ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СФЕРЫ В ОДНОСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО С КОНЕЧНО ПОРОЖДЁННЫМИ ГОМОТОПИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ

С. С. Подкорытов (ssp@pdmi.ras.ru)

Доказывается, что гомотопический класс отображения сферы в односвязное клеточное пространство с конечно порождёнными гомотопическими группами полиномиально выражается через индуцированный этим отображением гомоморфизм групп нульмерных сингулярных цепей.

Имеем $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Пунктированным множеством называем множество с отмеченным элементом $*$ (например, абелеву группу — считая, что $* = 0$, — или пунктированное пространство). Для пунктированных множеств T, T' отображение $f\colon T \to T'$ называем *связанным*, если $f(*) = *$. С пунктированным множеством T ассоциирована абелева группа $\langle T \rangle$, порождённая элементами 't', $t \in T$, и определённая соотношением '$*$' $= 0$. Для пунктированных множеств T, T' и связанного отображения $f\colon T \to T'$ определяем гомоморфизм $\langle f \rangle\colon \langle T \rangle \to \langle T' \rangle$, полагая $\langle f \rangle(\text{'}t\text{'}) = \text{'}f(t)\text{'}$, $t \in T$.

Для числа $q \in \mathbb{N}$ и пунктированного пространства X: пусть $\Pi_q X$ — пунктированное множество непрерывных связанных отображений $a\colon S^q \to X$ ($*(S^q) = \{*\}$), для отображения $a \in \Pi_q X$ пусть $[a] \in \pi_q X$ — его гомотопический класс; пусть $\Psi_q X = \operatorname{Hom}(\langle S^q \rangle, \langle X \rangle)$.

Эквивалентностью называем слабую гомотопическую эквивалентность. Пространство X называем *допустимым*, если существуют клеточное пространство Y и эквивалентность $h\colon X \to Y$.

1. Теорема. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и односвязное допустимое пунктированное пространство X. Предположим, что группы $\pi_q X$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены. Для $r \in \mathbb{N}$ пусть $Q_r \subset (\Psi_m X)^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $\langle a \rangle^{\otimes r}$, $a \in \Pi_m X$. Тогда для любого достаточно большого $r \in \mathbb{N}$ существует такой гомоморфизм $l\colon Q_r \to \pi_m X$, что $l(\langle a \rangle^{\otimes r}) = [a]$, $a \in \Pi_m X$.*

Обсуждение. Условие конечной порождённости кажется лишним. Покажем, что условие односвязности существенно (при $m > 1$). (Может быть, достаточно гомотопической простоты.) Ниже используется действие фундаментальной группы пунктированного пространства на его старших гомотопических группах.

Работа частично поддержана РФФИ, грант 01-01-01014-А.

Возьмём отображения $p \in \Pi_1 X$, $q \in \Pi_m X$. Пусть $p_0 = * \in \Pi_1 X$, $p_1 = p$. Возьмём произвольное $r \in \mathbb{N}$. Пусть

$$B = \Big(\bigvee_{s=0}^{r} S^1\Big) \vee S^m, \qquad A_{e_0 \dots e_r} = \Big(\bigvee_{s=0}^{r} p_{e_s}\Big) \vee q \colon B \to X, \quad e_0, \dots, e_r = 0, 1.$$

Пусть $j_0, \dots, j_r \in \Pi_1 B$, $k \in \Pi_m B$ — канонические вложения, $h \in \Pi_m B$ — отображение с $[h] = [j_0] \dots [j_r][k]$,

$$a_{e_0 \dots e_r} = A_{e_0 \dots e_r} \circ h \in \Pi_m X, \qquad e_0, \dots, e_r = 0, 1.$$

Легко видеть, что есть такие гомоморфизмы $V_0, \dots, V_r, W \colon \langle B \rangle \to \langle X \rangle$, что

$$\langle A_{e_0 \dots e_r} \rangle = e_0 V_0 + \dots + e_r V_r + W, \qquad e_0, \dots, e_r = 0, 1.$$

Пусть $v_s = V_s \circ \langle h \rangle \in \Psi_m X$, $s = 0, \dots, r$, $w = W \circ \langle h \rangle \in \Psi_m X$. Имеем

$$\langle a_{e_0 \dots e_r} \rangle = e_0 v_0 + \dots + e_r v_r + w, \qquad e_0, \dots, e_r = 0, 1.$$

Значит, как нетрудно видеть,

$$\sum_{e_0, \dots, e_r = 0, 1} (-1)^{e_0 + \dots + e_r} \langle a_{e_0 \dots e_r} \rangle^{\otimes r} = 0.$$

Если существует искомый гомоморфизм, то

$$\sum_{e_0, \dots, e_r = 0, 1} (-1)^{e_0 + \dots + e_r} [a_{e_0 \dots e_r}] = 0.$$

Легко видеть, что

$$[a_{e_0 \dots e_r}] = [p]^{e_0 + \dots + e_r} [q], \qquad e_0, \dots, e_r = 0, 1.$$

Предположим, что отображения p, q выбраны так, что $[p]^t [q] = (-1)^t [q]$, $t \in \mathbb{Z}$, и элемент $[q]$ имеет бесконечный порядок (так бывает, например, если m чётно и $X = \mathbb{R}P^m$). Тогда

$$\sum_{e_0, \dots, e_r = 0, 1} (-1)^{e_0 + \dots + e_r} [a_{e_0 \dots e_r}] = 2^{r+1} [q] \neq 0.$$

План доказательства. Доказательство состоит из примарной и рациональной частей, соответственно строению группы $\pi_m X$ (см. §14). В примарной части пространство X заменяется на пространство с примарными конечными гомотопическими группами (§9) и используется схема метода Серра: гомотопические группы младше m-й постепенно уничтожаются, а к m-й затем применяется теорема Гуревича (§8). В рациональной части делается переход от пространства X к его пространству петель, где, по теореме Картана — Серра, рациональный гомотопический класс сфероида определяется его гомологическим классом (точнее, вместо пространства петель используется одна модель его кратной надстройки, вариант конструкции “кобар”, см. §§12, 13).

Благодарности. Постановка задачи из разговора с М. Н. Гусаровым; доказательство в общих чертах следует рассуждению из его рукописи “Аксиоматическая теория кубиковых пространств”. Разные вопросы было приятно обсуждать с О. Я. Виро, М. Ю. Звагельским, Н. Е. Мнёвым, Н. Ю. Нецветаевым, И. А. Паниным.

Основные отображения. Пусть даны число $q \in \mathbb{N}$ и пунктированное пространство X. Отображения $J\colon \Pi_q X \to \Psi_q X$, $J(a) = \langle a \rangle$, и $P\colon \Pi_q X \to \pi_q X$, $P(a) = [a]$, называем *основными*.

Индуцированные отображения. Пусть даны число $q \in \mathbb{N}$, пунктированные пространства X, X' и непрерывное связанное отображение $f\colon X \to X'$. Пусть $H_q f\colon H_q X \to H_q X'$, $\pi_q f\colon \pi_q X \to \pi_q X'$, $\Pi_q f\colon \Pi_q X \to \Pi_q X'$, $\Psi_q f\colon \Psi_q X \to \Psi_q X'$ — отображения, индуцированные отображением f (полагаем $(\Pi_q f)(a) = f \circ a$, $a \in \Pi_q X$, и $(\Psi_q f)(w) = \langle f \rangle \circ w$, $w \in \Psi_q X$).

Ещё функторы. Пусть дано число $q \in \mathbb{N}$. Для пунктированного множества T пусть $\Phi_q T$ — пунктированное множество всех связанных отображений $A\colon S^q \to T$ $(*(S^q) = \{*\})$. Для пунктированных множеств T, T' и связанного отображения $f\colon T \to T'$ определяем связанное отображение $\Phi_q f\colon \Phi_q T \to \Phi_q T'$, полагая $(\Phi_q f)(A) = f \circ A$. Для абелевой группы U множество $\Phi_q U$ — абелева группа.

Свободные абелевы группы. С множеством T ассоциирована абелева группа $\langle \underline{T} \rangle$, свободно порождённая элементами ‘$\underline{t}$’, $t \in T$. Для множества T определим гомоморфизм $\langle \underline{T} \rangle \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \overline{x}$, полагая $\overline{‘\underline{t}’} = 1$, $t \in T$. Для множеств T, T' и отображения $f\colon T \to T'$ определяем гомоморфизм $\langle \underline{f} \rangle\colon \langle \underline{T} \rangle \to \langle \underline{T'} \rangle$, полагая $\langle \underline{f} \rangle(‘\underline{t}’) = ‘\underline{f(t)}’$, $t \in T$.

Приведение по модулю. Пусть дано число $q \in \mathbb{N}_+$. Для абелевой группы U пусть $U/q = U \otimes \mathbb{Z}_q$, для $u \in U$ пусть $u|_q = u \otimes 1 \in U/q$. Для абелевых групп U, V и гомоморфизма $h\colon U \to V$ пусть $h/q\colon U/q \to V/q$ — гомоморфизм, определённый условием $(h/q)(u|_q) = h(u)|_q$, $u \in U$.

p-специальные абелевы группы. Абелеву группу называем *p-специальной*, где p — простое число, если она конечна и её порядок — степень числа p.

Возрастающие отображения. Под *возрастающим* отображением понимаем нестрого возрастающее.

Симплициальные объекты и морфизмы. Для $q \in \mathbb{N}$ имеем $[q] = \{0, \ldots, q\}$. Для простого числа p *симплициальная p-специальная абелева группа* — такая симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, что абелевы группы $\boldsymbol{U}_q$, $q \in \mathbb{N}$, p-специальны. *Симплициальное пунктированное множество* и *симплициальное связанное отображение* — симплициальный объект и симплициальный морфизм (соответственно) категории пунктированных множеств и связанных отображений (симплициальное пунктированное множество — то же, что пунктированное симплициальное множество; его геометрическая реализация — пунктированное пространство; то же для симплициальных связанных отображений). *Симплициальное конечное множество* — такое симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, что множества $\boldsymbol{T}_q$, $q \in \mathbb{N}$, конечны. Аналогично понимаем *симплициальное конечное пунктированное множество.* Для симплициальных пунктированных множеств $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}'$ симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}'$ называем *вложением*, если отображения $\boldsymbol{f}_q$, $q \in \mathbb{N}$, инъективны.

Удобные пространства и т. п. *Удобным пространством* называем реализацию симплициального счётного множества. Аналогично понимаем *удобное отображение*, *удобную пару* и т. д.

Куб и симплекс. Пусть дано число $r \in \mathbb{N}$. Имеем $I = [0,1]$, $I^r = I^{\times r}$. Очевидным образом отождествляем: $I^p \times I^q = I^{p+q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$, $I^1 = I$. Имеем $\Delta^r = \{\, (z_1, \ldots, z_r) \in I^{\times r} : z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_r \,\}$. Для $t = (t_1, \ldots, t_r) \in I^r$ пусть $t^{\triangle} = (z_1, \ldots, z_r) \in \Delta^r$, где $z_s = t_s \ldots t_r$, $s = 1, \ldots, r$.

Сфера. Пусть дано число $r \in \mathbb{N}$. Имеем $S^r = I^r / \partial I^r$. О проекции $I^r \to S^r$ пишем: $t \mapsto t^\circ$ $(t \in I^r)$.

Надстройка. Пусть даны число $r \in \mathbb{N}$ и пунктированное пространство X. Имеем $S^r X = I^r \times X / (\partial I^r \times X \cup I^r \times \{*\})$. О проекции $I^r \times X \to S^r X$ пишем: $(t, x) \mapsto t^\circ x$ $(t \in I^r$, $x \in X)$. Пусть дано число $q \in \mathbb{N}_+$. Определим отображение $Z^r \colon \Pi_q X \to \Pi_{q+r} X$ (которое называем *преобразованием надстройки*), полагая $Z^r(a)((t,s)^\circ) = t^\circ a(s^\circ)$, $t \in I^r$, $s \in I^q$, $a \in \Pi_q X$. Гомоморфизм надстройки $z^r \colon \pi_q X \to \pi_{q+r} X$ определяется условием $z^r([a]) = [Z^r(a)]$, $a \in \Pi_q X$.

Пространства путей и петель. Для пространства X пусть ΓX — пространство путей $u : I \to X$. Для пространств X, X' и непрерывного отображения $f \colon X \to X'$ определяем отображение $\Gamma f \colon \Gamma X \to \Gamma X'$, полагая $(\Gamma f)(u) = f \circ u$, $u \in \Gamma X$. Для пунктированного пространства X имеем $\Omega X \subset \Gamma X$.

Безымянные стрелки. Пусть даны пунктированное пространство X и число $q \in \mathbb{N}_+$. Определим отображение $D \colon \Pi_{q+1} X \to \Pi_q \Omega X$ (которое называем *безымянной биекцией*), полагая $D(a)(s^\circ)(t) = a((t,s)^\circ)$, $t \in I$, $s \in I^q$, $a \in \Pi_{q+1} X$. Определим *безымянный изоморфизм* $d \colon \pi_{q+1} X \to \pi_q \Omega X$, полагая $d([a]) = [D(a)]$, $a \in \Pi_{q+1} X$.

Слабая непрерывность. Для топологических пространств X, Y отображение $f \colon X \to Y$ называем *слабо непрерывным*, если для любых компактного хаусдорфова пространства T и непрерывного отображения $k \colon T \to X$ отображение $f \circ k$ непрерывно.

2. Сравнение отображений множества в абелевы группы

В этом параграфе вводятся отношения полиномиальной зависимости между отображениями множества в абелевы группы и даются свойства этих отношений.

Обозначения. Пусть даны множество T, абелева группа U и отображение $e \colon T \to U$. Определим гомоморфизм $e^+ \colon \langle \underline{T} \rangle \to U$, полагая $e^+(`\underline{t}') = e(t)$, $t \in T$. Для $t \in T$ пусть $t^e = \{\, x \in \langle \underline{T} \rangle : \overline{x} = 1,\, e^+(x) = e(t) \,\}$. Для $r \in \mathbb{N}$ пусть $[\![e]\!]_r \subset \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $x^{\otimes r}$, $x \in t^e$, $t \in T$.

Определение. Пусть даны множество T, абелевы группы U, V и отображения $e \colon T \to U$, $f \colon T \to V$. Для $r \in \mathbb{N}$ пишем $e \xrightarrow{r} f$, если существует такой гомоморфизм $k \colon [\![e]\!]_r \to V$, что $k(x^{\otimes r}) = f(t)$, $x \in t^e$, $t \in T$. Пишем $e \to f$, если существует такое $r \in \mathbb{N}$, что $e \xrightarrow{r} f$.

2.1. Лемма. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, отображения $e \colon T \to U$, $f \colon T \to V$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что $e \xrightarrow{r} f$. Тогда $e \xrightarrow{r+1} f$.*

Доказательство. Так как $e \xrightarrow{r} f$, то есть такой гомоморфизм $k \colon [\![e]\!]_r \to V$, что $k(x^{\otimes r}) = f(t)$, $x \in t^e$, $t \in T$. Определим гомоморфизм $L \colon \langle \underline{T} \rangle \otimes [\![e]\!]_r \to V$, полагая $L(x \otimes z) = \overline{x} k(z)$, $x \in \langle \underline{T} \rangle$, $z \in [\![e]\!]_r$. Имеем $\langle \underline{T} \rangle \otimes [\![e]\!]_r \subset \langle \underline{T} \rangle \otimes \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r} =$

$\langle \underline{T}\rangle^{\otimes(r+1)}$. Для $t\in T$ и $x\in t^e$ имеем $L(x^{\otimes(r+1)})=\overline{x}k(x^{\otimes r})=f(t)$, так как $\overline{x}=1$, $k(x^{\otimes r})=f(t)$. Значит, $e \xrightarrow{r+1}\!\!\rhd f$. $\square$

2.2. Лемма. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, отображение $e\colon T\to U$ и гомоморфизм $h\colon U\to V$. Тогда: а) $e \xrightarrow{1}\!\!\rhd h\circ e$; б) если h — мономорфизм, то $h\circ e \xrightarrow{1}\!\!\rhd e$.*

Доказательство. Имеем $[\![e]\!]_1\subset\langle \underline{T}\rangle^{\otimes 1}=\langle \underline{T}\rangle$. Пусть $k\colon [\![e]\!]_1\to U$ — сужение гомоморфизма e^+. Для $t\in T$, $x\in t^e$ имеем $k(x^{\otimes 1})=e^+(x)=e(t)$. (Значит, $e \xrightarrow{1}\!\!\rhd e$.) Гомоморфизм $h\circ k\colon [\![e]\!]_1\to V$ даёт $e \xrightarrow{1}\!\!\rhd h\circ e$. Если h — мономорфизм, то, как легко проверить, $[\![h\circ e]\!]_1=[\![e]\!]_1$, и гомоморфизм $k\colon [\![h\circ e]\!]_1\to U$ даёт $h\circ e \xrightarrow{1}\!\!\rhd e$. $\square$

2.3. Лемма. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, W, отображения $e\colon T\to U$, $f\colon T\to V$, $g\colon T\to W$ и числа $r,s\in\mathbb{N}$. Предположим, что $e \xrightarrow{r}\!\!\rhd f$ и $f \xrightarrow{s}\!\!\rhd g$. Тогда $e \xrightarrow{rs}\!\!\rhd g$.*

Доказательство. Так как $e \xrightarrow{r}\!\!\rhd f$, то есть такой гомоморфизм $k\colon [\![e]\!]_r\to V$, что $k(x^{\otimes r})=f(t)$, $x\in t^e$, $t\in T$. Так как $f \xrightarrow{s}\!\!\rhd g$, то есть такой гомоморфизм $l\colon [\![f]\!]_s\to W$, что $l(y^{\otimes s})=g(t)$, $y\in t^f$, $t\in T$.

