

Кружок любителей арифметики:

МЕНЮ ТЕМ

А. Л. Смирнов

Поначалу кружок проходил в форме свободной дискуссии, а темы для обсуждения возникали спонтанно. Постепенно выявилось общее желание – время от времени обсуждать не только спонтанно возникающие темы, но и подготовленные доклады. При этом хотелось бы полностью избежать принуждения – в частности по выбору тем и срокам. Как к этому прийти?

Предлагаю действовать следующим образом:

- желающий сделать доклад выбирает тему и согласовывает ее с руководителем;
- время на подготовку не ограничиваем;
- дата подготовленного доклада согласовывается с руководителем.

Тему можно предложить свою, а можно выбрать из меню. Меню не охватывает всего интересного. Его назначение не ограничить круг тем, а помочь с ее выбором.

Источники указывают лишь на возможные точки входа в соответствующие темы, но не исчерпывают их.

Содержание

1	Великие аналогии	2
1.1	Розетский камень	2
1.2	Аналогия с мероморфными функциями	2
1.3	Трехмерная точка зрения	2
2	Программы	3
2.1	Поле из одного элемента	3
2.2	Программа Ленглендса	3
2.3	Гипотезы Бейлинсона и регуляторы	3
2.4	Эйлеровы системы	3
3	Нерешенные проблемы	3
4	Золотой век арифметики	5

5	Миниатюрные шедевры	7
6	Отдельные работы на другие темы	10

1 Великие аналогии

1.1 Розетский камень

Это аналогия между числами и алгебраическими функциями. Розетский камень найден в ходе египетского похода Наполеона и содержит одно и то же повествование на трех языках. Один из этих языков – древнеегипетский. С помощью этого камня Шамполион научился понимать древнеегипетский язык.

В нашем случае речь идет об одной и той же истории, рассказанной на трех языках. В частности, речь идет о полях мероморфных функций на римановых поверхностях, полях рациональных функций на алгебраических кривых над конечными полями и полями алгебраических чисел. В простейшем случае речь идет о полях

$$\mathbb{C}(t), \quad \mathbb{F}_p(t), \quad \mathbb{Q}.$$

- A 1940 Letter of Andre Weil on Analogy in Mathematics.
- Шафаревич, Поля алгебраических чисел, Stockholm 1962.

1.2 Аналогия с мероморфными функциями

Это аналогия между теорией чисел и теорией Неванлинны. Теория Неванлинны изучает мероморфные отображения $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Как правило это бесконечнолистные отображения; такие, например, как \exp . Для таких отображений доказывается две основные теоремы. Морально, первая из них утверждает, что у каждой точки имеется одинаковое число прообразов. Вторая является аналогом формулы Римана–Гувица. Арифметические аналоги второй теоремы оказываются удивительно сильными. В целом эта аналогия оказалась очень даже работающей и привела не только к новым гипотезам но и к новым методам. Эти методы появились как имитация соответствующих методов в теории Неванлинны и позволили получить ряд выдающихся результатов. Имеется словарь перевода с языка теории функций на язык теории чисел. К сожалению, смысл этого словаря не ясен. Желательно его найти.

- Osgood, Sometimes Effective Thue-Siegel-Roth-Schmidt-Nevanlinna Bounds, or Better;
- Vojta, Diophantine Approximation and Nevanlinna.

1.3 Трехмерная точка зрения

Это аналогия между числовыми полями и 3-многообразиями. В простейшем случае аналогия проявляется на уровне конечных полей. С этой точки зрения $\text{Spec } \mathbb{F}_q$ следует понимать как окружность.

- Morishita, Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings.

2 Программы

2.1 Поле из одного элемента

Речь идет об углублении и развитии аналогии "розетский камень".

- Durov, New Approach to Arakelov Geometry.

2.2 Программа Ленглендса

Другое название – некоммутативная теория полей классов.

- Tate, Number theoretic background.
- Deligne, Serre, Formes modulaires de poids 1, 1974.

2.3 Гипотезы Бейлинсона и регуляторы

Это грандиозное обобщение формулы Дирихле и гипотезы Берча– Суиннертона-Дайера.

- Бейлинсон, Высшие регуляторы и значения L-функций.
- Rapoport and others, Beilinsons Conjectures on Special Values of L-Functions.

2.4 Эйлеровы системы

Это относительно новое, удивительно красивое и далеко не осознанное явление, уже приведшее к нескольким удивительным результатам. Рассматривает с единой точки зрения гауссовы суммы, круговые единицы, точки Хегнера и другие интригующие вещи.

