ПОРЯДОК ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ БРУШЛИНСКОГО

С. С. Подкорытов

Рассмотрим произвольный компактный полиэдр X. Гомотопические классы непрерывных отображений полиэдра X в окружность $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ образуют абелеву группу $B(X)$ относительно операции, определяемой поточечным умножением отображений. Группа $B(X)$ называется *группой Брушлинского* полиэдра X, см. [1] (известно, что она канонически изоморфна группе $H^1(X;\mathbf{Z})$ и является свободной абелевой группой конечного ранга). Гомотопический класс отображения u будем обозначать $[u]$.

Число элементов множества E будем обозначать $|E|$. Конечный набор пар $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$, где $a_j \in \mathbf{Z}$, $u_j \colon X \to T$ — непрерывные отображения, будем называть *r-когерентным* ($0 \leqslant r < \infty$), если для любого множества $E \subset X \times T$ с $|E| \leqslant r$ сумма чисел a_j по тем $j \in J$, для которых $u_j(x) = t$ при $(x,t) \in E$, равна 0.

Рассмотрим произвольное отображение $F \colon B(X) \to Q$, где Q — абелева группа. Определим его *порядок* $\operatorname{ord} F = 0, 1, \dots, \infty$ условием, что неравенство $\operatorname{ord} F \leqslant r$ ($0 \leqslant r < \infty$) равносильно тому, что для любого r-когерентного набора $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$ имеем
$$\sum_{j\in J} a_j F([u_j]) = 0.$$

Для отображения абелевых групп $f \colon M \to N$ его *степень* $\deg f = 0, 1, \dots, \infty$ корректно определена условием, что неравенство $\deg f \leqslant r$ ($0 \leqslant r < \infty$) равносильно тому, что для любых $m_k \in M$, $k = 0, \dots, r$, имеем
$$\sum_{e_0,\dots,e_r=0,1} (-1)^{e_0+\dots+e_r} f(e_0 m_0 + \ldots + e_r m_r) = 0.$$

Правдоподобно, что $\operatorname{ord} F = \deg F$. Здесь доказан ряд более слабых утверждений, в частности, показано, что это так, если группа Q не имеет кручения (теорема 3, утверждение 7).

1. Лемма. *Пусть $f \colon \mathbf{Z}^d \to N$ — отображение абелевых групп,* $\deg f \leqslant r < \infty$. *Тогда существует конечное разложение*
$$f(m) = \sum_k q_k(m) n_k, \qquad m \in \mathbf{Z}^d,$$
где $q_k \colon \mathbf{Z}^d \to \mathbf{Z}$ — отображения, задаваемые многочленами степени не выше r с рациональными коэффициентами, $n_k \in N$.

Это легко доказывается индукцией по d.

2. Лемма. *Пусть* $f\colon M \to N$ *— отображение абелевых групп,* $\deg f \leqslant r < \infty$*. Пусть дан конечный набор троек* $\{(a_j, s_j, m_j)\}_{j\in J}$*, где* $a_j \in \mathbf{Z}$*,* s_j *—* $\mathbf{Z}$*-значные функции на некотором множестве* Y*,* $m_j \in M$*. Предположим, что (*) для любого множества* $E \subset Y$ *с* $|E| \leqslant r$ *имеем*

$$\sum_{j\in J} a_j \prod_{y\in E} s_j(y) = 0$$

и (**) для любых $b_j \in \mathbf{Z}$*,* $j \in J$*, соотношение*

$$\sum_{j\in J} b_j s_j = 0$$

влечёт соотношение

$$\sum_{j\in J} b_j m_j = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j\in J} a_j f(m_j) = 0.$$

Доказательство. Пусть S — группа функций на множестве Y, порождённая функциями s_j, $j \in J$. Легко видеть, что группа S свободна, а $\mathbf{Q}$-модуль $\mathrm{Hom}\,(S, \mathbf{Q})$ порождён гомоморфизмами $s \mapsto s(y)$, $y \in Y$. Из условия (*) следует, что если отображение $q\colon S \to \mathbf{Q}$ в каком-то базисе группы S задаётся многочленом степени не выше r, то

$$\sum_{j\in J} a_j q(s_j) = 0.$$

Из условия (**) следует, что существует такой гомоморфизм $t\colon S \to M$, что $t(s_j) = m_j$ для всех $j \in J$. Применим лемму 1 к отображению $f \circ t$. $\square$

3. Теорема. $\mathrm{ord}\, F \leqslant \deg F$.