Определим гомоморфизм $c\colon\langle \underline{T}\rangle\to\mathbb{Z}$, полагая $c(x)=\overline{x}$, $x\in\langle \underline{T}\rangle$. Имеем гомоморфизм $c^{\otimes r}\colon\langle \underline{T}\rangle^{\otimes r}\to\mathbb{Z}^{\otimes r}=\mathbb{Z}$. Определим гомоморфизм $h\colon [\![e]\!]_r\to\mathbb{Z}\oplus V$, полагая $h(z)=(c^{\otimes r}(z),k(z))$, $z\in[\![e]\!]_r$. Определим гомоморфизм $F\colon\langle \underline{T}\rangle\to\mathbb{Z}\oplus V$, полагая $F(x)=(\overline{x},f^+(x))$, $x\in\langle \underline{T}\rangle$. Для $t\in T$ и $x\in t^e$ имеем $h(x^{\otimes r})=(1,f(t))=F(‘\underline{t}’)$. Значит, $\operatorname{im}h\subset\operatorname{im}F$. Так как абелева группа $[\![e]\!]_r$ свободна (как подгруппа свободной абелевой группы $\langle \underline{T}\rangle^{\otimes r}$), то есть такой гомоморфизм $b\colon [\![e]\!]_r\to\langle \underline{T}\rangle$, что $F\circ b=h$. Для $t\in T$ и $x\in t^e$ имеем $b(x^{\otimes r})\in t^f$, так как $F(b(x^{\otimes r}))=h(x^{\otimes r})=(1,f(t))$.

Имеем $[\![e]\!]_r^{\otimes s}\subset(\langle \underline{T}\rangle^{\otimes r})^{\otimes s}=\langle \underline{T}\rangle^{\otimes(rs)}$. Имеем гомоморфизм $b^{\otimes s}\colon [\![e]\!]_r^{\otimes s}\to\langle \underline{T}\rangle^{\otimes s}$. Ясно, что $[\![e]\!]_{rs}\subset[\![e]\!]_r^{\otimes s}$. Имеем $b^{\otimes s}([\![e]\!]_{rs})\subset[\![f]\!]_s$, так как для $t\in T$ и $x\in t^e$ имеем $b^{\otimes s}(x^{\otimes(rs)})=b(x^{\otimes r})^{\otimes s}\in[\![f]\!]_s$, так как $b(x^{\otimes r})\in t^f$. Определим гомоморфизм $m\colon [\![e]\!]_{rs}\to W$, полагая $m(Z)=l(b^{\otimes s}(Z))$, $Z\in[\![e]\!]_{rs}$. Для $t\in T$, $x\in t^e$ имеем $m(x^{\otimes(rs)})=l(b^{\otimes s}(x^{\otimes(rs)}))=l(b(x^{\otimes r})^{\otimes s})=g(t)$, так как $b(x^{\otimes r})\in t^f$. Значит, $e \xrightarrow{rs}\!\!\rhd f$. $\square$

2.4. Лемма. *Пусть даны множества T, Z, абелевы группы U, V, отображения $g\colon Z\to T$, $e\colon T\to U$, $f\colon T\to V$ и число $r\in\mathbb{N}$. Предположим, что $e \xrightarrow{r}\!\!\rhd f$. Тогда $e\circ g \xrightarrow{r}\!\!\rhd f\circ g$.*

Доказательство. Так как $e \xrightarrow{r}\!\!\rhd f$, то есть такой гомоморфизм $k\colon [\![e]\!]_r\to V$, что $k(x^{\otimes r})=f(t)$, $x\in t^e$, $t\in T$. Для $z\in Z$ и $y\in z^{e\circ g}$ имеем $\langle \underline{g}\rangle(y)\in g(z)^e$. Имеем гомоморфизм $\langle \underline{g}\rangle^{\otimes r}\colon\langle \underline{Z}\rangle^{\otimes r}\to\langle \underline{T}\rangle^{\otimes r}$. Имеем $\langle \underline{g}\rangle^{\otimes r}([\![e\circ g]\!]_r)\subset[\![e]\!]_r$, так как для $z\in Z$ и $y\in z^{e\circ g}$ имеем $\langle \underline{g}\rangle^{\otimes r}(y^{\otimes r})=\langle \underline{g}\rangle(y)^{\otimes r}\in[\![e]\!]_r$, так как $\langle \underline{g}\rangle(y)\in g(z)^e$. Определим гомоморфизм $l\colon [\![e\circ g]\!]_r\to V$, полагая $l(w)=k(\langle \underline{g}\rangle^{\otimes r}(w))$, $w\in[\![e\circ g]\!]_r$. Для $z\in Z$ и $y\in z^{e\circ g}$ имеем $l(y^{\otimes r})=k(\langle \underline{g}\rangle^{\otimes r}(y^{\otimes r}))=k(\langle \underline{g}\rangle(y)^{\otimes r})=f(g(z))$, так как $\langle \underline{g}\rangle(y)\in g(z)^e$. Значит, $e\circ g \xrightarrow{r}\!\!\rhd f\circ g$. $\square$

2.5. Лемма. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, отображения $e\colon T\to U$, $f\colon T\to V$ и число $r\in\mathbb{N}$. Предположим, что для любого конечного множества $D\subset T$ имеем $e|_D \xrightarrow{r}\!\!\rhd f|_D$. Тогда $e \xrightarrow{r}\!\!\rhd f$.*

Доказательство. Надо показать, что существует такой гомоморфизм $k\colon [\![e]\!]_r\to V$, что $k(x^{\otimes r})=f(t)$, $x\in t^e$, $t\in T$. Возьмём произвольные число $n\in\mathbb{N}$ и элементы $t_i \in T$, $x_i \in t_i^e$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $P \subset \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $x_i^{\otimes r}$, $i = 1, \ldots, n$. Достаточно показать, что существует такой гомоморфизм $k' \colon P \to V$, что $k'(x_i^{\otimes r}) = f(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Есть такое конечное множество $D \subset T$, что $t_i \in D$, $x_i \in \langle \underline{D} \rangle$ $(\subset \langle \underline{T} \rangle)$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем $P \subset \langle \underline{D} \rangle^{\otimes r} \subset \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r}$. Существование нужного гомоморфизма k' следует из того, что $e|_D \overset{r}{-\!\!\rhd} f|_D$. $\square$

2.6. Лемма. *Пусть даны множества J, T, абелевы группы U, V_j, $j \in J$, отображения $e \colon T \to U$, $f_j \colon T \to V_j$, $j \in J$, и число $r \in \mathbb{N}$. Пусть*

$$f = \prod_{j \in J} f_j \colon T \to \prod_{j \in J} V_j.$$

Предположим, что $e \overset{r}{-\!\!\rhd} f_j$, $j \in J$. Тогда $e \overset{r}{-\!\!\rhd} f$. $\square$

2.7. Лемма. *Пусть даны множество J, множества T_j, абелевы группы U_j, V_j, отображения $e_j \colon T_j \to U_j$, $f_j \colon T_j \to V_j$, $j \in J$, и число $r \in \mathbb{N}$. Пусть*

$$E = (e_j)_{j \in J} \colon \prod_{j \in J} T_j \to \prod_{j \in J} U_j, \qquad F = (f_j)_{j \in J} \colon \prod_{j \in J} T_j \to \prod_{j \in J} V_j.$$

Предположим, что $e_j \overset{r}{-\!\!\rhd} f_j$, $j \in J$. Тогда $E \overset{r}{-\!\!\rhd} F$.

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $i \in J$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j \in J} U_j \arrow[d, "p'"'] & \prod_{j \in J} T_j \arrow[l, "E"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & \prod_{j \in J} V_j \arrow[d, "p''"'] \\
U_i & T_i \arrow[l, "e_i"'] \arrow[r, "f_i"] & V_i
\end{tikzcd}$$

где p, p', p'' — проекции. По лемме 2.6, достаточно показать, что $E \overset{r}{-\!\!\rhd} p'' \circ F$. По п. а) леммы 2.2, $E \overset{1}{-\!\!\rhd} p' \circ E = e_i \circ p$. Так как $e_i \overset{r}{-\!\!\rhd} f_i$, то, по лемме 2.4, $e_i \circ p \overset{r}{-\!\!\rhd} f_i \circ p = p'' \circ F$. Таким образом, по лемме 2.3, $E \overset{r}{-\!\!\rhd} p'' \circ F$. $\square$

2.8. Лемма. *Пусть даны абелева группа U и число $r \in \mathbb{N}$. Определим отображение $R \colon U \to U^{\otimes r}$, полагая $R(u) = u^{\otimes r}$, $u \in U$. Тогда* $\mathrm{id} \overset{r}{-\!\!\rhd} R$.

Доказательство. Имеем гомоморфизм $(\mathrm{id}^+)^{\otimes r} \colon \langle \underline{U} \rangle^{\otimes r} \to U^{\otimes r}$. Для $u \in U$ и $x \in u^{\mathrm{id}} \subset \langle \underline{U} \rangle$ имеем $(\mathrm{id}^+)^{\otimes r}(x^{\otimes r}) = \mathrm{id}^+(x)^{\otimes r} = u^{\otimes r} = R(u)$. Значит, $\mathrm{id} \overset{r}{-\!\!\rhd} R$. $\square$

2.9. Утверждение. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, отображения $e \colon T \to U$, $f \colon T \to V$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что* $\operatorname{Tors} U = 0$ *и $e \overset{r}{-\!\!\rhd} f$. Пусть $Q \subset (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $(1, e(t))^{\otimes r}$, $t \in T$. Тогда существует такой гомоморфизм $l \colon Q \to V$, что $l((1, e(t))^{\otimes r}) = f(t)$, $t \in T$.*

Доказательство. Так как $e \overset{r}{-\!\!\rhd} f$, то есть такой гомоморфизм $k \colon \llbracket e \rrbracket_r \to V$, что $k(x^{\otimes r}) = f(t)$, $x \in t^e$, $t \in T$. Определим гомоморфизм $E \colon \langle \underline{T} \rangle \to \mathbb{Z} \oplus U$, полагая $E(‘\underline{t}’) = (1, e(t))$, $t \in T$. Имеем гомоморфизм $E^{\otimes r} \colon \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r} \to (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}$. Имеем $E^{\otimes r}(\llbracket e \rrbracket_r) = Q$, так как для $t \in T$ и $x \in t^e$ (в частности, для $x = ‘\underline{t}’$) имеем

$E^{\otimes r}(x^{\otimes r}) = E(x)^{\otimes r} = E(`\underline{t}')^{\otimes r} = (1, e(t))^{\otimes r}$. Достаточно показать, что есть такой гомоморфизм $l\colon Q \to V$, что $l(E^{\otimes r}(z)) = k(z)$, $z \in [\![e]\!]_r$. Действительно, тогда для $t \in T$ будем иметь $l((1, e(t))^{\otimes r}) = l(E(`\underline{t}')^{\otimes r}) = l(E^{\otimes r}(`\underline{t}'^{\otimes r})) = k(`\underline{t}'^{\otimes r}) = f(t)$, что и требуется. Достаточно показать, что $[\![e]\!]_r \cap \ker E^{\otimes r} \subset \ker k$. Возьмём произвольный элемент $z \in [\![e]\!]_r \cap \ker E^{\otimes r}$. Покажем, что $z \in \ker k$. Так как $z \in [\![e]\!]_r$, то есть такие число $n \in \mathbb{N}$, числа $a_i \in \mathbb{Z}$ и элементы $t_i \in T$, $x_i \in t_i^e$, $i = 1, \ldots, n$, что

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\otimes r}.$$

Пусть $B \subset \mathbb{Z} \oplus U$ — подгруппа, порождённая элементами $E(`\underline{t_i}')$, $i = 1, \ldots, n$. Она свободна, так как $\operatorname{Tors} U = 0$. Поэтому есть такой гомоморфизм $d\colon B \to \langle \underline{T} \rangle$, что $E(d(b)) = b$, $b \in B$. Пусть $y_i = d(E(`\underline{t_i}'))$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем $y_i \in t_i^e$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем $B^{\otimes r} \subset (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}$ и гомоморфизм $d^{\otimes r}\colon B^{\otimes r} \to \langle \underline{T} \rangle^{\otimes r}$. Так как $y_i = d(E(`\underline{t_i}')) = d(E(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, то $y_i^{\otimes r} = d(E(x_i))^{\otimes r} = d^{\otimes r}(E^{\otimes r}(x_i^{\otimes r}))$, $i = 1, \ldots, n$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i^{\otimes r} = \sum_{i=1}^{n} a_i d^{\otimes r}(E^{\otimes r}(x_i^{\otimes r})) = d^{\otimes r}(E^{\otimes r}(z)) = 0,$$

так как $z \in \ker E^{\otimes r}$. Так как $k(x_i^{\otimes r}) = f(t) = k(y_i^{\otimes r})$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$k(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i k(x_i^{\otimes r}) = \sum_{i=1}^{n} a_i k(y_i^{\otimes r}) = 0. \qquad \square$$

2.10. Лемма. *Пусть даны множество T, абелевы группы U, V, отображения $e\colon T \to U$, $f\colon T \to V$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что* $\operatorname{Tors} U = 0$ *и* $e \overset{r}{\rightarrowtriangle} f$. *Пусть*

$$P \subset \bigoplus_{s=0}^{r} U^{\otimes s}$$

— подгруппа, порождённая элементами $(e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}$, $t \in T$. Тогда существует такой гомоморфизм $k\colon P \to V$, что $k((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = f(t)$, $t \in T$.

Доказательство. Пусть $Q \subset (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $(1, e(t))^{\otimes r}$, $t \in T$. Так как $\operatorname{Tors} U = 0$ и $e \overset{r}{\rightarrowtriangle} f$, то, по утверждению 2.9, есть такой гомоморфизм $l\colon Q \to V$, что $l((1, e(t))^{\otimes r}) = f(t)$, $t \in T$.