- Kolyvagin, Euler systems.
- Rubin, Euler systems.

3 Нерешенные проблемы

1. Проблема Гаусса о бесконечности однокласных вещественных квадратичных полей.
 - Хассе, Лекции по теории чисел;
 - Cohen, Lenstra, Heuristics on class groups of number fields.
2. 12-я проблема Гильберта.
 - Александров, Проблемы Гильберта.
 - Shappacher, On the History of Hilbert's Twelfth Problem A Comedy of Errors.
 - Stark, Hilbert's twelfth problem and L-series.

3. Конечность группы Шафаревича–Тейта.
 - Tate, The Arithmetic of Elliptic Curves, Invent. 1974.
4. Гипотеза Тейта об алгебраических циклах.
 - Тэйт, Алгебраические классы когомологий.
5. Проблема аналитического продолжения дзета-функции Хассе–Вейля.
 - Серр, Дзета-функции и L-функции.
6. Гипотеза Берча–Суиннертона–Дайера.
 - Свиннертон-Дайер, Применение вычисления в теории полей классов, голубая книга Касселса–Фрелиха.
 - Коблиц, Введение в эллиптические кривые и модулярные формы.
7. Гипотеза Артина о голоморфности L-рядов.
 - Хейльброн, ζ -функции и L-функции, голубая книга Касселса–Фрелиха.
 - Weil, Sur les formules explicites de la theorie des nombres, 1972.

Связь с гипотезой Римана, положительность Вейля.

8. Гипотеза Шафаревича о $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{ab})$.
 - Fried, Jarden, Field arithmetic.
9. Проблема Манина–Морделла–Вейля для кубических поверхностей.
 - Kanevsky, Manin, Composition of points and the Mordell-Weil problem for cubic surfaces.
10. Египетские дроби. Гипотеза Эрдеша–Штраусса.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

- Ionasku, Wilson, On the Erdos–Straus conjecture.
11. Гипотеза Вандивера.
 - Vandiver, Wilson, Fermat’s last theorem. Its history and the nature of the known results concerning it.
 - Washington, Introduction to Cyclotomic Fields.

4 Золотой век арифметики

1. Теорема Морделла–Вейля.
 - Манин, Приложение к книге Мамфорда "Абелевы многообразия".
 - Serre, Lectures on the Mordell–Weil theorem.
2. Закон взаимности Артина.
 - Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
3. Теорема Рота. Неэффективность.
 - Ленг, Основы диофантовой геометрии.
4. Проблема башни полей классов. Теорема Голода–Шафаревича.
 - Шафаревич, Поля алгебраических чисел.
 - Голод, Шафаревич, О башне полей классов.
5. Гипотеза Морделла над функциональными полями функций, Теорема Манина.
 - Манин, Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями.
6. Гипотеза Римана для многообразий над конечными полями. Теорема Делиня.
 - Freitag, Kiehl, Etale Cohomology and the Weil Conjecture.
7. Теоремы Мазура и Мереля.
 - Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal.
 - Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur le corps de nombres.
8. Конечность Ш в некоторых случаях.
 - Rubin, Tate-Shafarevich groups and L-functions of elliptic curves with complex multiplication.
 - Колывагин, Конечность $E(\mathbb{Q})$ и $\text{Ш}(E, \mathbb{Q})$ для подкласса кривых Вейля.
9. Проблема десятого дискриминанта. Теорема Хигнера.
 - Goldfield, Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields;
 - Шафаревич, Проблема десятого дискриминанта.
10. Теорема Кронекера–Вебера.
 - Shappacher, On the History of Hilbert's Twelfth Problem A Comedy of Errors.
 - Washington, Introduction to Cyclotomic Fields.
11. 12-тая проблема Гильберта для локальных полей.

- Касселс–Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
- Формальные группы Любина–Тейта.
12. 12-тая проблема Гильберта для функциональных полей.
- Дринфельд, Эллиптические модули.
- Модули Дринфельда.
13. Комплексное умножение эллиптических кривых. Jugendtraum.
- Касселс–Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
 - Borel, Seminar on Complex Multiplication.
14. Гипотезы Рамануджана.
- Ramanujan, On certain arithmetical functions.
15. Гипотеза Морделла. Теорема Фалтингса. Неэффективность.
- Зархин, Паршин, Проблемы конечности в диофантовой геометрии.
16. Вторая гипотеза Шафаревича. Теорема Абрашкина и Фонтена.
- Fontaine, Il n’y pas variete abeliennes zur \mathbb{Z} .
17. 10-я проблема Гильберта. Эффективность.
- Матияевич, 10-я проблема Гильберта;
 - Манин, Вычислимое и невычислимое.
18. Гипотеза Таниямы–Вейля.
- Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms.
 - Lang, Some History of the Shimura-Taniyama Conjecture.
19. Теорема Ферма.
- Ribet, From the Taniyama-Shimura Conjecture to Fermat’s Last Theorem.
 - Boston, The proof of Fermat’s last theorem.

