Нестационарные упругие волны

Сергей Николаевич Гаврилов

http://www.pdmi.ras.ru/~serge/lectures/2025.pdf

Общая характеристика курса

Будем рассматривать и решать нестационарные задачи для уравнений в частных производных, описывающие нестационарные процессы в механических системах с распределенными параметрами — много математики (матфизики).

Постановка задачи:

- Уравнения движения (линейные PDE): $\mathcal{L}u(x,t) = f(x,t)$.
- Начальные условия.
- Условия излучения или (и) граничные условия.

Нестационарность:

- Влияние начальных условий на движение.
- Задачи, где правая часть уравнения (нагрузка) зависит от времени негармоническим образом.
- Задачи для систем с переменными по времени свойствами.

Цель курса:

- Научиться решать нестационарные задачи …
- …для того, чтобы изучать принципиально нестационарные явления Природы.
- …которые очень часто являются интуитивно не очевидными или даже контр-очевидными.

План курса

02–10.2025 Одномерные задачи (PDE с двумя независимыми переменными: координата x и время t).

11–12.2025 Двух- и трехмерные задачи (PDE с 3–4 независимыми переменными: 2–3 координаты x_i и время t).
Экзамен по теоретическим материалам всего курса.

Рассматриваемые в курсе PDE

- Волновое уравнение:
$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = f.$$
- Телеграфное уравнение:
$$\Delta u - 2\gamma\dot{u} - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$
- Уравнение Клейна-Гордона:
$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$
- Уравнение Гельмгольца:
$$\Delta u + k^2 u = f.$$
- Уравнения линейной изотропной эластодинамики Навье:
$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = -\rho\boldsymbol{K}.$$

…

Метод характеристик

- Для матфизики типичной является ситуация, когда получить какие-либо утверждения или даже сформулировать определения для (системы) PDE общего вида — весьма сложная задача.
- Поэтому, рассмотрим метод характеристик на конкретных примерах …
- …попутно обсудив понятие гиперболичности.
- Ограничимся случаем двух независимых переменных.

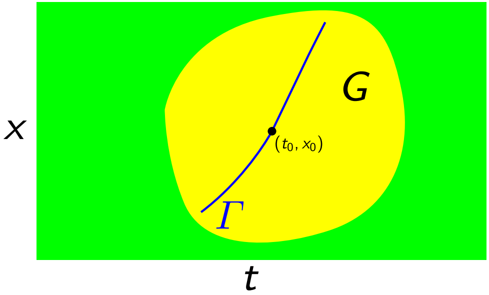
Литература к лекции

С.К. Годунов
Уравнения математической физики.
М., Наука, 1979.

Постановка задачи об определении характеристик для линейного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами

$$a(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \qquad \text{или} \qquad a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x)$$

- ⅂ известно, что рассматриваемое уравнение имеет решение в некоторой области G. Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую Γ.
- ⅂ известны значения u вдоль кривой Γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — требуется восстановить u в некоторой окрестности Γ.
- Характеристики γ — кривые Γ, такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \qquad (1)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти $\dot{u},\ u' \implies$

$$\begin{cases} a\,\dot{u} + b\,u' = f \\ \mathrm{d}t\,\dot{u} + \mathrm{d}x\,u' = \mathrm{d}u \end{cases} \implies \begin{vmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые γ в плоскости (t,x), вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 0$ — характеристические кривые (характеристики) уравнения (1).

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = \frac{b}{a}$ или $\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_\gamma = \frac{a}{b}$.

Критерий разрешимости задачи:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & b & f \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}u \end{bmatrix},$$

т.е. $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_\gamma = \frac{f}{b}$ или $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = \frac{f}{a}$ — соотношение на характеристике.

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \tag{1}$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Характеристики, очевидно, представляют собой параметрически заданные системой (2) кривые $(t(s), x(s))$.