Пусть $i = (1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus U$, $j\colon U \to \mathbb{Z} \oplus U$ — каноническое вложение. Для $s = 0, \ldots, r$ определим гомоморфизм $g_s\colon U^{\otimes s} \to (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}$, для $u_1, \ldots, u_s \in U$ полагая

$$g_s(u_1 \otimes \ldots \otimes u_s) = \sum_{\substack{t_0, \ldots, t_s \in \mathbb{N}: \\ t_0 + \ldots + t_s = r - s}} i^{\otimes t_0} \otimes j(u_1) \otimes i^{\otimes t_1} \otimes \ldots \otimes j(u_s) \otimes i^{\otimes t_s}.$$

Пусть

$$G = \bigoplus_{s=0}^{r} g_s\colon \bigoplus_{s=0}^{r} U^{\otimes s} \to (\mathbb{Z} \oplus U)^{\otimes r}.$$

Легко видеть, что $G((u^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = (1, u)^{\otimes r}$, $u \in U$. В частности, $G((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = (1, e(t))^{\otimes r}$, $t \in T$. Поэтому $G(P) = Q$. Положим $k(z) = l(G(z))$, $z \in P$. Для $t \in T$ имеем $k((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = l(G((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r})) = l((1, e(t))^{\otimes r}) = f(t)$. $\square$

2.11. Следствие. *Пусть даны пунктированное множество T, абелевы группы U, V, связанные отображения $e\colon T \to U$, $f\colon T \to V$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что* $\operatorname{Tors} U = 0$ *и* $e \overset{r}{\rhd} f$. *Пусть*

$$P \subset \bigoplus_{s=1}^{r} U^{\otimes s}$$

— подгруппа, порождённая элементами $(e(t)^{\otimes s})_{s=1}^{r}$, $t \in T$. Тогда существует такой гомоморфизм $k\colon P \to V$, что $k((e(t)^{\otimes s})_{s=1}^{r}) = f(t)$, $t \in T$.

Доказательство. Пусть

$$P' \subset \bigoplus_{s=0}^{r} U^{\otimes s}$$

— подгруппа, порождённая элементами $(e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}$, $t \in T$. Так как $\operatorname{Tors} U = 0$ и $e \overset{r}{\rhd} f$, то, по лемме 2.10, есть такой гомоморфизм $k'\colon P' \to V$, что $k'((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = f(t)$, $t \in T$. Пусть

$$q\colon \bigoplus_{s=0}^{r} U^{\otimes s} \to \bigoplus_{s=1}^{r} U^{\otimes s}$$

— проекция. Ясно, что $q(P') = P$. Пусть

$$i = (1, 0, \dots, 0) \in \bigoplus_{s=0}^{r} U^{\otimes s}.$$

Имеем $i = (0^{\otimes s})_{s=0}^{r} = (e(*)^{\otimes s})_{s=0}^{r}$. Поэтому $k'(i) = f(*) = 0$. Так как элемент i порождает подгруппу $\ker q$, то есть такой гомоморфизм $k\colon P \to V$, что $k(q(z)) = k'(z)$, $z \in P'$. Для $t \in T$ имеем $k((e(t)^{\otimes s})_{s=1}^{r}) = k(q((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r})) = k'((e(t)^{\otimes s})_{s=0}^{r}) = f(t)$. $\square$

3. Сравнение отображений в p-специальные абелевы группы

Цель этого параграфа — лемма 3.5.

Обозначения. Для числа $q \in \mathbb{Z}$, абелевой группы U и элемента $u \in U$ пусть

$$|q\backslash_U u| = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in qU, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $q, z \in \mathbb{Z}$ пусть $|q\backslash z| = |q\backslash_{\mathbb{Z}} z|$.

3.1. Лемма. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$ и число $z \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$\binom{z-1}{p^m-1} \equiv |p^m\backslash z| \pmod p.$$

Доказательство. Если $z \not\equiv 0 \pmod{p^m}$, то это следует из теоремы Куммера о биномиальных коэффициентах (см. [2, приложение 3]). Иначе воспользуемся равенством

$$\binom{z-1}{p^m-1} = \sum_{k=0}^{p^m-1} (-1)^{p^m-1-k} \binom{z}{k}.$$

При $z \equiv 0 \pmod{p^m}$ имеем

$$\binom{z}{k} \equiv 0 \pmod p, \qquad k = 1, \dots, p^m - 1$$

(по теореме Куммера), что и даёт требуемое. $\square$

3.2. Лемма. *Пусть даны простое число p, число $k \in \mathbb{N}_+$ и числа $x, y \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $x \equiv y \pmod{p^k}$. Тогда $x^p \equiv y^p \pmod{p^{k+1}}$.*

Доказательство. Пусть $t = x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1}$. Все слагаемые сравнимы по модулю p, их p штук, поэтому $t \equiv 0 \pmod{p}$. Имеем $x^p - y^p = t(x-y) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, так как $x - y \equiv 0 \pmod{p^k}$. $\square$

3.3. Следствие. *Пусть даны простое число p, число $n \in \mathbb{N}_+$ и числа $x, y \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $x \equiv y \pmod{p}$. Тогда*

$$x^{p^{n-1}} \equiv y^{p^{n-1}} \pmod{p^n}.$$

Это следует из леммы 3.2. $\square$

3.4. Лемма. *Пусть даны простое число p, числа $m, n \in \mathbb{N}_+$ и число $z \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$\binom{z-1}{p^m-1}^{p^{n-1}} \equiv |p^m \backslash z| \pmod{p^n}.$$

Это следует из леммы 3.1 и следствия 3.3. $\square$

3.5. Лемма. *Пусть даны простое число p, конечное множество T, p-специальные абелевы группы U, V и отображения $e\colon T \to U$, $f\colon T \to V$. Предположим, что отображение e инъективно. Тогда $e \mathrel{\triangleright} f$.*

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}_+$ — такие числа, что $p^m U = 0$, $p^n V = 0$. Пусть $q = p^m - 1$, $r = p^{n-1}$. Пусть s — число элементов множества T. Считаем, что $T = \{1, \ldots, s\}$. Пусть $E = \{\, x \in \langle \underline{T} \rangle : \overline{x} = 1 \,\}$.

Для $k \in \mathbb{N}_+$ определим гомоморфизм $b_k\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, полагая $b_k(v, z) = z/k - v$, $v, z \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$b = \bigotimes_{k=1}^{q} b_k\colon (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^{\otimes q} \to \mathbb{Q}^{\otimes q} = \mathbb{Q}.$$

Для $z \in \mathbb{Z}$ имеем

$$b((1, z)^{\otimes q}) = \prod_{k=1}^{q} \Big(\frac{z}{k} - 1\Big) = \binom{z-1}{q}.$$

Пусть $B = b^{\otimes r}\colon (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^{\otimes (qr)} = ((\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^{\otimes q})^{\otimes r} \to \mathbb{Q}^{\otimes r} = \mathbb{Q}$. Для $z \in \mathbb{Z}$ имеем

$$B((1, z)^{\otimes (qr)}) = \binom{z-1}{q}^{r} \equiv |p^m \backslash z| \pmod{p^n},$$

по лемме 3.4.

Для $t \in T$ определим гомоморфизм $c^t\colon \langle \underline{T} \rangle \to \mathbb{Z}$, полагая $c^t(‘\underline{t}’) = 1$ и $c^t(‘\underline{z}’) = 0$, $z \in T \setminus \{t\}$. Для $a \in E$, $t \in T$ определим гомоморфизм $l_a^t\colon \langle \underline{T} \rangle \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, полагая $l_a^t(x) = (\overline{x}, c^t(x) - c^t(a)\overline{x})$, $x \in \langle \underline{T} \rangle$, и положим $D_a^t = B \circ (l_a^t)^{\otimes (qr)}\colon \langle \underline{T} \rangle^{\otimes (qr)} \to \mathbb{Q}$. Для $a \in E$, $t \in T$, $x \in E$ имеем $D_a^t(x^{\otimes (qr)}) = B((l_a^t)^{\otimes (qr)}(x^{\otimes (qr)})) = B(l_a^t(x)^{\otimes (qr)}) = B((1, c^t(x) - c^t(a))^{\otimes (qr)}) \in |p^m \backslash c^t(x) - c^t(a)| + p^n \mathbb{Z}$. Для $a \in E$ пусть

$$D_a = \bigotimes_{t=1}^{s} D_a^t\colon \langle \underline{T} \rangle^{\otimes (qrs)} = (\langle \underline{T} \rangle^{\otimes (qr)})^{\otimes s} \to \mathbb{Q}^{\otimes s} = \mathbb{Q}.$$

Для $a, x \in E$ имеем

$$D_a(x^{\otimes(qrs)}) = \prod_{t=1}^{s} D_a^t(x^{\otimes(qr)}) \in |p^m\backslash_{\langle \underline{T} \rangle} x - a| + p^n\mathbb{Z}.$$

Пусть $P \subset \langle \underline{T} \rangle^{\otimes(qrs)}$ — подгруппа, порождённая элементами $x^{\otimes(qrs)}$, $x \in E$. Для $a \in E$ пусть $d_a \colon P \to \mathbb{Z}$ — сокращение гомоморфизма D_a (имеем $D_a(P) \subset \mathbb{Z}$). Для $a, x \in E$ имеем $d_a(x^{\otimes(qrs)}) \equiv |p^m\backslash_{\langle \underline{T} \rangle} x - a| \pmod{p^n}$.

Пусть $A \subset E$ — такое множество, что для любого $x \in E$ существует и единственен такой элемент $a \in A$, что $x - a \in p^m\langle \underline{T} \rangle$. Множество A конечно. Определим гомоморфизм $K \colon P \to V$, полагая

$$K(Z) = \sum_{t \in T,\, a \in A \cap t^e} d_a(Z) f(t), \qquad Z \in P.$$

Пусть даны элементы $t_0 \in T$, $x_0 \in t_0^e$. Имеем

$$K(x_0^{\otimes(qrs)}) = \sum_{t \in T,\, a \in A \cap t^e} d_a(x_0^{\otimes(qrs)}) f(t) = \sum_{t \in T,\, a \in A \cap t^e} |p^m\backslash_{\langle \underline{T} \rangle} x_0 - a| f(t),$$

так как $p^n V = 0$. Пусть $a_0 \in A$ — такой элемент, что $x_0 - a_0 \in p^m\langle \underline{T} \rangle$. Так как $a_0 \in A \subset E$, то $\overline{a_0} = 1$. Так как $p^m U = 0$, то $e^+(a_0) = e^+(x_0) = e(t_0)$. Таким образом, $a_0 \in A \cap t_0^e$. В последней сумме слагаемое с $t = t_0$, $a = a_0$ равно $f(t_0)$, так как $x_0 - a_0 \in p^m\langle \underline{T} \rangle$. Других слагаемых с $a = a_0$ нет, так как при $t \neq t_0$ имеем $a_0 \notin t^e$, так как $e^+(a_0) = e(t_0) \neq e(t)$, так как отображение e инъективно. Слагаемые с $a \neq a_0$ равны нулю, так как $x_0 - a_0 \in p^m\langle \underline{T} \rangle$, и, следовательно, $x_0 - a \notin p^m\langle \underline{T} \rangle$ (раз $a_0, a \in A$ и $a \neq a_0$). Таким образом, $K(x_0^{\otimes(qrs)}) = f(t_0)$. Значит, $e \xrightarrow{qrs}\!\!\triangleright f$. $\square$

4. Отображение $z_{\boldsymbol{T}}$

Обозначения. Пусть дано симплициальное множество $\boldsymbol{T}$. Пусть

$$c \colon \coprod_{q=0}^{\infty} \Delta^q \times \boldsymbol{T}_q \to |\boldsymbol{T}|$$

— каноническая проекция. Для числа $q \in \mathbb{N}$, точки $z \in \Delta^q$ и симплекса $t \in \boldsymbol{T}_q$ пусть $z_t = c(z, t) \in |\boldsymbol{T}|$. Для числа $q \in \mathbb{N}$ и точки $z \in \Delta^q$ определяем отображение $z_{\boldsymbol{T}} \colon \boldsymbol{T}_q \to |\boldsymbol{T}|$, полагая $z_{\boldsymbol{T}}(t) = z_t$, $t \in \boldsymbol{T}_q$.

Обозначения. Для $q \in \mathbb{N}$ и $i \in [q]$ пусть $\tau_i^q = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1) \in \Delta^q$ (i нулей). Для $q, r \in \mathbb{N}$ и возрастающего отображения $d \colon [r] \to [q]$ определяем аффинное отображение $d_* \colon \Delta^r \to \Delta^q$ условием $d_*(\tau_j^r) = \tau_{d(j)}^q$, $j \in [r]$.

4.1. Лемма. *Пусть даны число $q \in \mathbb{N}$, точка $z \in \operatorname{Int} \Delta^q$ и симплициальное множество $\boldsymbol{T}$. Тогда отображение $z_{\boldsymbol{T}} \colon \boldsymbol{T}_q \to |\boldsymbol{T}|$ инъективно.*

Доказательство. Пусть даны такие симплексы $t, t' \in \boldsymbol{T}_q$, что $z_t = z_{t'}$. Покажем, что $t = t'$. Есть такие число $r \in \mathbb{N}$, точка $w \in \Delta^r$ и возрастающие отображения $d, d' \colon [r] \to [q]$, что $\boldsymbol{T}(d)(t) = \boldsymbol{T}(d')(t')$ и $d_*(w) = d'_*(w) = z$ (см. [1, I.2.13]). Пусть $E = \{\, j \in [r] : d(j) = d'(j) \,\}$. Так как $d_*(w) = d'_*(w)$, то, как нетрудно понять, точка w принадлежит выпуклой оболочке вершин τ_j^r, $j \in E$. Так как $d_*(w) = z \in \operatorname{Int} \Delta^q$, то отображение $d|_E$ сюръективно. Поэтому есть такое возрастающее отображение $c \colon [q] \to [r]$, что $c([q]) \subset E$, $d \circ c = \mathrm{id}$ и, следовательно, $d' \circ c = \mathrm{id}$. Имеем $t = \boldsymbol{T}(c)(\boldsymbol{T}(d)(t)) = \boldsymbol{T}(c)(\boldsymbol{T}(d')(t')) = t'$. $\square$

4.2. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$ и конечное множество $D \subset |\boldsymbol{T}|$. Тогда существуют такие число $q \in \mathbb{N}$ и точка $z \in \operatorname{Int} \Delta^q$, что $D \subset z_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}_q)$.*

Доказательство. Для числа $m \in \mathbb{N}$ и точки $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \Delta^m$ пусть $\|u\| = \{0, u_1, \ldots, u_m, 1\} \subset I$. Если точки $u \in \Delta^m$, $v \in \Delta^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ таковы, что $\|u\| \subset \|v\|$, то есть такое возрастающее отображение $d\colon [n] \to [m]$, что $u = d_*(v)$ и, следовательно, для симплекса $t \in \boldsymbol{T}_m$ имеем $u_t = v_{\boldsymbol{T}(d)(t)} \in v_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}_n)$. Поэтому достаточно, чтобы множество $\|z\|$ было достаточно большим: для каждой точки $y_t \in D$, где $y \in \Delta^p$, $t \in \boldsymbol{T}_p$ $(p \in \mathbb{N})$, потребуем включения $\|y\| \subset \|z\|$. $\square$

5. Симплициальные абелевы группы

Напоминание. Пусть дана симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда $|\boldsymbol{U}|$ — абелева группа со слабо непрерывными сложением и вычитанием. Для числа $q \in \mathbb{N}$ и точки $z \in \Delta^q$ отображение $z_{\boldsymbol{U}}\colon \boldsymbol{U}_q \to |\boldsymbol{U}|$ — гомоморфизм. Для $q \in \mathbb{N}$ множество $\Pi_q|\boldsymbol{U}|$ — абелева группа.

5.1. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m|\boldsymbol{U}| \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m|\boldsymbol{U}| \xrightarrow{\;\mathrm{id}\;} \Pi_m|\boldsymbol{U}|$$

где J — основное отображение, имеем $J \overset{1}{\rhd} \mathrm{id}$.