Доказательство. Предположим, что $\deg F \leqslant r < \infty$. Пусть $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$ — r-когерентный набор. Определим функции $s_j\colon X \times T \to \mathbf{Z}$, $j \in J$, формулой

$$s_j(x,t) = \begin{cases} 1, \text{ если } u_j(x) = t, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases} \qquad x \in X,\ t \in T.$$

Для любого множества $E \subset X \times T$ с $|E| \leqslant r$ имеем

$$\sum_{j\in J} a_j \prod_{(x,t)\in E} s_j(x,t) = 0.$$

Если для некоторых $b_j \in \mathbf{Z}$, $j \in J$, имеем

$$\sum_{j\in J} b_j s_j = 0,$$

то, как легко видеть,

$$\prod_{j\in J} u_j(x)^{b_j} = 1, \qquad x \in X,$$

и, следовательно,
$$\sum_{j\in J} b_j[u_j]=0.$$
Согласно лемме 2,
$$\sum_{j\in J} a_j F([u_j])=0.$$
Таким образом, $\operatorname{ord} F \leqslant r$. □

4. Теорема. *Пусть m — размерность полиэдра X. Тогда* $\deg F \leqslant m \operatorname{ord} F$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{ord} F \leqslant r < \infty$. Пусть $s=mr$, $p_k\colon T^{s+1}\to T$, $k=0,\ldots,s$, — проекции. Возьмём произвольные элементы $v_k\in B(X)$, $k=0,\ldots,s$. Пусть $R\subset T^{s+1}$ — множество, образованное теми наборами $(t_0,\ldots,t_s)$, у которых число компонент, равных 1, больше m. Выберем такое отображение $A\colon X\to T^{s+1}$, что $[p_k\circ A]=v_k$, $k=0,\ldots,s$, причём $A(X)\cap R=\varnothing$ (это возможно, так как множество R имеет коразмерность $m+1$). Выберем настолько малое $c>0$, чтобы множество $A(X)$ не пересекало окрестность множества R, образованную теми наборами $(t_0,\ldots,t_s)$, у которых число таких k, что $|t_k-1|<c$, больше m. Пусть $g\colon T\to T$ — такое непрерывное отображение, гомотопное тождественному, что $g(t)=1$ при $|t-1|\geqslant c$. Положим $u_k=g\circ p_k\circ A$, $k=0,\ldots,s$. Для каждого набора $e=(e_0,\ldots,e_s)$, $e_k=0,1$, $k=0,\ldots,s$, определим отображение $u^e\colon X\to T$ формулой $u^e(x)=u_0(x)^{e_0}\ldots u_s(x)^{e_s}$. Для любой точки $x\in X$ значение $u^e(x)$ зависит не более чем от m компонент набора e. Поэтому для любого множества $D\subset X$ с $|D|\leqslant r$ найдётся такое k, что значения $u^e(x)$, $x\in D$, не зависят от e_k. Отсюда следует, что набор $\{((-1)^{e_0+\ldots+e_s},u^e)\}_{e_0,\ldots,e_s=0,1}$ r-когерентен. Так как $\operatorname{ord} F\leqslant r$, а $[u^e]=e_0v_0+\ldots+e_sv_s$, то
$$\sum_{e_0,\ldots,e_s=0,1}(-1)^{e_0+\ldots+e_s}F(e_0v_0+\ldots+e_sv_s)=0.$$
Таким образом, $\deg F\leqslant s$. □

5. Следствие. *Пусть $P\subset B(X)$ — подгруппа, порождённая n элементами. Тогда* $\deg F|_P\leqslant n\operatorname{ord} F$.

Доказательство. Пусть $A\colon X\to T^n$ — такое непрерывное отображение, что образ индуцированного гомоморфизма $A^*\colon B(T^n)\to B(X)$ (который определяется формулой $A^*([u])=[u\circ A]$), есть подгруппа P. Рассмотрим отображение $F\circ A^*\colon B(T^n)\to Q$. Ясно, что $\deg F|_P=\deg F\circ A^*$. По теореме 4, $\deg F\circ A^*\leqslant n\operatorname{ord} F\circ A^*$. Легко видеть, что $\operatorname{ord} F\circ A^*\leqslant\operatorname{ord} F$. □