Соотношение на характеристике:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(t,x). \tag{3}$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \tag{1}$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Соотношение на характеристике:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(t,x). \tag{3}$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

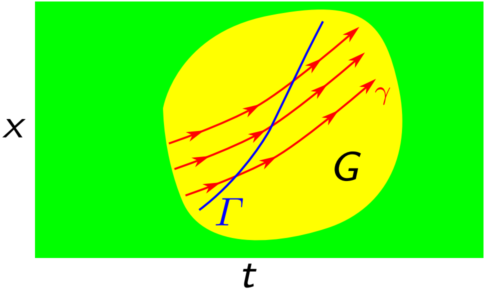
Задача

Найти характеристики и общее решение линейного однородного уравнения первого порядка

$$\dot{u} + cu' = 0.$$

Линейное уравнение первого порядка: выводы

- Если начальные условия заданы на кривой Γ, через каждую точку s которой проходит одна и только одна характеристика γ (не касаясь данной кривой), то соответствующая задача Коши имеет единственное решение.
- Если начальные условия заданы на характеристике γ, то соответствующая задача Коши может не иметь решения, а может иметь неединственное решение (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике γ).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.



Квазилинейное уравнение первого порядка

$$a(t,x,u)\dot{u} + b(t,x,u)u' = f(t,x,u) \tag{4}$$

Рассмотрим характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x,u), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x,u), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(t,x,u). \end{aligned} \tag{5}$$

Для квазилинейного PDE (4) первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (5).

- Характеристики зависят от начального условия.
- Кривая, являющаяся характеристикой для одного НУ, для другого характеристикой, вообще говоря, не является.
- При решении задачи Коши характеристики строятся инкрементально вместе с решением.

Система N линейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{A}(t,x)\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}(t,x)\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{f}}(t,x) \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы $N \times N$; $\det \mathbf{A} \neq 0$; $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ — столбцы.

Домножая (6) на $\mathbf{A}^{-1}$ слева, получим

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x),$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$
$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}.$$

Система N линейных уравнений первого порядка: характеристическое уравнение

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Можем найти $\mathbf{u} \implies$ можем найти $\dot{\mathbf{u}},\ \mathbf{u}' \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\mathbf{u}' = \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{u}} + \mathrm{d}x\,\mathbf{u}' = \mathrm{d}\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N(-1)^N \begin{vmatrix} \mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N(-1)^N \det\left(\mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{I}\right)$$

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Система N линейных уравнений первого порядка: соотношения на характеристиках

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Можем найти $\mathbf{u}$ $\implies$ можем найти $\dot{\mathbf{u}},\ \mathbf{u}'$ $\implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathbf{C}\,\mathbf{u}' & = \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathrm{d}x\,\mathbf{u}' & = \mathrm{d}\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Критерий разрешимости задачи:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} & \mathrm{d}\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

— соотношения на характеристиках.

Система N линейных уравнений первого порядка: гиперболичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0,$ — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Определение

Если все собственные числа матрицы $\mathbf{C}$ вещественны и не являются кратными ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. имеется ровно N семейств характеристик), то система называется гиперболической в области.

Волны — решения гиперболических уравнений.

Контрольный вопрос

Что можно сказать о гиперболичности линейного уравнения 1 порядка?

Система N линейных уравнений первого порядка: эллиптичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$, — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Определение

Если характеристическое уравнение системы не имеет вещественных решений ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. характеристик нет), то система называется эллиптической в области.

Гиперболическая система N линейных уравнений первого порядка: выводы

- Начальные условия и краевые условия (в смешанной задаче) не следует задавать на характеристиках — это может приводить к несуществованию или неединственности решения (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.

Линейное уравнение второго порядка

Вопрос о нахождении характеристик и классификации уравнений второго порядка для двух независимых переменных может быть решен сведением уравнения к системе 2 уравнений первого порядка.

Расмотрим его на примере простейшего гиперболического уравнения — одномерного однородного волнового уравнения, для которого метод характеристик чрезычайно эффективен и нагляден.