Доказательство. Пусть $j\colon \Pi_m|\boldsymbol{U}| \to \Phi_m|\boldsymbol{U}|$ — гомоморфизм включения. Определим гомоморфизмы $r\colon \langle|\boldsymbol{U}|\rangle \to |\boldsymbol{U}|$, полагая $r(‘v’) = v$, $v \in |\boldsymbol{U}|$, и $h\colon \Psi_m|\boldsymbol{U}| \to \Phi_m|\boldsymbol{U}|$, полагая $h(w)(z) = r(w(‘z’))$, $z \in S^m$, $w \in \Psi_m|\boldsymbol{U}|$. Имеем $h \circ J = j$, так как для $a \in \Pi_m|\boldsymbol{U}|$, $z \in S^m$ имеем $h(J(a))(z) = h(\langle a\rangle)(z) = r(\langle a\rangle(‘z’)) = r(‘a(z)’) = a(z) = j(a)(z)$. По п. а) леммы 2.2, $J \overset{1}{\rhd} h \circ J = j$. По п. б) леммы 2.2, $j \overset{1}{\rhd} \mathrm{id}$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \overset{1}{\rhd} \mathrm{id}$. $\square$

5.2. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда основное отображение $P\colon \Pi_m|\boldsymbol{U}| \to \pi_m|\boldsymbol{U}|$ — гомоморфизм.*

См. [3, предложение 5 из Дополнения к лекции 4]. $\square$

6. Сравнение симплициальных отображений

Определение. Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и симплициальные отображения $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$. Для $r \in \mathbb{N}$ пишем $\boldsymbol{e} \overset{r}{\rhd} \boldsymbol{f}$, если для каждого $q \in \mathbb{N}$ в диаграмме

$$\boldsymbol{U}_q \xleftarrow{\;\boldsymbol{e}_q\;} \boldsymbol{T}_q \xrightarrow{\;\boldsymbol{f}_q\;} \boldsymbol{V}_q$$

имеем $\boldsymbol{e}_q \overset{r}{\rhd} \boldsymbol{f}_q$. Пишем $\boldsymbol{e} \rhd \boldsymbol{f}$, если существует такое $r \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{e} \overset{r}{\rhd} \boldsymbol{f}$.

6.1. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, симплициальные отображения $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\boldsymbol{e} \overset{r}{\rhd} \boldsymbol{f}$. Тогда в диаграмме*

$$|\boldsymbol{U}| \xleftarrow{\;|\boldsymbol{e}|\;} |\boldsymbol{T}| \xrightarrow{\;|\boldsymbol{f}|\;} |\boldsymbol{V}|$$

имеем $|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} |\boldsymbol{f}|$.

Доказательство. Возьмём произвольное конечное множество $D \subset |\boldsymbol{T}|$. Пусть $j\colon D \to |\boldsymbol{T}|$ — включение. По лемме 4.2, есть такие число $q \in \mathbb{N}$ и точка $z \in \operatorname{Int} \Delta^q$, что $D \subset z_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}_q)$. Есть такое отображение $s\colon D \to \boldsymbol{T}_q$, что $z_{\boldsymbol{T}} \circ s = j$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{U}_q \arrow[d, "z_{\boldsymbol{U}}"'] & \boldsymbol{T}_q \arrow[l, "\boldsymbol{e}_q"'] \arrow[r, "\boldsymbol{f}_q"] \arrow[d, "z_{\boldsymbol{T}}"'] & \boldsymbol{V}_q \arrow[d, "z_{\boldsymbol{V}}"'] \\
|\boldsymbol{U}| & |\boldsymbol{T}| \arrow[l, "|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "|\boldsymbol{f}|"] & |\boldsymbol{V}|
\end{tikzcd}$$

Отображения $z_{\boldsymbol{U}}$ и $z_{\boldsymbol{V}}$ — гомоморфизмы. Имеем $|\boldsymbol{e}| \circ z_{\boldsymbol{T}} = z_{\boldsymbol{U}} \circ \boldsymbol{e}_q \overset{1}{\rightarrowtriangle} \boldsymbol{e}_q$, по п. б) леммы 2.2, так как, по лемме 4.1, $z_{\boldsymbol{U}}$ — мономорфизм. По условию, $\boldsymbol{e}_q \overset{r}{\rightarrowtriangle} \boldsymbol{f}_q$. По п. а) леммы 2.2, $\boldsymbol{f}_q \overset{1}{\rightarrowtriangle} z_{\boldsymbol{V}} \circ \boldsymbol{f}_q = |\boldsymbol{f}| \circ z_{\boldsymbol{T}}$. Таким образом, по лемме 2.3, $|\boldsymbol{e}| \circ z_{\boldsymbol{T}} \overset{r}{\rightarrowtriangle} |\boldsymbol{f}| \circ z_{\boldsymbol{T}}$. По лемме 2.4, $|\boldsymbol{e}| \circ j = |\boldsymbol{e}| \circ z_{\boldsymbol{T}} \circ s \overset{r}{\rightarrowtriangle} |\boldsymbol{f}| \circ z_{\boldsymbol{T}} \circ s = |\boldsymbol{f}| \circ j$. Так как D произвольно, то, по лемме 2.5, $|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} |\boldsymbol{f}|$. $\square$

6.2. Следствие. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, симплициальные отображения $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\boldsymbol{e} \overset{r}{\rightarrowtriangle} \boldsymbol{f}$. Тогда в диаграмме*

$$\Pi_m|\boldsymbol{U}| \xleftarrow{\Pi_m|\boldsymbol{e}|} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{\Pi_m|\boldsymbol{f}|} \Pi_m|\boldsymbol{V}|$$

имеем $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\boldsymbol{U}| \arrow[d, "j'"'] & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "\Pi_m|\boldsymbol{f}|"] \arrow[d, "j"'] & \Pi_m|\boldsymbol{V}| \arrow[d, "j''"'] \\
\Phi_m|\boldsymbol{U}| & \Phi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Phi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "\Phi_m|\boldsymbol{f}|"] & \Phi_m|\boldsymbol{V}|
\end{tikzcd}$$

где j, j', j'' — включения. Ясно, что j', j'' — гомоморфизмы. По п. а) леммы 2.2, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \overset{1}{\rightarrowtriangle} j' \circ \Pi_m|\boldsymbol{e}| = \Phi_m|\boldsymbol{e}| \circ j$. По лемме 6.1, $|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} |\boldsymbol{f}|$. Значит, по лемме 2.7, $\Phi_m|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} \Phi_m|\boldsymbol{f}|$. Значит, по лемме 2.4, $\Phi_m|\boldsymbol{e}| \circ j \overset{r}{\rightarrowtriangle} \Phi_m|\boldsymbol{f}| \circ j = j'' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. По п. б) леммы 2.2, $j'' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\rightarrowtriangle} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. Таким образом, по лемме 2.3, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \overset{r}{\rightarrowtriangle} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. $\square$

7. Конструкция Эйленберга — Маклейна

Напоминание. Пусть даны число $n \in \mathbb{N}_+$ и абелева группа V. Определены (см. [10, §23]) симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{K}(V, n) = \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}(V, n) = \boldsymbol{L}$ и симплициальный гомоморфизм $\boldsymbol{c}(V, n) = \boldsymbol{c}\colon \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{K}$. Для $q \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{K}_q$ — группа n-мерных классических коциклов симплекса Δ^q с коэффициентами в группе V, $\boldsymbol{L}_q$ — группа $(n-1)$-мерных классических коцепей симплекса Δ^q с коэффициентами в группе V, $\boldsymbol{c}_q$ — сокращение кограничного гомоморфизма. Для чисел $q, r \in \mathbb{N}$ и возрастающего отображения $d\colon [r] \to [q]$ $\boldsymbol{K}(d)\colon \boldsymbol{K}_q \to \boldsymbol{K}_r$ — гомоморфизм, индуцированный отображением $d_*\colon \Delta^r \to \Delta^q$. То же для симплициальной группы $\boldsymbol{L}$. Имеем $\pi_q|\boldsymbol{K}| = 0$, $q \in \mathbb{N}_+ \setminus \{n\}$. Определён канонический изоморфизм $V \to \pi_n|\boldsymbol{K}|$. Его композицию с гомоморфизмом Гуревича понимаем под *стандартным* изоморфизмом $i\colon V \to H_n|\boldsymbol{K}|$. Пространство $|\boldsymbol{L}|$ стягиваемо. Так как $\boldsymbol{c}_q$, $q \in \mathbb{N}$, — эпиморфизмы, то, по [8, Lemma III.2.8], $\boldsymbol{c}$ — расслоение Кана, и, следовательно, по теореме Квиллена [8, Theorem I.10.10], $|\boldsymbol{c}|$ — расслоение Серра.

7.1. Лемма. *Пусть даны число $n \in \mathbb{N}_+$, симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, абелева группа V и гомоморфизм $g\colon H_n|\boldsymbol{T}| \to V$. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(V,n)$, $i\colon V \to H_n|\boldsymbol{K}|$ — стандартный изоморфизм. Тогда существует такое симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{K}$, что $H_n|\boldsymbol{f}| = i \circ g$.*

Это следует из теоремы об универсальных коэффициентах и "теоремы об универсальном когомологическом классе" [10, Theorem 24.4]. $\square$

7.2. Лемма. *Пусть даны простое число p, симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная p-специальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, p-специальная абелева группа V, число $n \in \mathbb{N}_+$, вложение $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$ и симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{K}(V,n)$. Тогда $\boldsymbol{e} \mathrel{\triangleright} \boldsymbol{f}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(V,n)$. По лемме 3.5, есть такое $r \in \mathbb{N}$, что в диаграмме

$$\boldsymbol{U}_n \xleftarrow{\boldsymbol{e}_n} \boldsymbol{T}_n \xrightarrow{\boldsymbol{f}_n} \boldsymbol{K}_n$$

имеем $\boldsymbol{e}_n \xrightarrow{r}\!\triangleright \boldsymbol{f}_n$. Возьмём произвольное $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{U}_q \arrow[d, "g'"'] & \boldsymbol{T}_q \arrow[l, "\boldsymbol{e}_q"'] \arrow[r, "\boldsymbol{f}_q"] \arrow[d, "g"'] & \boldsymbol{K}_q \arrow[d, "h"'] \\
\prod_{d\in D} \boldsymbol{U}_n & \prod_{d\in D} \boldsymbol{T}_n \arrow[l, "E=(\boldsymbol{e}_n)_{d\in D}"'] \arrow[r, "F=(\boldsymbol{f}_n)_{d\in D}"] & \prod_{d\in D} \boldsymbol{K}_n
\end{tikzcd}$$

где D — множество всех возрастающих отображений $d\colon [n] \to [q]$ и

$$g = \prod_{d\in D} \boldsymbol{T}(d), \qquad g' = \prod_{d\in D} \boldsymbol{U}(d), \qquad h = \prod_{d\in D} \boldsymbol{K}(d).$$

По п. а) леммы 2.2, $\boldsymbol{e}_q \xrightarrow{1}\!\triangleright g' \circ \boldsymbol{e}_q = E \circ g$. По лемме 2.7, $E \xrightarrow{r}\!\triangleright F$. Значит, по лемме 2.4, $E \circ g \xrightarrow{r}\!\triangleright F \circ g = h \circ \boldsymbol{f}_q$. Нетрудно видеть, что h — мономорфизм. Значит, по п. б) леммы 2.2, $h \circ \boldsymbol{f}_q \xrightarrow{1}\!\triangleright \boldsymbol{f}_q$. Таким образом, по лемме 2.3, $\boldsymbol{e}_q \xrightarrow{r}\!\triangleright \boldsymbol{f}_q$. $\square$

8. Применение метода Серра

Определение. Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\boldsymbol{U}} \arrow[d, "\boldsymbol{s}"'] & \tilde{\boldsymbol{T}} \arrow[l, "\tilde{\boldsymbol{e}}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{r}"'] \\
\boldsymbol{U} & \boldsymbol{T} \arrow[l, "\boldsymbol{e}"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{T}}$ — симплициальные пунктированные множества, $\boldsymbol{r}$ — симплициальное связанное отображение, $\boldsymbol{U}$, $\tilde{\boldsymbol{U}}$ — симплициальные абелевы группы, $\boldsymbol{s}$ — симплициальный гомоморфизм, $\boldsymbol{e}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}$ — вложения. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}| \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{s}|"'] & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \arrow[l, "\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}|"'] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{r}|"'] \\
\Pi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"']
\end{tikzcd}
$$

Связанное отображение $G\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$ называем *снарядом для диаграммы* (1), если $\Pi_m|\boldsymbol{r}| \circ G = \mathrm{id}$ и $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$.

8.1. Утверждение. *Пусть даны простое число p, числа $m, n \in \mathbb{N}_+$ и диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\boldsymbol{U}} \arrow[d, "\boldsymbol{s}"'] & \tilde{\boldsymbol{T}} \arrow[l, "\tilde{\boldsymbol{e}}"'] \arrow[r, "\boldsymbol{g}"] \arrow[d, "\boldsymbol{r}"'] & \boldsymbol{L} \arrow[d, "\boldsymbol{c}"'] \\
\boldsymbol{U} & \boldsymbol{T} \arrow[l, "\boldsymbol{e}"'] \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{K}
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

где $\boldsymbol{T}$ — симплициальное конечное пунктированное множество, $\boldsymbol{U}$ — симплициальная p-специальная абелева группа, $\boldsymbol{e}$ — вложение, $\boldsymbol{f}$ — симплициальное связанное отображение, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\mathbb{Z}_p, n)$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\mathbb{Z}_p, n)$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\mathbb{Z}_p, n)$, $\tilde{\boldsymbol{T}}$ — симплициальное пунктированное множество, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{g}$ — симплициальные связанные отображения, правый квадрат декартов, $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{s}$ — проекция, $\tilde{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{g}$. Предположим, что $m \neq n$. Тогда существует снаряд $G\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$ для левого квадрата диаграммы (2).

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\Pi_m|\boldsymbol{U}| \times \Pi_m|\boldsymbol{L}| & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{s}| \times \Pi_m|\boldsymbol{t}|"'] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{s}|"'] & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \arrow[l, "\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}|"'] \arrow[r, "\Pi_m|\boldsymbol{g}|"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{r}|"'] & \Pi_m|\boldsymbol{L}| \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{c}|"'] \\
 & \Pi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "\Pi_m|\boldsymbol{f}|"] & \Pi_m|\boldsymbol{K}|
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

где $\boldsymbol{t}\colon \tilde{\boldsymbol{U}} \to \boldsymbol{L}$ — проекция.

Все элементы групп $\boldsymbol{K}_q$, $q \in \mathbb{N}$, при умножении на p дают нуль. Следовательно, то же верно для группы $|\boldsymbol{K}|$ и, следовательно, для группы $\Pi_m|\boldsymbol{K}|$. То же для группы $\Pi_m|\boldsymbol{L}|$. Таким образом, группы $\Pi_m|\boldsymbol{K}|$, $\Pi_m|\boldsymbol{L}|$ можно считать векторными пространствами над полем $\mathbb{Z}_p$, а гомоморфизм $\Pi_m|\boldsymbol{c}|$ — линейным отображением. Так как $\pi_m|\boldsymbol{K}| = 0$, а $|\boldsymbol{c}|$ — расслоение Серра, то отображение $\Pi_m|\boldsymbol{c}|$ сюръективно. Значит, есть такое линейное отображение $F\colon \Pi_m|\boldsymbol{K}| \to \Pi_m|\boldsymbol{L}|$, что $\Pi_m|\boldsymbol{c}| \circ F = \mathrm{id}$.

Так как правый квадрат диаграммы (2) декартов, то правый квадрат диаграммы (3) тоже декартов. Определим искомое отображение $G\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$ условиями $\Pi_m|\boldsymbol{r}| \circ G = \mathrm{id}$ и $\Pi_m|\boldsymbol{g}| \circ G = F \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}|$ (согласованность: $\Pi_m|\boldsymbol{f}| = \Pi_m|\boldsymbol{c}| \circ F \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}|$).

По п. а) леммы 2.2, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \Pi_m|\boldsymbol{e}| = \Pi_m|\boldsymbol{e}| \circ \Pi_m|\boldsymbol{r}| \circ G = \Pi_m|\boldsymbol{s}| \circ \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$. Из леммы 7.2 и следствия 6.2 следует, что $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. По п. а) леммы 2.2, $\Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} F \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. Значит, по лемме 2.3, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} F \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}| = \Pi_m|\boldsymbol{g}| \circ G = \Pi_m|\boldsymbol{t}| \circ \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$. Таким образом, по леммам 2.1 и 2.6, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} (\Pi_m|\boldsymbol{s}| \times \Pi_m|\boldsymbol{t}|) \circ \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$. Так как $\Pi_m|\boldsymbol{s}| \times \Pi_m|\boldsymbol{t}|$ — изоморфизм, то $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$. $\square$

8.2. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная p-специальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и вложение $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$. Предположим, что группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны. Тогда существуют коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\boldsymbol{U}} & \xleftarrow{\tilde{\boldsymbol{e}}} & \tilde{\boldsymbol{T}} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{s}}\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{r}}\downarrow \\ \boldsymbol{U} & \xleftarrow{\boldsymbol{e}} & \boldsymbol{T} \end{array}$$

где $\tilde{\boldsymbol{T}}$ — $(m-1)$-связное симплициальное конечное пунктированное множество, $\boldsymbol{r}$ — симплициальное связанное отображение, $\tilde{\boldsymbol{U}}$ — симплициальная p-специальная абелева группа, $\boldsymbol{s}$ — симплициальный гомоморфизм, $\tilde{\boldsymbol{e}}$ — вложение, и снаряд $G\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$ для неё.