5 Миниатюрные шедевры

1. Трансцендентность e и π .
 - Ленг, Алгебра.
2. Периоды.
 - Kontsevich, Zagier, Periods.
3. $\zeta(3)$ и кватернионные эллиптические кривые.
 - Beucers, Peters, A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$.
4. Теоремы Эрмита и Минковского. Гипотезы Шафаревича.
 - Зархин, Паршин, Проблемы конечности в диофантовой геометрии.
5. Статистика расширений.
 - Cohen, Lenstra, Heuristics on class groups of number fields.
6. Масс-формула Серра. Число локальных полей.
 - Serre, Une "formule de masse" pour les extensions totalement ramifie de degre donne d'un corps local.
7. Вторичное препятствие Манина.
 - Манин, Кубические поверхности.
8. Матрица Хассе–Витта. Единство математики. Связность Гаусса–Манина.
 - Манин, О матрице Хассе-Витта алгебраической кривой.
 - Клеменс, Мозаика теории комплексных кривых.
 - Манин, Алгебраические кривые над полями с дифференцированием.
9. Теорема Лютц–Нагеля. Кручение далеко от нуля в p -адической метрике.
 - Lutz, Sur l'equation $y^2 = x^2 - Ax - B$ dans les corps p -adiques.
10. Теорема Мамфорда. Красивое и короткое доказательство почти Морделла.
 - Ленг, Основы диофантовой геометрии.
11. Критика Гротендиком доказательства Делиня. Стандартные гипотезы.
 - Grothendieck, Standard conjectures on algebraic cycles.
 - Serre, Analogues Kehleriens de Certaines Conjectures de Weil.
12. Гипотезы Вейля. Аргумент Серра: нет когомологий Вейля с коэффициентами в \mathbb{Q} , нет простой конструкции представлений Артина и Суона.

– Serre, Sur la rationalite des representations d'Artin.

13. Полиномы Эрхарта.

- Ehrhart, Sur un probleme de geometrie diophantienne lineaire II.
- Pommersheim, Toric varieties, lattice points, and Dedekind sums.
- Rademacher–Grosswald, Dedekind sums. (1951), 41-46.

Сравнение Гроссвальда–Радемахера для тетраэдров и 4-мерные симплексы. Бесконечномерные тетраэдры и η -функция.

14. Лемма Минковского и теорема Римана–Роха. Теорема Бlichfeldта и неравенства Морса.

- Шпиро, Гипотеза Морделла [по Г. Фальтингсу].
- Gillet, Mazur, Soule, A note on a classical theorem of Blichfeld.

Высшие соотношения Кавальери (Ext по Ионедэ).

15. Теория Аракелова.

- Аракелов, Теория пересечений дивизоров на арифметической поверхности.
- Faltings, Calculus on arithmetic surfaces.

16. L -ряды Артина. Мероморфная продолжимость. Гипотеза Артина. Естественное доказательство теоремы Чеботарева.

- Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
- Cogdell, On Artin L-functions.

17. Теорема Брауэра. Формализм Фробениуса и сопряженные функторы.

- Серр, Линейные представления конечных групп.

18. Явные формулы. Риман и Вейль.

$$\prod_{\text{нули } \zeta} = \prod_p.$$

- Ленг, Алгебраические числа.
- Цагир, Первые 50 миллионов простых чисел.

19. Группа Демушкина и малые римановы поверхности. Топология символа Гильберта.

- Демушкин, Топологические 2-группы с четным числом образующих и одним полным определяющим соотношением.

20. p -адическая ζ -функция. Соотношение Штикельбергера.

- Коблиц, p -адические числа, p -адический анализ и ζ -функции.