Одномерное однородное волновое уравнение

Механические системы, которые описывает одномерное волновое уравнение:

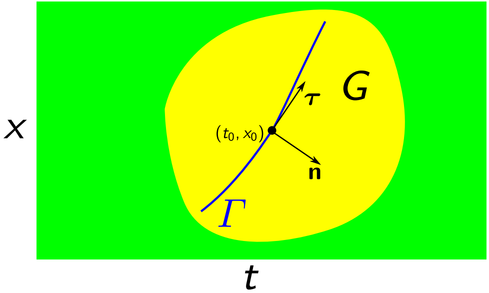
- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

Постановка задачи об определении характеристик для одномерного однородного волнового уравнения

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- ⌉ известно, что уравнение имеет решение в некоторой области G. Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую Γ.
- ⌉ известны значения u и нормальной производной $\mathbf{n} \cdot \nabla u$ вдоль кривой Γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — определить u в некоторой окрестности Γ.
- Характеристики γ — кривые Γ, такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Одномерное волновое уравнение: характеристики, гиперболичность

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти $u \implies$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\,\mathrm{d}x + \dot{u}'\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \iff \left[\begin{array}{l} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{array}\right. .$$

Имеется 2 семейства характеристик: волновое уравнение — гиперболическое.

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{array}\right. .$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}u' \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}\dot{u} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\dot{u} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u'$$

$$\underset{\mathrm{d}x = \pm c\mathrm{d}t}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{d}\dot{u} = \pm c\,\mathrm{d}u' \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u' - c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const}, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const}\,. \end{array}\right.$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Одномерное волновое уравнение: общее решение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти $u \quad \Longrightarrow \quad$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{array} \right. .$$

На характеристиках PDE (8) упрощается, рассмотрим его в новых переменных $u(t, x) = u(\phi_+, \phi_-)$:

$$\mathrm{d}u = u_{\phi_+}(\mathrm{d}x + c\mathrm{d}t) + u_{\phi_-}(\mathrm{d}x - c\mathrm{d}t),$$

$$\mathrm{d}^2u = u_{\phi_+\phi_+}(\mathrm{d}x + c\mathrm{d}t)^2 + u_{\phi_-\phi_-}(\mathrm{d}x - c\mathrm{d}t)^2 + 2u_{\phi_+\phi_-}(\mathrm{d}x^2 - c^2\mathrm{d}t^2),$$

$$\ddot{u} = c^2(u_{\phi_+\phi_+} - 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}), \quad u'' = u_{\phi_+\phi_+} + 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}.$$

Подставляя в PDE (8) и интегрируя, получим решение Даламбера:

$$u_{\phi_+\phi_-} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \Psi_-(x - ct) + \Psi_+(x + ct).$$

Здесь $\Psi_\pm$ — произвольные функции (формы волн или просто волны), $\phi_\pm$ — фазы, c — фазовая скорость (скорость движения точки $x = X(t)$ с постоянной фазой): $X(t) \pm ct = \text{const} \implies \dot{X} = \mp c$.

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases}(u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0,\\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'.\end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\implies$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0\\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u'\\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u}\end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0\\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t\\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x\end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \iff \left[\begin{array}{l} x - ct = \text{const} = \phi_-\\ x + ct = \text{const} = \phi_+\end{array}\right. .$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0\\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t\\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0\\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}u'\\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}\dot{u}\end{bmatrix} \iff \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\dot{u} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u'$$

$$\underset{\mathrm{d}x = \pm c\mathrm{d}t}{\iff} \mathrm{d}\dot{u} = \pm c\,\mathrm{d}u' \iff \left[\begin{array}{l} u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-,\\ u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+.\end{array}\right.$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Альтернативный подход для волнового уравнения: факторизация дифференциального оператора

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \left(\frac{\partial}{\partial x} + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \iff \begin{cases} u = u_- + u_+, \\ u'_- + c^{-1}\dot{u}_- = 0, \\ u'_+ - c^{-1}\dot{u}_+ = 0. \end{cases}$$

Т.е., общее решение u волнового уравнения — сумма общих решений u_- и u_+ односторонних волновых уравнений, для которых характеристическая система имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \pm c^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1.$$