Доказательство. Сделаем конечное число *шагов*. На i-м ($i \in \mathbb{N}$) шаге построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\boldsymbol{U}}^i & \xleftarrow{\tilde{\boldsymbol{e}}^i} & \tilde{\boldsymbol{T}}^i \\ {\scriptstyle \boldsymbol{s}^i}\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{r}^i}\downarrow \\ \boldsymbol{U} & \xleftarrow{\boldsymbol{e}} & \boldsymbol{T} \end{array}$$

где $\tilde{\boldsymbol{T}}^i$ — такое односвязное симплициальное конечное пунктированное множество, что абелевы группы $\pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}^i|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны, $\boldsymbol{r}^i$ — симплициальное связанное отображение, $\tilde{\boldsymbol{U}}^i$ — симплициальная p-специальная абелева группа, $\boldsymbol{s}^i$ — симплициальный гомоморфизм, $\tilde{\boldsymbol{e}}^i$ — вложение, и снаряд $G^i\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}^i|$ для неё.

0-й шаг: пусть $\tilde{\boldsymbol{T}}^0 = \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{r}^0 = \mathbf{id}$, $\tilde{\boldsymbol{U}}^0 = \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{s}^0 = \mathbf{id}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}^0 = \boldsymbol{e}$, $G^0 = \mathrm{id}$.

Предположим, что сделан i-й ($i \in \mathbb{N}$) шаг. Если симплициальное множество $\tilde{\boldsymbol{T}}^i$ $(m-1)$-связно, то пусть $\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\boldsymbol{T}}^i$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^i$, $\tilde{\boldsymbol{U}} = \tilde{\boldsymbol{U}}^i$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^i$, $\tilde{\boldsymbol{e}} = \tilde{\boldsymbol{e}}^i$, $G = G^i$ и всё. Предположим противное. Сделаем $(i+1)$-й шаг. Пусть $n = \inf\{\, q \in \mathbb{N}_+ : \pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}^i| \neq 0 \,\}$. Имеем $n < m$. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\mathbb{Z}_p, n)$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\mathbb{Z}_p, n)$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(V, n)\colon \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{K}$. Так как $\pi_n|\tilde{\boldsymbol{T}}^i|$ — ненулевая p-специальная абелева группа, то существует эпиморфизм $h\colon \pi_n|\tilde{\boldsymbol{T}}^i| \to \mathbb{Z}_p$. По теореме Гуревича и лемме 7.1, есть такое симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \tilde{\boldsymbol{T}}^i \to \boldsymbol{K}$, что $\pi_n|\boldsymbol{f}|$ — эпиморфизм. Есть коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\boldsymbol{U}}^{i+1} & \xleftarrow{\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}} & \tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1} & \xrightarrow{\boldsymbol{g}} & \boldsymbol{L} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{s}'}\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{r}'}\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{c}}\downarrow \\ \tilde{\boldsymbol{U}}^i & \xleftarrow{\tilde{\boldsymbol{e}}^i} & \tilde{\boldsymbol{T}}^i & \xrightarrow{\boldsymbol{f}} & \boldsymbol{K} \end{array} \tag{4}$$

где $\tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1}$ — симплициальное пунктированное множество, $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{g}$ — симплициальные связанные отображения, правый квадрат декартов, $\tilde{\boldsymbol{U}}^{i+1} = \tilde{\boldsymbol{U}}^i \times \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{s}'$ — проекция, $\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1} = (\tilde{\boldsymbol{e}}^i \circ \boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{g}$. Пусть $\boldsymbol{r}^{i+1} = \boldsymbol{r}^i \circ \boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{s}^{i+1} = \boldsymbol{s}^i \circ \boldsymbol{s}'$. Получили нужную коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\boldsymbol{U}}^{i+1} \arrow[d, "\boldsymbol{s}^{i+1}"'] & \tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1} \arrow[l, "\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{r}^{i+1}"'] \\
\boldsymbol{U} & \boldsymbol{T} \arrow[l, "\boldsymbol{e}"']
\end{tikzcd} \tag{5}$$

По утверждению 8.1, есть снаряд $G'\colon \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}^i| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1}|$ для левого квадрата диаграммы (4). Пусть $G^{i+1} = G' \circ G^i$. Ясно, что $\Pi_m|\boldsymbol{r}^{i+1}| \circ G^i = \mathrm{id}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}^{i+1}| & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1}| \arrow[l, "\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}|"'] \\
\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}^{i}| & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}^{i}| \arrow[l, "\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i}|"'] \arrow[u, "G'"] \\
\Pi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[u, "G^i"]
\end{tikzcd}$$

Имеем $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \dashrightarrow \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^i| \circ G^i$, $\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^i| \dashrightarrow \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}| \circ G'$ и, следовательно, по лемме 2.4, $\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^i| \circ G^i \dashrightarrow \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}| \circ G' \circ G^i = \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}| \circ G^{i+1}$. Таким образом, по лемме 2.3, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \dashrightarrow \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}^{i+1}| \circ G^{i+1}$. Таким образом, G^{i+1} — снаряд для диаграммы (5). Так как правый квадрат диаграммы (4) декартов, а $|\boldsymbol{c}|$ — расслоение Серра, то $|\boldsymbol{r}'|$ — тоже расслоение Серра, причём отображение $|\boldsymbol{g}|$ гомеоморфно отображает слои расслоения $|\boldsymbol{r}'|$ на слои расслоения $|\boldsymbol{c}|$. Сравнивая гомотопические последовательности расслоений $|\boldsymbol{r}'|$ и $|\boldsymbol{c}|$, получаем, что для $q \in \mathbb{N}_+$ гомоморфизм $\pi_q|\boldsymbol{r}'|$ — изоморфизм при $q \neq n$ и мономорфизм с коядром порядка p при $q = n$. Так как группы $\pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}^i|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны, то группы $\pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}^{i+1}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, тоже p-специальны. Шаг сделан.

Видно, что с каждым шагом порядок суммы групп $\pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}^i|$, $q < m$, уменьшается. Поэтому на каком-то шаге всё кончится. $\square$

8.3. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная p-специальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, вложение $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, p-специальная абелева группа V и гомоморфизм $g\colon H_m|\boldsymbol{T}| \to V$. Тогда в диаграмме*

$$\Pi_m|\boldsymbol{U}| \xleftarrow{\Pi_m|\boldsymbol{e}|} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{P} \pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{h} H_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{g} V$$

где P — основное отображение, h — гомоморфизм Гуревича, имеем $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \dashrightarrow g \circ h \circ P$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(V, m)$, $i\colon V \to H_m|\boldsymbol{K}|$ — стандартный изоморфизм. По лемме 7.1, есть такое симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{K}$, что $H_m|\boldsymbol{f}| = i \circ g$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{f}|"'] & \pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_m|\boldsymbol{f}|"'] & H_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "H_m|\boldsymbol{f}|"'] & \\
 & \Pi_m|\boldsymbol{K}| \arrow[r, "P'"] & \pi_m|\boldsymbol{K}| \arrow[r, "h'"] & H_m|\boldsymbol{K}| & V \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

где P' — основное отображение, h' — гомоморфизм Гуревича. Из леммы 7.2 и следствия 6.2 следует, что $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\triangleright} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. По лемме 5.2, P' — гомоморфизм. По п. а) леммы 2.2, $\Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\mathrel{-\!\triangleright}} h' \circ P' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}| = H_m|\boldsymbol{f}| \circ h \circ P = i \circ g \circ h \circ P$. Так как i — изоморфизм, то $\Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\mathrel{-\!\triangleright}} g \circ h \circ P$. Таким образом, по лемме 2.3, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\triangleright} g \circ h \circ P$. $\square$

8.4. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная p-специальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и вложение $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$. Предположим, что группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны. Тогда в диаграмме*

$$\Pi_m|\boldsymbol{U}| \xleftarrow{\Pi_m|\boldsymbol{e}|} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{P} \pi_m|\boldsymbol{T}|$$

где P — основное отображение, имеем $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\triangleright} P$.

Доказательство. По утверждению 8.2, есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\boldsymbol{U}} \arrow[d, "\boldsymbol{s}"'] & \tilde{\boldsymbol{T}} \arrow[l, "\tilde{\boldsymbol{e}}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{r}"] \\
\boldsymbol{U} & \boldsymbol{T} \arrow[l, "\boldsymbol{e}"']
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{\boldsymbol{T}}$ — $(m-1)$-связное симплициальное конечное пунктированное множество, $\boldsymbol{r}$ — симплициальное связанное отображение, $\tilde{\boldsymbol{U}}$ — симплициальная p-специальная абелева группа, $\boldsymbol{s}$ — симплициальный гомоморфизм, $\tilde{\boldsymbol{e}}$ — вложение, и снаряд $G \colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$ для неё. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}| \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{s}|"'] & \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \arrow[l, "\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}|"'] \arrow[r, "\tilde{P}"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{r}|"'] & \pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\pi_m|\boldsymbol{r}|"'] & H_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \\
\Pi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] \arrow[r, "P"] & \pi_m|\boldsymbol{T}|
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{P}$ — основное отображение, $\tilde{h}$ — гомоморфизм Гуревича. По теореме Гуревича, $\tilde{h}$ — изоморфизм. Имеем $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\triangleright} \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G$. По утверждению 8.3, $\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \mathrel{-\!\triangleright} \pi_m|\boldsymbol{r}| \circ \tilde{h}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{P} = \pi_m|\boldsymbol{r}| \circ \tilde{P} = P \circ \Pi_m|\boldsymbol{r}|$. Значит, по лемме 2.4, $\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \circ G \mathrel{-\!\triangleright} P \circ \Pi_m|\boldsymbol{r}| \circ G = P$. Таким образом, по лемме 2.3, $\Pi_m|\tilde{\boldsymbol{e}}| \mathrel{-\!\triangleright} P$. $\square$

8.5. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$ и односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$. Предположим, что группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m|\boldsymbol{T}| \xleftarrow{J} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{P} \pi_m|\boldsymbol{T}|$$

где J, P — основные отображения, имеем $J \mathrel{-\!\triangleright} P$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U}$ — симплициальная абелева группа с $\boldsymbol{U}_q = \langle \boldsymbol{T}_q \rangle / p$, $q \in \mathbb{N}$, и $\boldsymbol{U}(d) = \langle \boldsymbol{T}(d) \rangle / p$ для возрастающего отображения $d \colon [r] \to [q]$, $q, r \in$

$\mathbb{N}$. Определим вложение $\boldsymbol{e}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, полагая $\boldsymbol{e}_q(t) = \text{‘}t\text{'}|_p$, $t \in \boldsymbol{T}_q$, $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Psi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "\Psi_m|\boldsymbol{e}|"'] & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{e}|"'] & \pi_m|\boldsymbol{T}| \\
\Psi_m|\boldsymbol{U}| & \Pi_m|\boldsymbol{U}| \arrow[l, "J'"']
\end{tikzcd}$$

где J' — основное отображение. По п. a) леммы 2.2, $J \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \Psi_m|\boldsymbol{e}| \circ J = J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{e}|$. По лемме 5.1, $J' \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \mathrm{id}$. Значит, по лемме 2.4, $J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{e}| \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \Pi_m|\boldsymbol{e}|$. По утверждению 8.4, $\Pi_m|\boldsymbol{e}| \mathrel{-\!\!\triangleright} P$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \mathrel{-\!\!\triangleright} P$. $\square$

9. Самое неконструктивное место

9.1. Лемма. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, односвязное симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, p-специальная абелева группа W и гомоморфизм $r\colon \pi_m|\boldsymbol{T}| \to W$. Предположим, что группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены. Тогда существуют такие односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}'$, гомоморфизм $r'\colon \pi_m|\boldsymbol{T}'| \to W$ и симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}'$, что $r' \circ \pi_m|\boldsymbol{h}| = r$ и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}'|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны.*

Это следует из материала книги [7], см. §15.

9.2. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, односвязное симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, p-специальная абелева группа W и гомоморфизм $r\colon \pi_m|\boldsymbol{T}| \to W$. Предположим, что группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m|\boldsymbol{T}| \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{\;P\;} \pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{\;r\;} W$$

где J, P — основные отображения, имеем $J \mathrel{-\!\!\triangleright} r \circ P$.

Доказательство. По лемме 9.1, есть такие односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}'$, гомоморфизм $r'\colon \pi_m|\boldsymbol{T}'| \to W$ и симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}'$, что $r' \circ \pi_m|\boldsymbol{h}| = r$ и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}'|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Psi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "\Psi_m|\boldsymbol{h}|"'] & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{h}|"'] & \pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "\pi_m|\boldsymbol{h}|"'] & \\
\Psi_m|\boldsymbol{T}'| & \Pi_m|\boldsymbol{T}'| \arrow[l, "J'"'] \arrow[r, "P'"] & \pi_m|\boldsymbol{T}'| \arrow[r, "r'"] & W
\end{tikzcd}$$

где J', P' — основные отображения. По п. a) леммы 2.2, $J \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \Psi_m|\boldsymbol{h}| \circ J = J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{h}|$. По утверждению 8.5, $J' \mathrel{-\!\!\triangleright} P'$. Значит, по п. a) леммы 2.2 и лемме 2.3, $J' \mathrel{-\!\!\triangleright} r' \circ P'$. Значит, по лемме 2.4, $J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{h}| \mathrel{-\!\!\triangleright} r' \circ P' \circ \Pi_m|\boldsymbol{h}| = r' \circ \pi_m|\boldsymbol{h}| \circ P = r \circ P$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \mathrel{-\!\!\triangleright} r \circ P$. $\square$

10. Инвариант Гуревича

10.1. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m|\boldsymbol{T}| \xleftarrow{J} \Pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{P} \pi_m|\boldsymbol{T}| \xrightarrow{h} H_m|\boldsymbol{T}|$$

где J, P — основные отображения, h — гомоморфизм Гуревича, имеем $J \overset{1}{\rhd} h \circ P$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(H_m|\boldsymbol{T}|, m)$. По лемме 7.1, есть такое симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{K}$, что $H_m|\boldsymbol{f}|$ — стандартный изоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Psi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "\Psi_m|\boldsymbol{f}|"'] & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Pi_m|\boldsymbol{f}|"'] & \pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_m|\boldsymbol{f}|"'] & H_m|\boldsymbol{T}| \arrow[d, "H_m|\boldsymbol{f}|"'] \\
\Psi_m|\boldsymbol{K}| & \Pi_m|\boldsymbol{K}| \arrow[l, "J'"'] \arrow[r, "P'"] & \pi_m|\boldsymbol{K}| \arrow[r, "h'"] & H_m|\boldsymbol{K}|
\end{tikzcd}$$

где J', P' — основные отображения, h' — гомоморфизм Гуревича. По п. а) леммы 2.2, $J \overset{1}{\rhd} \Psi_m|\boldsymbol{f}| \circ J = J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. По лемме 5.1, $J' \overset{1}{\rhd} \mathrm{id}$. Значит, по лемме 2.4, $J' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\rhd} \Pi_m|\boldsymbol{f}|$. По лемме 5.2, P' — гомоморфизм. По п. а) леммы 2.2, $\Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\rhd} h' \circ P' \circ \Pi_m|\boldsymbol{f}| = H_m|\boldsymbol{f}| \circ h \circ P$. Так как $H_m|\boldsymbol{f}|$ — изоморфизм, то $\Pi_m|\boldsymbol{f}| \overset{1}{\rhd} h \circ P$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \overset{1}{\rhd} h \circ P$. □

11. r-точечные преобразования

Определение. Пусть даны числа $r, m, n \in \mathbb{N}$ и пунктированные пространства X, Y. Отображение $F\colon \Pi_m X \to \Pi_n Y$ называем *r-точечным*, если для любой точки $z \in S^n$ существует такое множество $T \subset S^m$, состоящее не более чем из r точек, что для любых отображений $a, a' \in \Pi_m X$ равенство $a|_T = a'|_T$ влечёт равенство $F(a)(z) = F(a')(z)$ (другими словами, если значение отображения $F(a)$ в каждой точке $z \in S^n$ определяется значениями отображения a не более чем в r точках).