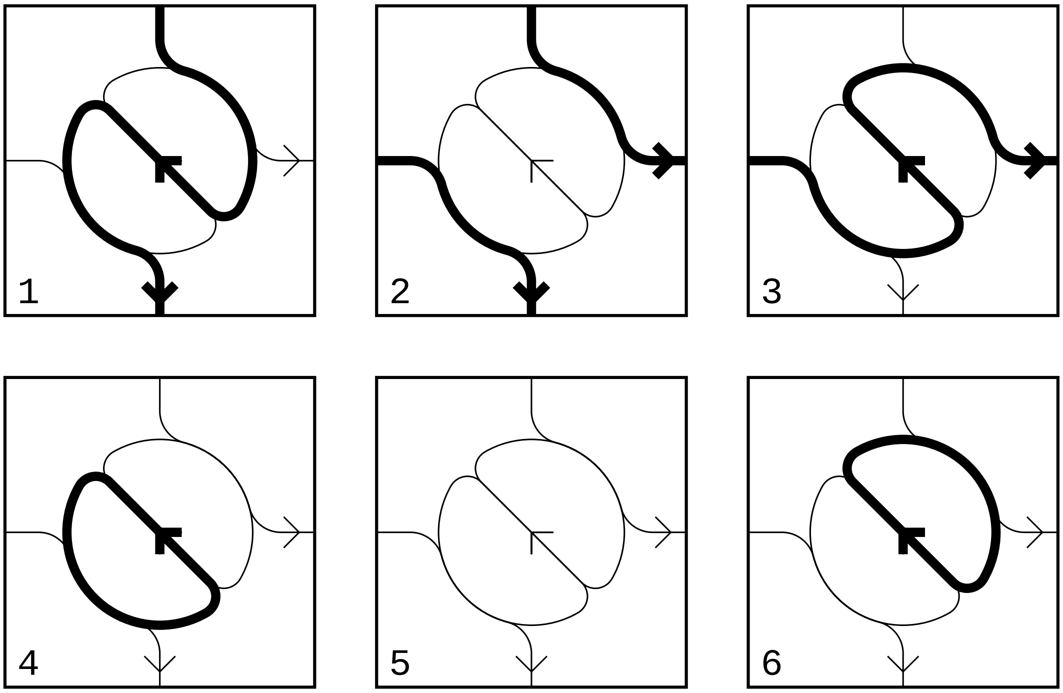
6. Лемма. *Пусть $f\colon M\to N$ — отображение абелевых групп, причём группа N не имеет кручения. Предположим, что* $\deg f<\infty$ *и* $\deg f|_C\leqslant r$ *для любой циклической подгруппы $C\subset M$. Тогда* $\deg f\leqslant r$.

Доказательство. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай $M=\mathbf{Z}^d$, $N=\mathbf{Q}$, когда, ввиду леммы 1, это утверждение следует из известных свойств многочленов. □

7. Утверждение. $\deg F\leqslant\operatorname{ord} F$, *если группа Q не имеет кручения.*

Доказательство. Ввиду леммы 6, это следует из теоремы 4 и следствия 5. □

8. Теорема. *Предположим, что* $\operatorname{ord} F \leqslant 1$. *Тогда* $\deg F \leqslant 1$.



Доказательство. Пусть $p_k\colon T^2 \to T$, $k = 0, 1$, — проекции. Существуют такие непрерывные отображения $h_j\colon T^2 \to T$, $j = 1, \ldots, 6$, что набор $\{((-1)^j, h_j)\}_{j=1}^6$ 1-когерентен, причём $[h_1] = [p_0]$, $[h_2] = [p_0] + [p_1]$, $[h_3] = [p_1]$, $[h_j] = 0$, $j = 4, 5, 6$. Их можно получить, применяя к ориентированным кривым на торе T^2, показанным на рисунке (тор T^2 получается склеиванием противоположных сторон изображённого квадрата), конструкцию Понтрягина: точки, расположенные на расстоянии больше фиксированного малого $c > 0$ от кривой, отображаются в точку 1; для точек, близких к кривой, определено расстояние со знаком q от неё (слева от кривой $q > 0$, справа — $q < 0$), и точка с $|q| \leqslant c$ отображается в точку $\exp i\pi\,(1 + q/c)$ (ср. [2]). Возьмём произвольные элементы $v_k \in B(X)$, $k = 0, 1$. Пусть $A\colon X \to T^2$ — такое непрерывное отображение, что $[p_k \circ A] = v_k$, $k = 0, 1$. Пусть $u_j = h_j \circ A$, $j = 1, \ldots, 6$. Легко видеть, что набор $\{((-1)^j, u_j)\}_{j=1}^6$ 1-когерентен. Так как $\operatorname{ord} F \leqslant 1$, то

$$\sum_{j=1}^{6} (-1)^j F([u_j]) = 0.$$

Так как $[u_1] = v_0$, $[u_2] = v_0 + v_1$, $[u_3] = v_1$, $[u_j] = 0$, $j = 4, 5, 6$, то

$$\sum_{e_0, e_1 = 0, 1} (-1)^{e_0 + e_1} F(e_0 v_0 + e_1 v_1) = 0.$$

Таким образом, $\deg F \leqslant 1$. $\square$

Список литературы

1. Ху Сы-цзян, *Теория гомотопий*, М.: Мир, 1964.
2. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс*, М.: Мир, 1972.