Характеристики односторонних волновых уравнений — кривые, удовлетворяющие ODE $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c \iff x \mp ct = \mathrm{const}$:

$$x - ct = \mathrm{const},$$

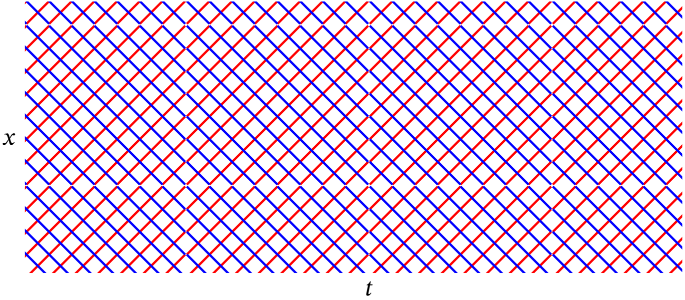
$$x + ct = \mathrm{const}\,.$$

Соотношения на характеристиках:

$$\mathrm{d}u_\mp\big|_{x \mp ct = \mathrm{const}} = 0 \implies \begin{aligned} u_- &= \Psi_-(x - ct), \\ u_+ &= \Psi_+(x + ct). \end{aligned}$$

Одномерное волновое уравнение: метод характеристик

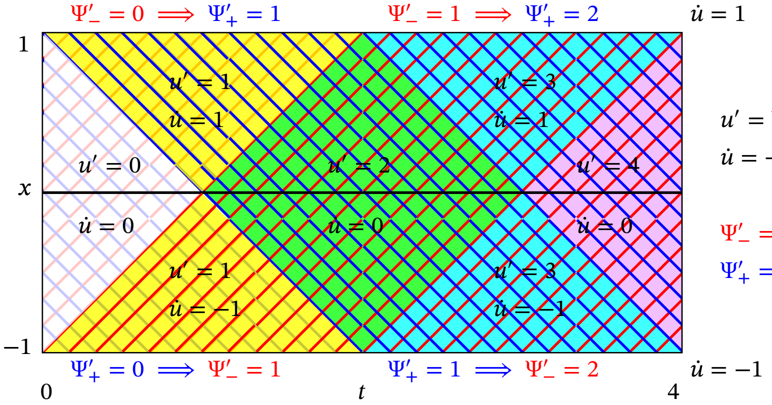
- Рассматриваем поведение решения в плоскости (t, x).
- Через каждую точку плоскости проходят две характеристики, на которых фазы $\phi_- = x - ct$ и $\phi_+ = x + ct$ постоянны.
- В каждую точку возмущение приходит по характеристикам в виде двух волн $\Psi_-(\phi_-)$ и $\Psi_+(\phi_+)$ (бегущих “направо” и “налево” соответственно) неизменные вдоль характеристик.
- В каждой точки решение равно сумме волн: $u = \Psi_-(\phi_-) + \Psi_+(\phi_+)$.
- Вдоль характеристик решение (сумма волн) удовлетворяет соотношению на характеристике ($u' - c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const} = 2\Psi'_-$, $u' + c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const} = 2\Psi'_+$).



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах

1. На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$
удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$
$$\dot{u}(\pm 1, t) = \pm 1$$
(растяжение стержня кинематическим нагружением).
2. На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$
удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$
$$u'(\pm 1, t) = 1$$
(растяжение стержня силовым нагружением).

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение



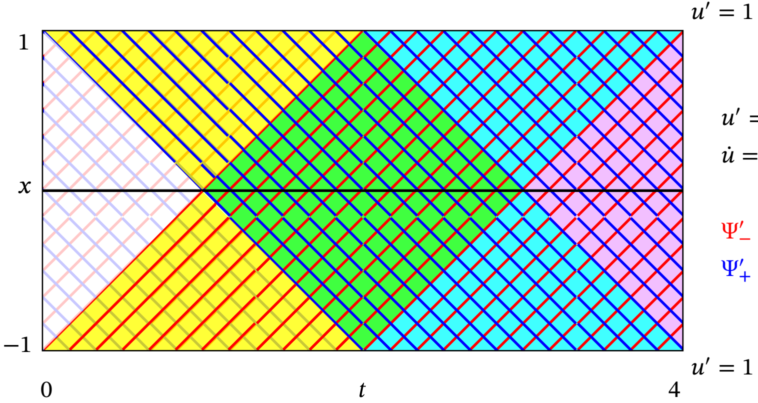
$$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$$