Цель этого параграфа — лемма 11.3.

Обозначение и соглашение. Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и пунктированное пространство X. Пусть $\underline{\Psi}_m X = \mathrm{Hom}(\langle \underline{S^m} \rangle, \langle \underline{X} \rangle)$. Отображение $\underline{J}\colon \Pi_m X \to \underline{\Psi}_m X$, $\underline{J}(a) = \langle \underline{a} \rangle$, $a \in \Pi_m X$, тоже называем основным.

11.1. Утверждение. *Пусть даны числа $r, m, n \in \mathbb{N}$, пунктированные пространства X, Y и r-точечное отображение $F\colon \Pi_m X \to \Pi_n Y$. Тогда в диаграмме*

$$\underline{\Psi}_m X \xleftarrow{\underline{J}} \Pi_m X \xrightarrow{F} \Pi_n Y \xrightarrow{\underline{J}'} \underline{\Psi}_n Y$$

где $\underline{J}$, $\underline{J}'$ — основные отображения, имеем $\underline{J} \overset{r}{\rhd} \underline{J}' \circ F$.

Доказательство. Есть такие (не обязательно непрерывные) отображения $k_1, \ldots, k_r\colon S^n \to S^m$ и $d_z\colon X^{\times r} \to Y$, $z \in S^n$, что $F(a)(z) = d_z(a(k_1(z)), \ldots, a(k_r(z)))$, $z \in S^n$, $a \in \Pi_m X$. Пусть $i\colon \langle \underline{X} \rangle^{\otimes r} \to \langle \underline{X^{\times r}} \rangle$ — обычный изоморфизм: $i(‘\underline{x_1}’ \otimes \ldots \otimes ‘\underline{x_r}’) = ‘\underline{(x_1, \ldots, x_r)}’$, $x_1, \ldots, x_r \in X$. Имеем гомоморфизмы $\langle \underline{d_z} \rangle\colon \langle \underline{X^{\times r}} \rangle \to \langle \underline{Y} \rangle$, $z \in S^n$.

Определим гомоморфизм $h\colon (\underline{\Psi}_m X)^{\otimes r} \to \underline{\Psi}_n Y$, полагая $h(w_1 \otimes \ldots \otimes w_r)(‘\underline{z}’) = \langle \underline{d_z} \rangle (i(w_1(‘\underline{k_1(z)}’) \otimes \ldots \otimes w_r(‘\underline{k_r(z)}’)))$, $z \in S^n$, $w_1, \ldots, w_r \in \underline{\Psi}_m X$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m X \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\underline{J}"'] & & \Pi_n Y \arrow[d, "\underline{J}'"'] \\
\underline{\Psi}_m X \arrow[r, "R"] & (\underline{\Psi}_m X)^{\otimes r} \arrow[r, "h"] & \underline{\Psi}_n Y
\end{tikzcd}$$

где $R(w) = w^{\otimes r}$, $w \in \underline{\Psi}_m X$. По леммам 2.8 и 2.4, $\underline{J} \overset{r}{\rhd} R \circ \underline{J}$. По п. а) леммы 2.2, $R \circ \underline{J} \overset{1}{\rhd} h \circ R \circ \underline{J} = \underline{J}' \circ F$. Таким образом, по лемме 2.3, $\underline{J} \overset{r}{\rhd} \underline{J}' \circ F$. $\square$

11.2. Утверждение. *Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$ и пунктированное пространство X. Тогда в диаграмме*

$$\underline{\Psi}_m X \xleftarrow{\;\underline{J}\;} \Pi_m X \xrightarrow{\;J\;} \Psi_m X$$

где J, $\underline{J}$ — основные отображения, имеем $\underline{J} \overset{1}{\rhd} J$ и $J \overset{1}{\rhd} \underline{J}$.

Доказательство. Определим гомоморфизм $p\colon \langle \underline{X} \rangle \to \langle X \rangle$, полагая $p(‘\underline{x}’) = ‘x’$, $x \in X$, и гомоморфизм $h\colon \underline{\Psi}_m X \to \Psi_m X$, полагая $h(W)(‘z’) = p(W(‘\underline{z}’))$, $z \in S^m \setminus \{*\}$, $W \in \underline{\Psi}_m X$. Легко проверить, что $h \circ \underline{J} = J$. По п. а) леммы 2.2, $\underline{J} \overset{1}{\rhd} J$.

Определим отображение $K\colon \Pi_m X \to \mathbb{Z} \oplus \Psi_m X$, полагая $K(a) = (1, J(a))$, $a \in \Pi_m X$. По леммам 2.8, 2.4, 2.1 и 2.6, $J \overset{1}{\rhd} K$. Определим гомоморфизм $s\colon \langle X \rangle \to \langle \underline{X} \rangle$, полагая $s(‘x’) = ‘\underline{x}’ - ‘\underline{*}’$, $x \in X$, и гомоморфизм $f\colon \mathbb{Z} \oplus \Psi_m X \to \underline{\Psi}_m X$, полагая $f(t, w)(‘\underline{z}’) = t‘\underline{*}’ + s(w(‘z’))$, $z \in S^m$, $t \in \mathbb{Z}$, $w \in \Psi_m X$. Легко проверить, что $f \circ K = \underline{J}$. По п. а) леммы 2.2, $K \overset{1}{\rhd} \underline{J}$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \overset{1}{\rhd} \underline{J}$. $\square$

11.3. Лемма. *Пусть даны числа $r, m, n \in \mathbb{N}$, пунктированные пространства X, Y и r-точечное отображение $F\colon \Pi_m X \to \Pi_n Y$. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m X \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m X \xrightarrow{\;F\;} \Pi_n Y \xrightarrow{\;J'\;} \Psi_n Y$$

где J, J' — основные отображения, имеем $J \overset{r}{\rhd} J' \circ F$.

Это следует из утверждений 11.1, 11.2 в силу лемм 2.4, 2.3. $\square$

12. Конструкция “кобар”

Конструкция M^r и свёртка. Пусть даны число $r \in \mathbb{N}$ и пунктированное пространство X. Пусть

$$W = \bigcup_{s=0}^{r} \{\, (x_1, \ldots, x_r) \in X^{\times r} : x_s = x_{s+1} \,\} \subset X^{\times r},$$

где $x_0 = x_{r+1} = *$. Пусть $M^r X = X^{\times r}/W$ (ср. [12]). Эта конструкция сохраняет удобность.

Определим отображение $K\colon \Delta^r \times \Omega X \to X^{\times r}$, для $z = (z_1, \ldots, z_r) \in \Delta^r$, $u \in \Omega X$ полагая $K(z, u) = (u(z_1), \ldots, u(z_r))$ (как в повторном интеграле, см. [5]). Легко видеть, что $K(\partial \Delta^r \times \Omega X \cup \Delta^r \times \{*\}) \subset W$. Определим непрерывное связанное отображение $k\colon S^r \Omega X \to M^r X$, для $t \in I^r$, $u \in \Omega X$ полагая $k(t^\circ u) = c(K(t^\triangle, u))$ $(= c(u(z_1), \ldots, u(z_r)))$, где $c\colon X^{\times r} \to M^r X$ — проекция, $(z_1, \ldots, z_r) = t^\triangle \in \Delta^r$. Отображение k называем *свёрткой*.

12.1. Лемма. *Пусть даны число $r \in \mathbb{N}$ и односвязное удобное пунктированное пространство X. Тогда свёртка $k\colon S^r\Omega X \to M^r X$ $(2r+1)$-связна.*

Доказательство по [6], см. §16.

13. Применение теоремы Картана — Серра

Определение. Пусть даны числа $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_+$, и пунктированное пространство X. Пусть $k\colon S^r\Omega X \to M^r X$ — свёртка. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\Pi_{q+1}X & \xrightarrow{D} & \Pi_q\Omega X & \xrightarrow{Z^r} & \Pi_{q+r}S^r\Omega X & \xrightarrow{\Pi_{q+r}k} & \Pi_{q+r}M^r X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_{q+1}X & \xrightarrow{d} & \pi_q\Omega X & \xrightarrow{z^r} & \pi_{q+r}S^r\Omega X & \xrightarrow{\pi_{q+r}k} & \pi_{q+r}M^r X
\end{array}$$

где вертикальные стрелки — основные отображения, D и d — безымянные биекция и изоморфизм (соответственно), Z^r и z^r — преобразование и гомоморфизм (соответственно) надстройки. Определим *преобразование развития* $F\colon \Pi_{q+1}X \to \Pi_{q+r}M^r X$ и *гомоморфизм развития* $f\colon \pi_{q+1}X \to \pi_{q+r}M^r X$ как композиции верхней и нижней (соответственно) строк диаграммы.

13.1. Утверждение. *Пусть даны числа $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_+$ и пунктированное пространство X. Тогда преобразование развития $F\colon \Pi_{q+1}X \to \Pi_{q+r}M^r X$ r-точечно.*

Доказательство. Пусть $c\colon X^{\times r} \to M^r X$ — проекция. Для $a \in \Pi_{q+1}X$, $s \in I^q$, $t \in I^r$, имеем $F(a)((t,s)^\circ) = c(a((z_1,s)^\circ),\ldots,a((z_r,s)^\circ))$, где $(z_1,\ldots,z_r) = t^\triangle \in \Delta^r$. $\square$

13.2. Лемма. *Пусть даны число $q \in \mathbb{N}_+$ и пунктированное пространство X. Тогда ядро гомоморфизма Гуревича $h\colon \pi_q\Omega X \to H_q\Omega X$ не имеет элементов бесконечного порядка.*

Это следует из теоремы Картана — Серра (см. [11, Appendix]). $\square$

13.3. Утверждение. *Пусть даны числа $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_+$ и односвязное удобное пунктированное пространство X. Предположим, что $r \geqslant q$. Тогда ядро композиции*

$$\pi_{q+1}X \xrightarrow{f} \pi_{q+r}M^r X \xrightarrow{h} H_{q+r}M^r X$$

где f — гомоморфизм развития, h — гомоморфизм Гуревича, не имеет элементов бесконечного порядка.

Доказательство. Пусть $k\colon S^r\Omega X \to M^r X$ — свёртка. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{q+1}X & \xrightarrow{d} & \pi_q\Omega X & \xrightarrow{z^r} & \pi_{q+r}S^r\Omega X & \xrightarrow{\pi_{q+r}k} & \pi_{q+r}M^r X \\
 & & {\scriptstyle h'}\downarrow & & {\scriptstyle h''}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\
 & & H_q\Omega X & \xrightarrow{s^r} & H_{q+r}S^r\Omega X & \xrightarrow{H_{q+r}k} & H_{q+r}M^r X
\end{array}$$

где d — безымянный изоморфизм, z^r — гомоморфизм надстройки, s^r — изоморфизм надстройки, h', h'' — гомоморфизмы Гуревича. Имеем $h \circ f = h \circ \pi_{q+r}k \circ z^r \circ d = H_{q+r}k \circ s^r \circ h' \circ d$. По лемме 12.1, $H_{q+r}k$ — изоморфизм. По лемме 13.2, $\ker h' = \mathrm{Tors}$. Таким образом, $\ker h \circ f = \mathrm{Tors}$. $\square$

13.4. Утверждение. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и односвязное удобное пунктированное пространство X. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m X \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m X \xrightarrow{\;P\;} \pi_m X \xrightarrow{\;q\;} \pi_m X/\operatorname{Tors}$$

где J, P — основные отображения, q — проекция, имеем $J \overset{m-1}{-\!\!\!\triangleright} q \circ P$.

Доказательство. Пусть $r = m-1$, $n = 2m-2$ (считаем, что $m > 1$). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Psi_m X & \Pi_m X \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "F"'] & \pi_m X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & \pi_m X/\operatorname{Tors} \arrow[dd, "t"'] \\
\Psi_n M^r X & \Pi_n M^r X \arrow[l, "J'"'] \arrow[r, "P'"] & \pi_n M^r X \arrow[d, "h"'] & \\
 & & H_n M^r X \arrow[r, "p"] & H_n M^r X/\operatorname{Tors}
\end{tikzcd}$$

где F — преобразование развития, f — гомоморфизм развития, J', P' — основные отображения, h — гомоморфизм Гуревича, p — проекция, t — такой гомоморфизм, что $t \circ q = p \circ h \circ f$. Диаграмма коммутативна. По утверждению 13.1, F — r-точечное преобразование. Значит, по лемме 11.3, $J \overset{r}{-\!\!\!\triangleright} J' \circ F$. По лемме 10.1, $J' \overset{1}{-\!\!\!\triangleright} h \circ P'$. Значит, по лемме 2.4, $J' \circ F \overset{1}{-\!\!\!\triangleright} h \circ P' \circ F$. По п. а) леммы 2.2, $h \circ P' \circ F \overset{1}{-\!\!\!\triangleright} p \circ h \circ P' \circ F = t \circ q \circ P$. Так как, по утверждению 13.3, t — мономорфизм, то, по п. б) леммы 2.2, $t \circ q \circ P \overset{1}{-\!\!\!\triangleright} q \circ P$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \overset{r}{-\!\!\!\triangleright} q \circ P$. $\square$

14. Завершение доказательства

14.1. Утверждение. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и односвязное удобное пунктированное пространство X. Предположим, что группы $\pi_q X$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m X \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m X \xrightarrow{\;P\;} \pi_m X$$

где J, P — основные отображения, имеем $J -\!\!\!\triangleright P$.

Доказательство. Есть изоморфизм

$$s = q \times \prod_{p \in T} r_p \colon \pi_m X \to \pi_m X/\operatorname{Tors} \times \prod_{p \in T} W_p,$$

где $q\colon \pi_m X \to \pi_m X/\operatorname{Tors}$ — проекция, T — множество простых делителей порядка группы $\operatorname{Tors} \pi_m X$, для каждого $p \in T$ W_p — p-специальная абелева группа, $r_p\colon \pi_m X \to W_p$ — гомоморфизм. По утверждению 13.4, $J -\!\!\!\triangleright q \circ P$. По утверждению 9.2, $J -\!\!\!\triangleright r_p \circ P$, $p \in T$. По леммам 2.1 и 2.6, $J -\!\!\!\triangleright s \circ P$. Так как s — изоморфизм, то $J -\!\!\!\triangleright P$. $\square$

14.2. Утверждение. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$ и односвязное допустимое пунктированное пространство X. Предположим, что группы $\pi_q X$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены. Тогда в диаграмме*

$$\Psi_m X \xleftarrow{\;J\;} \Pi_m X \xrightarrow{\;P\;} \pi_m X$$

где J, P — основные отображения, имеем $J \mathrel{-\!\!\triangleright} P$.