- Айерленд, Роузен, Классическое введение в современную теорию чисел.
 - Шафаревич, ζ -функция.
21. Почти тривиальные зацепления. Теория Ивасавы и числовой аналог полинома Александра. Двойственность Артина–Вердье.
- Milnor, Link Groups.
 - Redei, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper.
22. Теорема Белого. Теорема Санова о $\Gamma_0(2)$. Неконгруэнц-подгруппы. Детские рисунки.
- Белый, О расширениях Галуа максимального кругового поля;
 - Shabat, Voevodsky, Drawing Curves Over Number Fields.
23. Можно ли услышать форму барабана.
- Perlis, On the equation $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$.
24. Числа Тамагавы. Теорема Блоха.
- Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
 - Bloch, A Note on Height Pairings, Tamagawa Numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture.
25. Теорема Гильберта о неприводимости. Обратная задача теории Галуа.
- Ленг, Основы диофантовой геометрии.
26. Теорема Чеботарева. Эффективность. Неестественность: круговой трюк.
- Serre, Quelques applications du theoreme de density de Chebotarev.
 - Шафаревич, О работе Н.Г. Чеботарева «Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок». Собрание сочинений Чеботарева, т.3.
27. Тета-функции как модулярные формы. Формула Пуассона. Чудо гауссова интеграла.
- Мамфорд, Лекции о тэта-функциях.
- Функциональное уравнение для θ и ζ
28. Метод Тейта–Ивасавы.
- Ленг, Алгебраические числа.
29. Конечные групповые схемы. Вопрос Тейта о G/\mathbb{Z} с $pG = 0$.
- Tate, Oort, Group schemes of prime order.

- Dembele, Schoof, GRH and finite flat group schemes over \mathbb{Z} .
- 30. Классификаторы (пространства модулей) и универсальные объекты.
 - Мамфорд, Проблемы модулей и их группы Пикара.
- 31. Формулы Витта и Брюкнера–Востокова.
 - Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristic p vom Grade p^n .
 - Востоков. Явная форма закона взаимности.
- 32. Разбиения. Точная формула Радемахера.
 - Холл, Комбинаторика.
 - Эндрюс, Теория разбиений.
- 33. Принцип компактности в логике. Ультрапроизведения.
 - Ах, Kochen, Diophantine problems over local fields.

6 Отдельные работы на другие темы

1. К-теория конечных полей.
 - Quillen, On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field.
2. Векторы Витта. Представители Тейхмюллера.
 - Hazewinkel.

Изначально эти векторы были предназначены для построения p -адических чисел чисто алгебраическими методами.

3. Стабильные гомотопические группы сфер и $K_*(\mathbb{F}_1)$.
 - Priddy, On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group.
4. Гомотопии букетов сфер.

$$\pi_2(S^1 \vee S^2), \pi_3(S^2 \vee S^2).$$

Сложение пространств резко усложняет ситуацию.

5. Стабильные гомотопические группы сфер и эллиптические кривые.
 - Hopkins, Mahowald, From elliptic curves to homotopy theory.

Некоммутативные одномерные формальные группы.

6. Топология, формальные группы и локальная теория полей классов.

- Голо, Операции Адамса и символ норменного вычета.
 - Morava, Stable homotopy and local number theory.
7. Простой гомотопический тип и линзы.
- DeRham, Kervaire, Maumary, Torsion et Type Simple d'Homotopy.
8. Трансфер-матрицы. Дискретные операторы Лапласа. Формула Фейнмана–Каца и формулы следа.
- Стенли, Перечислительная комбинаторика.
9. Мера Винера и уравнение теплопроводности.
- Кац, Несколько вероятностных задач физики и математики.
10. ζ Сельберга. Формула следа Сельберга. Геодезические как аналог простых чисел.
- ????
11. Тождества Макдональда.
- Фукс, Когомологии алгебр Ли.
12. Топосы как обобщенные пространства. Зачем они нужны. Определения Гротендика и Жиро. Элементарные топосы. Классификаторы.
- Джонсон, Теория топосов.
13. Поликатегории. 2-группы.
- nlab ???
14. Гомотопическая теория типов. Правильные и неправильные слова (категория всех категорий).
- nlab ???
15. Статистические системы, равновесные состояния, состояния Гиббса, фазовые переходы, условие Кубо, Мартина, Швингера.
- Брателли, Робинсон.
 - Бакстер, Exactly Solved Models in Statistical Mech Точно решаемые модели в статистической механике.
16. ζ -функции и статфизика, полюса статсуммы и фазовые переходы, двойственность Серра, трудная теорема Лефшеца и средняя размерность.
- Отрицательная температура и Далай-лама.
 - Откровение Иоанна Богослова.

В статфизике понятие фазового перехода связано с утратой дифференцируемости свободной энергии. Критическая полоса и катастрофы. Апокалипсис как отражение генетической памяти о глобальной катастрофе.

17. W^* -алгебры, гиперконечные факторы.

– Connes, Noncommutative geometry.

18. Элементарные частицы. Системы Хитчина.

– Кобзарев, Манин.