$$\dot u = -\Psi'_- + \Psi'_+$$

$$\Psi'_- = \mathrm{const}$$

$$\Psi'_+ = \mathrm{const}$$

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение



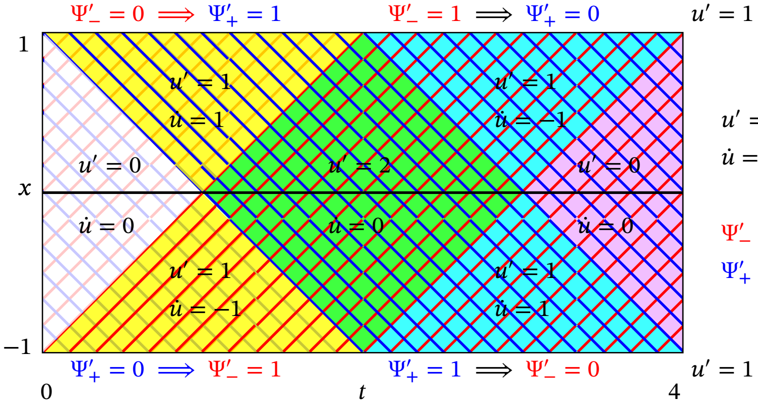
$$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$$

$$\dot{u} = -\Psi'_- + \Psi'_+$$

$$\Psi'_- = \text{const}$$

$$\Psi'_+ = \text{const}$$

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение



$$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$$

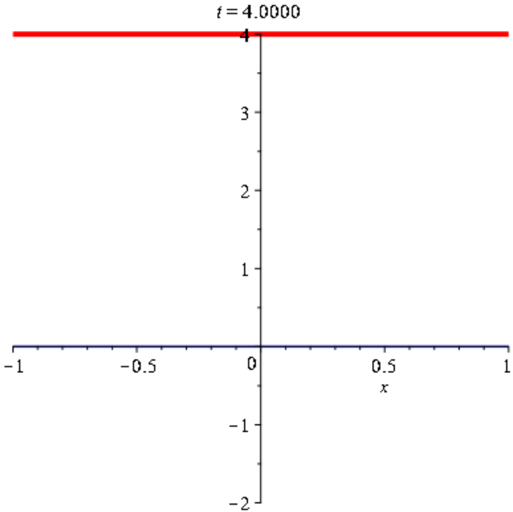
$$\dot{u} = -\Psi'_- + \Psi'_+$$

$$\Psi'_- = \text{const}$$

$$\Psi'_+ = \text{const}$$

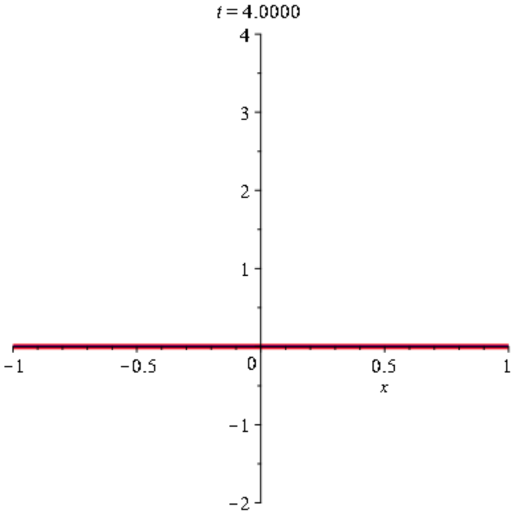
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение

Деформация, скорость.



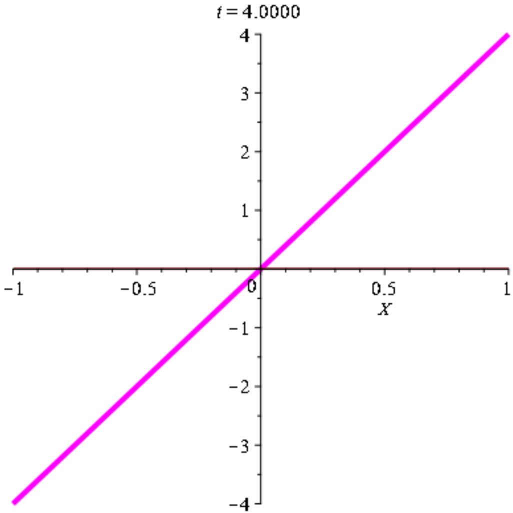
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение

Деформация, скорость.