Доказательство. Есть минимальное фибрантное симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$ и связанная эквивалентность $h\colon X \to |\boldsymbol{T}|$ (см. [10, §8]). Так как $\boldsymbol{T}$ — связный минимальный фибрант и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, счётны, то $\boldsymbol{T}$ — симплициальное счётное множество. Итак, $|\boldsymbol{T}|$ — удобное пунктированное пространство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Psi_m X \arrow[d, "\Psi_m h"'] & \Pi_m X \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Pi_m h"'] & \pi_m X \arrow[d, "\pi_m h"'] \\
\Psi_m|\boldsymbol{T}| & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "J'"'] \arrow[r, "P'"] & \pi_m|\boldsymbol{T}|
\end{tikzcd}$$

где J', P' — основные отображения. По п. а) леммы 2.2, $J \overset{1}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} \Psi_m h \circ J = J' \circ \Pi_m h$. По утверждению 14.1, $J' \mathrel{-\!\!\triangleright} P'$. Значит, по лемме 2.4, $J' \circ \Pi_m h \mathrel{-\!\!\triangleright} P' \circ \Pi_m h = \pi_m h \circ P$. Таким образом, по лемме 2.3, $J \mathrel{-\!\!\triangleright} \pi_m h \circ P$. Так как $\pi_m h$ — изоморфизм, то $J \mathrel{-\!\!\triangleright} P$. $\square$

Утверждение 14.3. *Пусть даны числа $r, m \in \mathbb{N}$, пунктированное пространство X, абелева группа V и связанное отображение $F\colon \Pi_m X \to V$. Пусть $J\colon \Pi_m X \to \Psi_m X$ — основное отображение. Предположим, что $J \overset{r}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} F$. Пусть $Q \subset (\Psi_m X)^{\otimes r}$ — подгруппа, порождённая элементами $\langle a\rangle^{\otimes r}$, $a \in \Pi_m X$. Тогда существует такой гомоморфизм $l\colon Q \to V$, что $l(\langle a\rangle^{\otimes r}) = F(a)$, $a \in \Pi_m X$.*

Доказательство. Для $t \in \mathbb{N}_+$ определим гомоморфизм $b_t\colon \langle X\rangle^{\otimes t} \to \langle X\rangle$, для $x_1, \ldots, x_t \in X$ полагая

$$b_t(\text{‘}x_1\text{’} \otimes \ldots \otimes \text{‘}x_t\text{’}) = \begin{cases} \text{‘}x_1\text{’} & \text{при } x_1 = \ldots = x_t, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $t \in \mathbb{N}_+$ определим гомоморфизм $B_t\colon (\Psi_m X)^{\otimes t} \to \Psi_m X$, полагая $B_t(w_1 \otimes \ldots \otimes w_t)(\text{‘}z\text{’}) = b_t(w_1(\text{‘}z\text{’}) \otimes \ldots \otimes w_t(\text{‘}z\text{’}))$, $z \in S^m$, $w_1, \ldots, w_t \in \Psi_m X$. Для $t \in \mathbb{N}_+$ и $a \in \Pi_m X$ имеем $B_t(\langle a\rangle^{\otimes t}) = \langle a\rangle$, так как для $z \in S^m$ имеем $B_t(\langle a\rangle^{\otimes t})(\text{‘}z\text{’}) = b_t(\langle a\rangle(\text{‘}z\text{’})^{\otimes t}) = b_t(\text{‘}a(z)\text{’}^{\otimes t}) = \text{‘}a(z)\text{’} = \langle a\rangle(\text{‘}z\text{’})$.

Для $s = 1, \ldots, r$ определим гомоморфизм $G_s\colon (\Psi_m X)^{\otimes r} \to (\Psi_m X)^{\otimes s}$, полагая $G_s(w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) = w_1 \otimes \ldots \otimes w_{s-1} \otimes B_{r-s+1}(w_s \otimes \ldots \otimes w_r)$, $w_1, \ldots, w_r \in \Psi_m X$. Для $a \in \Pi_m X$ имеем $G_s(\langle a\rangle^{\otimes r}) = \langle a\rangle^{\otimes(s-1)} \otimes B_{r-s+1}(\langle a\rangle^{\otimes(r-s+1)}) = \langle a\rangle^{\otimes(s-1)} \otimes \langle a\rangle = \langle a\rangle^{\otimes s}$.

Пусть

$$P \subset \bigoplus_{s=1}^{r} (\Psi_m X)^{\otimes s}$$

— подгруппа, порождённая элементами $(\langle a\rangle^{\otimes s})_{s=1}^{r}$, $a \in \Pi_m X$. Так как $\operatorname{Tors} \Psi_m X = 0$ и $J \overset{r}{\mathrel{-\!\!\triangleright}} F$, то, по следствию 2.11, есть такой гомоморфизм $k\colon P \to V$, что $k((\langle a\rangle^{\otimes s})_{s=1}^{r}) = F(a)$, $a \in \Pi_m X$.

Для $z \in Q$ имеем $(G_s(z))_{s=1}^r \in P$, так как для $a \in \Pi_m X$ имеем $(G_s(\langle a \rangle^{\otimes r}))_{s=1}^r = (\langle a \rangle^{\otimes s})_{s=1}^r \in P$. Положим $l(z) = k((G_s(z))_{s=1}^r)$, $z \in Q$. Для $a \in \Pi_m X$ имеем $l(\langle a \rangle^{\otimes r}) = k((G_s(\langle a \rangle^{\otimes r}))_{s=1}^r) = k((\langle a \rangle^{\otimes s})_{s=1}^r) = F(a)$. $\square$

Собственно доказательство теоремы 1. Пусть $J\colon \Pi_m X \to \Psi_m X$, $P\colon \Pi_m X \to \pi_m X$ — основные отображения. По утверждению 14.2, $J \rhd P$. По лемме 2.1, для любого достаточно большого $r \in \mathbb{N}$ имеем $J \overset{r}{\rhd} P$. Осталось сослаться на утверждение 14.3. $\square$

15. Доказательство леммы 9.1

15.1. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}_+$, конечные абелевы группы U, V и гомоморфизм $e\colon U \to V$. Предположим, что $mU = 0$ и $e/d\colon U/d \to V/d$ — мономорфизм для любого делителя $d \in \mathbb{N}_+$ числа m. Тогда существует такой гомоморфизм $h\colon V \to U$, что $h \circ e = \mathrm{id}$.*

Доказательство. e $(= e/m)$ — мономорфизм. Возьмём произвольное $q \in \mathbb{N}_+$. По [4, следствие 28.3], достаточно показать, что e/q — мономорфизм. Пусть d — наибольший общий делитель чисел q и m. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U/q & \xrightarrow{e/q} & V/q \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p'}\big\downarrow \\ U/d & \xrightarrow{e/d} & V/d \end{array}$$

где p, p' — гомоморфизмы "приведения по модулю d". Легко видеть, что p — изоморфизм. По предположению, e/d — мономорфизм. Значит, e/q — мономорфизм. $\square$

Системы. Пусть $\sigma = \{1, 2, \ldots, \infty\}$. *Системой* объектов и морфизмов какой-либо категории называем такой набор (A_s, f_s^t) объектов A_s, $s \in \sigma$, и морфизмов $f_s^t\colon A_t \to A_s$, $s, t \in \sigma$, $s \leqslant t$, что $f_s^s = \mathrm{id}$, $s \in \sigma$, и $f_r^s \circ f_s^t = f_r^t$, $r, s, t \in \sigma$, $r \leqslant s \leqslant t$. Систему (V_s, l_s^t) абелевых групп и гомоморфизмов называем *правильной*, если V_∞ — проективный предел групп V_s, $s < \infty$, точнее, если для любой такой последовательности $(v_s \in V_s)_{s<\infty}$, что $l_s^t(v_t) = v_s$, $s \leqslant t < \infty$, существует и единственен такой элемент $v_\infty \in V_\infty$, что $l_s^\infty(v_\infty) = v_s$, $s < \infty$.

15.2. Лемма. *Пусть даны число $q \in \mathbb{N}_+$ и правильная система абелевых групп и гомоморфизмов (V_s, l_s^t), где группы V_s, $s < \infty$, конечны. Тогда система $(V_s/q, l_s^t/q)$ тоже правильна.*

Это легко проверить, используя, что проективный предел последовательности непустых конечных множеств непуст. $\square$

15.3. Лемма. *Пусть дана правильная система конечных абелевых групп и гомоморфизмов (V_s, l_s^t). Тогда для любого достаточно большого $s < \infty$ существует такой гомоморфизм $h\colon V_s \to V_\infty$, что $h \circ l_s^\infty = \mathrm{id}$.*

Доказательство. Для любого $q \in \mathbb{N}_+$ система $(V_s/q, l_s^t/q)$ правильна (по лемме 15.2) и, следовательно, l_s^∞/q — мономорфизм для достаточно больших $s < \infty$ (так как группа V_∞/q конечна). Если $s < \infty$ достаточно велико, то l_s^∞/d — мономорфизм для любого делителя $d \in \mathbb{N}_+$ порядка группы V_∞, и нужный гомоморфизм даётся леммой 15.1. $\square$

Определение. Пусть даны простое число p, абелевы группы U, V и гомоморфизм $k\colon U \to V$. Пусть $\hat{U}$ — p-пополнение (= p-проконечное пополнение) группы U, $c\colon U \to \hat{U}$ — канонический гомоморфизм. Называем гомоморфизм k *p-пополняющим*, если существует такой изоморфизм $i\colon \hat{U} \to V$, что $i \circ c = k$.

15.4. Утверждение. *Пусть даны простое число p, конечно порождённая абелева группа U, правильная система абелевых групп и гомоморфизмов (V_s, l_s^t), где группы V_s, $s < \infty$, p-специальны, p-пополняющий гомоморфизм $k\colon U \to V_\infty$, p-специальная абелева группа W и гомоморфизм $r\colon U \to W$. Тогда существуют такие номер $s < \infty$ и гомоморфизм $g\colon V_s \to W$, что $g \circ l_s^\infty \circ k = r$.*

Доказательство. Пусть q — такая степень числа p, что $qW = 0$. По лемме 15.2, система $(V_s/q, l_s^t/q)$ правильна. Так как группа V_∞ изоморфна p-пополнению конечно порождённой группы U, то группа V_∞/q конечна (см. [7, Ch. VI, 5.2]). По лемме 15.3, есть такие номер $s < \infty$ и гомоморфизм $h\colon V_s/q \to V_\infty/q$, что $h \circ (l_s^\infty/q) = \mathrm{id}$. Так как k — p-пополняющий гомоморфизм, то есть такой гомоморфизм $G\colon V_\infty \to W$, что $G \circ k = r$. Так как $qW = 0$, то есть такой гомоморфизм $G'\colon V_\infty/q \to W$, что $G'(X|_q) = G(X)$, $X \in V_\infty$. Пусть $g' = G' \circ h\colon V_s/q \to W$. Определим искомый гомоморфизм $g\colon V_s \to W$, полагая $g(x) = g'(x|_q)$, $x \in V_s$. Для $u \in U$ имеем $g(l_s^\infty(k(u))) = g'(l_s^\infty(k(u))|_q) = G'(h(l_s^\infty(k(u))|_q)) = G'(h((l_s^\infty/q)(k(u)|_q))) = G'(k(u)|_q) = G(k(u)) = r(u)$. $\square$

15.5. Утверждение. *Пусть даны простое число p, число $m \in \mathbb{N}_+$, односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}$, p-специальная абелева группа W и гомоморфизм $r\colon \pi_m|\boldsymbol{T}| \to W$. Тогда существуют такие односвязное симплициальное конечное пунктированное множество $\boldsymbol{T}'$, гомоморфизм $r'\colon \pi_m|\boldsymbol{T}'| \to W$ и симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}'$, что $r' \circ \pi_m|\boldsymbol{h}| = r$ и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}'|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны.*

Доказательство. Пусть $R = \mathbb{Z}_p$. Рассмотрим систему симплициальных пунктированных множеств и симплициальных связанных отображений $(R_s\boldsymbol{T}, \boldsymbol{f}_s^t)$, см. [7, Ch. I, §4]. По построению, $R_s\boldsymbol{T}$, $s < \infty$, — симплициальные конечные множества. По [7, Ch. I, 6.2 (i)], они односвязны. Значит, по теореме Серра, группы $\pi_q|R_s\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, $s < \infty$, конечно порождены. По [7, Ch. III, 5.6], они R-нильпотентны. Таким образом, они p-специальны. Рассмотрим систему абелевых групп и гомоморфизмов $(\pi_m|R_s\boldsymbol{T}|, \pi_m|\boldsymbol{f}_s^t|)$. Так как группы $\pi_{m+1}|R_s\boldsymbol{T}|$, $s < \infty$, конечны, то, по [7, Ch. I, 4.3], эта система правильна. Пусть $\boldsymbol{c}\colon \boldsymbol{T} \to R_\infty\boldsymbol{T}$ — каноническое симплициальное связанное отображение, см. [7, Ch. I, §4]. Так как симплициальное множество $\boldsymbol{T}$ односвязно и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены (по теореме Серра), то, по [7, Ch. VI, §5, между строк], $\pi_m|\boldsymbol{c}|$ — p-пополняющий гомоморфизм. По утверждению 15.4, есть такие номер $s < \infty$ и гомоморфизм $g\colon \pi_m|R_s\boldsymbol{T}| \to W$, что $g \circ \pi_m|\boldsymbol{f}_s^\infty| \circ \pi_m|\boldsymbol{c}| = r$. Положим $\boldsymbol{T}' = R_s\boldsymbol{T}$, $r' = g$ и $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}_s^\infty \circ \boldsymbol{c}$. $\square$

Собственно доказательство леммы 9.1. Так как симплициальное множество $\boldsymbol{T}$ односвязно и группы $H_q|\boldsymbol{T}|$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечно порождены (по теореме Серра), то есть симплициальное конечное пунктированное множество $\tilde{\boldsymbol{T}}$ и $(m+1)$-связное симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{T}$ (их нетрудно построить индукцией по m, на каждом шаге применяя относительную теорему Гуревича, ср. [9, Proposition 4C.1]). Пусть $\tilde{r} = r \circ (\pi_m|\boldsymbol{f}|)^{-1}\colon \pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}| \to W$. По утверждению 15.5, есть такие односвязное симплициальное пунктированное множество $\tilde{\boldsymbol{T}}'$, гомоморфизм $\tilde{r}'\colon \pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}'| \to W$ и симплициальное связанное отображение $\tilde{\boldsymbol{h}}\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \tilde{\boldsymbol{T}}'$, что $\tilde{r}' \circ \pi_m|\tilde{\boldsymbol{h}}| = \tilde{r}$ и группы $\pi_q|\tilde{\boldsymbol{T}}'|$, $q \in \mathbb{N}_+$, p-специальны. Есть минимальное фибрантное симплициальное пунктированное множество $\boldsymbol{T}'$ с $\pi_q|\boldsymbol{T}'| = 0$, $q > m$, и $(m+1)$-связное симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}'\colon \tilde{\boldsymbol{T}}' \to \boldsymbol{T}'$ (см. [10, §§8, 9]). Пусть $r' = \tilde{r}' \circ (\pi_m|\boldsymbol{f}'|)^{-1}\colon \pi_m|\boldsymbol{T}'| \to W$. Так как симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{f}$ $(m+1)$-связно, а $\pi_q|\boldsymbol{T}'| = 0$, $q > m$, причём $\boldsymbol{T}'$ — фибрант, то есть такое симплициальное связанное отображение $\boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}'$, что симплициальные связанные отображения $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' \circ \tilde{\boldsymbol{h}}\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{T}'$ гомотопны (“теория препятствий”). Легко проверить, что $r' \circ \pi_m|\boldsymbol{h}| = r$. Так как $\boldsymbol{T}'$ — связный минимальный фибрант и группы $\pi_q|\boldsymbol{T}'|$, $q \in \mathbb{N}_+$, конечны, то $\boldsymbol{T}'$ — симплициальное конечное множество. □

16. Доказательство леммы 12.1

Послойное сжатие. Пусть даны пространство B, топологическая пара (E, E') и непрерывные отображения $p\colon E \to B$ и $p'\colon E' \to B$, причём p' — сужение отображения p. Пусть E'' — пространство, получающееся из пространства $E \sqcup B$ отождествлением каждой точки $X \in E'$ с точкой $p'(X)$. Пусть $p''\colon E'' \to B$ — отображение, накрываемое отображением $p \sqcup \mathrm{id}\colon E \sqcup B \to B$. Пусть $(E, p)/(E', p') = (E'', p'')$.

