i=0}^{d} \beta_i([\frac{1}{2}\chi(X)]) q_i, \qquad X \in \xi.$$

Случай $n \equiv 1 \pmod 2$. Если $\varphi : \xi \to \mathbf{Z}_2$ — разрешающий функционал, то для любого инварианта Васильева $f : \xi \to Q$ порядка не выше d существует единственная пара элементов $q_0, q \in Q$, $2^d q = 0$, такая, что

$$f(X) = q_0 + \delta(\varphi(X)) q, \qquad X \in \xi.$$

Если класс ξ неразрешим, то любой инвариант Васильева конечного порядка постоянен.

Определение.

Пусть Q — абелева группа. Будем говорить, что функционал $F : \Xi \to Q$ имеет степень не выше d, если выполнено следующее требование. Выберем произвольный конечный набор пар (a_j, X_j), $a_j \in \mathbf{Z}$, $X_j \in \Xi$, $1 \le j \le N$, такой, что любое множество точек $E \subset V$ такое, что $\#E \le d$, имеет окрестность $U \subset V$ такую, что выполняется формальное соотношение

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(U \cap X_j) = 0.$$

Нужно, чтобы тогда выполнялось соотношение

$$\sum_{j=1}^{N} a_j F(X_j) = 0.$$

Гипотеза.

Если класс ξ разрешим, то существует функционал конечной степени $\Phi : \Xi \to \mathbf{Z}_2$ такой, что его значение не меняется при изотопии и $\Phi|\xi$ — разрешающий функционал.