16.1. Лемма. *Пусть даны хаусдорфово пространство B, замкнутая пара Борсука (E_0, E_1), расслоения Гуревича $p_0\colon E_0 \to B$ и $p_1\colon E_1 \to B$, причём p_1 — сужение отображения p_0. Пусть $(E_2, p_2) = (E_0, p_0)/(E_1, p_1)$. Тогда p_2 — расслоение Серра.*

Доказательство. Пусть $i\colon E_1 \to E_0$ — включение, $c\colon E_0 \to E_2$ — проекция. Определим отображение $f\colon \Gamma B \to B$, полагая $f(u) = u(0)$, $u \in \Gamma B$. f — расслоение Гуревича. Пусть $Q_k = \{\, (X, u) \in E_k \times \Gamma B : p_k(X) = f(u) \,\}$, $k = 0, 1, 2$. Имеем $Q_1 \subset Q_0$. Определим отображение $d\colon Q_0 \to Q_2$, полагая $d(X, u) = (c(X), u)$, $(X, u) \in Q_0$. Для $k = 0, 1, 2$ определим отображение $h_k\colon \Gamma E_k \to Q_k$, полагая $h_k(U) = (U(0), p_k \circ U)$, $U \in \Gamma E_k$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma E_1 & \xrightarrow{\Gamma i} & \Gamma E_0 & \xrightarrow{\Gamma c} & \Gamma E_2 \\
{\scriptstyle h_1}\downarrow & & {\scriptstyle h_0}\downarrow & & {\scriptstyle h_2}\downarrow \\
Q_1 & \xrightarrow{j} & Q_0 & \xrightarrow{d} & Q_2
\end{array}$$

где j — включение. Определим отображение $g\colon Q_0 \to E_0$, полагая $g(X, u) = X$, $(X, u) \in Q_0$. Так как (E_0, E_1) — замкнутая пара Борсука, g — расслоение Гуревича (индуцированное расслоением f посредством отображения p_0) и $Q_1 = g^{-1}(E_1)$, то, по [3, предложение 5 лекции 2], (Q_0, Q_1) — пара Борсука, очевидно, замкнутая. Так как p_1 — расслоение Гуревича, то есть такое непрерывное отображение $s_1\colon Q_1 \to \Gamma E_1$, что $h_1 \circ s_1 = \mathrm{id}$. Применяя к паре (Q_0, Q_1) и расслоению p_0 теорему о продолжении накрывающей гомотопии [3, теорема 2 лекции 2], получаем такое непрерывное отображение $s_0\colon Q_0 \to \Gamma E_0$, что $h_0 \circ s_0 = \mathrm{id}$ и $s_0 \circ j = \Gamma i \circ s_1$. Очевидно? есть и единственно такое отображение $s_2\colon Q_2 \to \Gamma E_2$, что $s_2 \circ d = \Gamma c \circ s_0$. Нетрудно проверить, что оно слабо непрерывно. Ясно, что $h_2 \circ s_2 = \mathrm{id}$. Отсюда следует, что p_2 — расслоение Серра. □

16.2. Лемма. *Пусть дано удобное пространство X. Пусть $D \subset X^{\times 2}$ — диагональ, $A = X^{\times 2} \times \{0\} \cup D \times I \subset X^{\times 2} \times I$, $p\colon X^{\times 2} \times I \to X$ — первая проекция. Тогда существует такая ретракция $R\colon X^{\times 2} \times I \to A$, что $p|_A \circ R = p$.*

Доказательство. По теореме Борсука, есть ретракция $r\colon X^{\times 2} \times I \to A$. Пусть $f, g\colon X^{\times 2} \times I \to X$, $k\colon X^{\times 2} \times I \to I$ — такие отображения, что $r(Z) = (f(Z), g(Z), k(Z))$, $Z \in X^{\times 2} \times I$. Определим отображения $G\colon X^{\times 2} \times I \to X$ и $K\colon X^{\times 2} \times I \to I$, для $Z = (x, y, t) \in X^{\times 2} \times I$ полагая

$$G(Z) = \begin{cases} g(x, y, 3k(Z)), & \text{если } 3k(Z) \leqslant t, \\ f(x, y, 2t - 3k(Z)), & \text{если } t \leqslant 3k(Z) \leqslant 2t \text{ и } f(Z) = g(Z), \\ x, & \text{если } 3k(Z) \geqslant 2t \text{ и } f(Z) = g(Z), \end{cases}$$
$$K(Z) = m(3k(Z) - 2t),$$

где $m\colon \mathbb{R} \to I$ — возрастающая ретракция. Положим $R(Z) = (p(Z), G(Z), K(Z))$, $Z \in X^{\times 2} \times I$. $\square$

16.3. Лемма. *Пусть даны число $n \in \mathbb{N}_+$, n-связная удобная пунктированная пара (B, A), где пространства B, A односвязны, односвязное удобное пунктированное пространство F и удобное связанное отображение $g\colon B \to F$. Пусть $G \subset B \times F$ — график отображения g. Тогда пара $(B \times F, A \times F \cup G)$ $(n+2)$-связна.*

Доказательство. Все рассматриваемые ниже пространства (а следовательно, и пары) односвязны. Поэтому все гомотопические множества, включая относительные, — абелевы группы. Возьмём произвольное $q \in \mathbb{N}_+$. Пусть $F' = \{*\} \times F \subset B \times F$, $k\colon F' \to (B \times F, G)$, $j\colon F' \to (A \times F, A \times F \cap G)$ — включения.

Покажем, что $\pi_q k$ и $\pi_q j$ — изоморфизмы. Пусть $p\colon B \times F \to B$ — проекция. Тогда $p|_G$ — гомеоморфизм, а $(p|_G)^{-1} \circ p\colon B \times F \to G$ — ретракция. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_q G \arrow[r] \arrow[d, "\pi_q(p|_G)"'] & \pi_q(B \times F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_q(B \times F, G) \arrow[r] & 0 \\
0 & \pi_q B \arrow[l] & \pi_q(B \times F) \arrow[l, "\pi_q p"'] & \pi_q F' \arrow[l] \arrow[u, "\pi_q k"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

где стрелки без надписи индуцированы включениями. Строки точны. Так как $\pi_q(p|_G)$ — изоморфизм, то $\pi_q k$ — тоже изоморфизм. Аналогично, $\pi_q j$ — изоморфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi_q F' \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi_q j"'] & & \pi_q F' \arrow[d, "\pi_q k"'] \\
\pi_q(A \times F, A \times F \cap G) \arrow[r, "\pi_q e"] & \pi_q(A \times F \cup G, G) \arrow[r, "\pi_q i"] & \pi_q(B \times F, G)
\end{tikzcd}$$

где e и i — включения. Пара $(A \times F, A \times F \cap G)$ односвязна. Пара $(G, A \times F \cap G)$ гомеоморфна паре (B, A) и, следовательно, n-связна. По теореме о гомотопическом вырезании, $\pi_q e$ — эпиморфизм при $q \leqslant n+1$. Из диаграммы, $\pi_q i$ — эпиморфизм при любом q и изоморфизм при $q \leqslant n+1$. Сравнивая гомотопические последовательности пар $(A\times F\cup G, G)$ и $(B\times F, G)$, получаем, что пара $(B\times F, A\times F\cup G)$ $(n+2)$-связна. $\square$

Собственно доказательство леммы 12.1. Пусть $V_0 = \Delta^r \times X^{\times(r+1)}$, $f_0\colon V_0 \to X$ — последняя проекция. Пусть

$$V_1 = \bigcup_{s=0}^{r} \{\, ((z_1,\dots,z_r), x_1,\dots,x_{r+1}) \in \Delta^r \times X^{\times(r+1)} : z_s = z_{s+1},\, x_s = x_{s+1}\,\} \subset V_0,$$

где $z_0 = 0$, $z_{r+1} = 1$, $x_0 = *$. Пусть $f_1\colon V_1 \to X$ — сужение отображения f_0. Внизу показано, что f_1 — расслоение Гуревича. Пусть $(V,f) = (V_0,f_0)/(V_1,f_1)$. По лемме 16.1, f — расслоение Серра. Пусть $V_0^* = f_0^{-1}(*)$, $V_1^* = f_1^{-1}(*)$, $V^* = V_0^*/V_1^*$, $i\colon V^* \to V$ — вложение, накрываемое включением $V_0^* \to V_0$.

Пусть $P = \{\, u \in \Gamma X : u(0) = *\,\}$, $W_0 = \Delta^r \times P$. Определим отображение $g_0\colon W_0 \to X$, полагая $g_0(z,u) = u(1)$, $z \in \Delta^r$, $u \in P$. Пусть $W_1 = \partial\Delta^r \times P \subset W_0$, $g_1\colon W_1 \to X$ — сужение отображения g_0. Понятно, что g_0 и g_1 — расслоения Гуревича. Пусть $(W,g) = (W_0,g_0)/(W_1,g_1)$. По лемме 16.1, g — расслоение Серра. Пусть $W_0^* = g_0^{-1}(*)$, $W_1^* = g_1^{-1}(*)$, $j\colon W^* \to W$ — вложение, накрываемое включением $W_0^* \to W_0$.

Определим отображение $h_0\colon W_0 \to V_0$, для $z = (z_1,\dots,z_r) \in \Delta^r$, $u \in P$ полагая $h_0(z,u) = (z, u(z_1),\dots,u(z_r),u(1))$. Имеем $f_0 \circ h_0 = g_0$, $h_0(W_1) \subset V_1$. Пусть $h\colon W \to V$ — отображение, накрываемое отображением h_0, $h_0^*\colon W_0^* \to V_0^*$ — сокращение отображения h_0, $h^*\colon W^* \to V^*$ — отображение, накрываемое отображением h_0^*.

Пусть $K = \Delta^r \times \{*\} \subset V_0$, $\tilde V = V_0/(V_1 \cup K)$, $\tilde V^* = V_0^*/(V_1^* \cup K)$. Пусть $c\colon V \to \tilde V$ и $c^*\colon V^* \to \tilde V^*$ — отображения, накрываемые отображениями $\mathrm{id}\colon V_0 \to V_0$ и $\mathrm{id}\colon V_0^* \to V_0^*$ (соответственно).

Пусть $L = \Delta^r \times \{*\} \subset W_0$, $\tilde W = W_0/(W_1 \cup L)$, $\tilde W^* = W_0^*/(W_1^* \cup L)$. Пространство $\tilde W$ гомеоморфно пространству $S^r P$ и, следовательно, стягиваемо. Пусть $d\colon W \to \tilde W$ и $d^*\colon W^* \to \tilde W^*$ — отображения, накрываемые отображениями $\mathrm{id}\colon W_0 \to W_0$ и $\mathrm{id}\colon W_0^* \to W_0^*$ (соответственно).

Имеем $h_0(W_1 \cup L) \subset V_1 \cup K$. Пусть $\tilde h\colon \tilde W \to \tilde V$ — отображение, накрываемое отображением h_0. Имеем $h_0^*(W_1^* \cup L) \subset V_1^* \cup K$. Пусть $\tilde h^*\colon \tilde W^* \to \tilde V^*$ — отображение, накрываемое отображением h_0^*.

Пусть $Y_0 = X^{\times(r+1)}$,

$$Y_1 = \bigcup_{s=0}^{r} \{\, (x_1,\dots,x_{r+1}) \in X^{\times(r+1)} : x_s = x_{s+1}\,\} \subset Y_0,$$

где $x_0 = *$. Пусть $Z = Y_0/Y_1$. Пусть $p_0\colon V_0 \to Y_0$ — проекция. Ясно, что p_0 — эквивалентность. Пусть $p_1\colon V_1 \cup K \to Y_1$ — сокращение отображения p_0. Прообраз каждой точки при отображении p_1 стягиваем, так как это либо симплекс Δ^r, либо объединение нескольких, от одной до r, его $(r-1)$-мерных граней. Поэтому p_1 — тоже эквивалентность. Пусть $q\colon \tilde V \to Z$ — отображение, накрываемое отображением p_0. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
V_1 \cup K & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & \tilde V \\
{\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle p_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow \\
Y_1 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Z
\end{array}$$

с кофибрационными строками. Так как p_0 и p_1 — эквивалентности, то q — тоже эквивалентность. Пусть $Y_0^* = X^{\times r} \times \{*\} \subset Y_0$, $Y_1^* = Y_0^* \cap Y_1$, $Z^* = Y_0^*/Y_1^*$, $p_0^*\colon V_0^* \to Y_0^*$ — сокращение отображения p_0, $p_1^*\colon V_1^* \to Y_1^*$ — сокращение отображения p_0^*, $q^*\colon \tilde{V}^* \to Z^*$ — отображение, накрываемое отображением p_0^*. Аналогично отображениям p_0, p_1 и q, отображения p_0^*, p_1^* и q^* — эквивалентности.

Пусть $l = 2r + 1$. Индукцией по r, используя лемму 16.3, получаем, что пара (Y_0, Y_1) l-связна. Значит, пространство Z l-связно и, следовательно, пространство $\tilde{V}$ l-связно. Так как пространство $\tilde{W}$ стягиваемо, то отображение $\tilde{h}$ l-связно. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^r \vee X & \longrightarrow & W & \xrightarrow{d} & \tilde{W} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{h}}\downarrow \\ S^r \vee X & \longrightarrow & V & \xrightarrow{c} & \tilde{V} \end{array}$$

с кофибрационными строками. Значит, отображение h l-связно (так как пространства V и W односвязны). Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} W^* & \xrightarrow{j} & W & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle h^*}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \\ V^* & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

с фибрационными строками. Значит, отображение h^* l-связно. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^r & \longrightarrow & W^* & \xrightarrow{d^*} & \tilde{W}^* \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle h^*}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{h}^*}\downarrow \\ S^r & \longrightarrow & V^* & \xrightarrow{c^*} & \tilde{V}^* \end{array}$$

с кофибрационными строками. Значит, отображение $\tilde{h}^*$ l-связно.

Определим отображение $E\colon I^r \times \Omega X \to W_0^*$, полагая $E(t, u) = (t^{\triangle}, u)$, $(t, u) \in I^r \times \Omega X$. Пусть $e\colon S^r \Omega X \to \tilde{W}^*$ — отображение, накрываемое отображением E. Легко видеть, что e — гомеоморфизм. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^r \Omega X & & \xrightarrow{k} & & M^r X \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & & & \downarrow \\ \tilde{W}^* & \xrightarrow{\tilde{h}^*} & \tilde{V}^* & \xrightarrow{q^*} & Z^* \end{array}$$

где вторая вертикальная стрелка — очевидный гомеоморфизм. Так как q^* — эквивалентность, то отображение k l-связно.

Почему f_1 — расслоение Гуревича? Пусть $D \subset X^{\times 2}$ — диагональ, $A = X^{\times 2} \times \{0\} \cup D \times I \subset X^{\times 2} \times I$, $p\colon X^{\times 2} \times I \to X$ — первая проекция. По лемме 16.2, есть такая ретракция $R\colon X^{\times 2} \times I \to A$, что $p|_A \circ R = p$. Для $x \in X$ пусть $A_x = X \times \{0\} \cup \{x\} \times I \subset X \times I$, $R_x\colon X \times I \to A_x$ — ретракция, определённая условием $R(x, y, t) = (x, R_x(y, t))$, $y \in X$, $t \in I$.

Пусть дана точка $B = (z^0, x_1^0, \ldots, x_{r+1}^0) \in V_1$, где $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_r^0) \in \Delta^r$. Пусть $b = f_1(B) = x_{r+1}^0$. Пусть дан такой путь $u \in \Gamma X$, что $u(0) = b$. Построим такой путь $U \in \Gamma V_1$, что $U(0) = B$ и $f_1 \circ U = u$. Определим отображение $g\colon A_b \to X$, полагая $g(y,0) = y$, $y \in X$, и $g(b,t) = u(t)$, $t \in I$. Пусть $h = g \circ R_b\colon X \times I \to X$. Для $t \in I$ положим $U(t) = (z^0, x_1, \ldots, x_{r+1})$, где $x_s = h(x_s^0, tz_s^0)$, $s = 1, \ldots, r+1$, где $z_{r+1}^0 = 1$. Путь U непрерывно зависит от точки b и пути u. $\square$

Литература

1. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*, Наука, 1988.
2. Ю. В. Матиясевич, *Десятая проблема Гильберта*, Наука, 1993.
3. М. М. Постников, *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*, Наука, 1984.
4. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, 1974.
5. Р. М. Хейн, *Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов*, Наука, 1988.
6. J. F. Adams, P. J. Hilton, *On the chain algebra of a loop space*, Comment. Math. Helvet. **30** (1956), 305–330.
7. A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Springer, 1972.
8. P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Birkhäuser, 1999.
9. A. Hatcher, *Algebraic topology*, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`.
10. J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, van Nostrand, 1968.
11. J. W. Milnor, J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math. **81** (1965), 211–264.
12. D. L. Rector, *Steenrod operations in the Eilenberg–Moore spectral sequence*, Comment. Math. Helvet. **45** (1970), 540–552.