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Кинематическое и силовое нагружение.



Парадокс исчезновения волнового процесса

- На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$

$$u'(\pm 1, t) = H(4 - t)$$

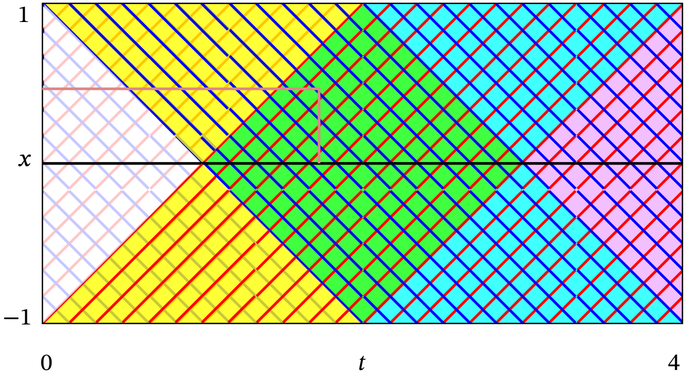
(растяжение стержня силовым нагружением).

Е.Е. Павловская, Ю.В. Петров.
О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости
Известия РАН, МТТ, №4, 2002, с. 39–45.

Растяжение конечного стержня, нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Как определить перемещения?

$$u = \int u' \, \mathrm{d}x = \int \dot{u} \, \mathrm{d}t$$



Задачи

Найти характеристики и условия на характеристиках для

1. системы уравнений Коши-Римана
$$u_x - v_y = 0,$$
$$u_y + v_x = 0;$$
2. уравнения Лапласа
$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$
3. уравнения Клейна-Гордона
$$u'' - c^{-2}\ddot{u} - ku = 0.$$

Локально-интегрируемые функции

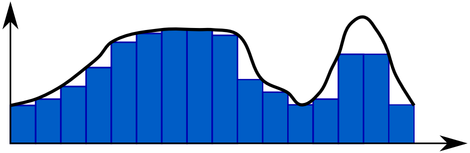
- Одним из важнейших понятий в классической матфизике является понятие локально интегрируемой функции.
- Требование локальной интегрируемости связано с необходимостью иметь возможность вычислить, сколько физической величины (например, объема, массы, количества движения, энергии и т.д.) находится в заданной ограниченной области из $\mathbb{R}^n$.
- В современной матфизике интегрируемость функции понимается в смысле Лебега …
- …поскольку классический интеграл Римана оказался малопригодным для потребностей матфизики.
- Причина в том, что многие встречающиеся в приложениях функции оказываются неинтегрируемыми (например, любая неограниченная функция неинтегрируема по Риману).

Теория меры и интегрирования Лебега

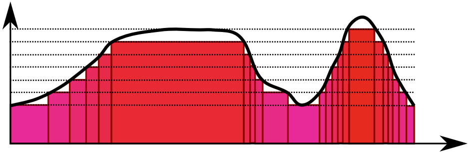
- Интеграл Лебега — это обобщение интеграла Римана на более широкий класс функций.
- Все функции, определённые на конечном отрезке числовой прямой и интегрируемые по Риману, являются также интегрируемыми по Лебегу, причём в этом случае оба интеграла равны. Однако существует большой класс функций, определённых на отрезке и интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых по Риману. Также интеграл Лебега может иметь смысл для функций, заданных на произвольных абстрактных множествах.
- Мера Лебега — понятие, обобщающее понятия длины, площади, объёма и т.д. (меры Жордана в $\mathbb{R}^n$) как для абстрактных множеств, там и для подмножеств $\mathbb{R}^n$, неизмеримых по Жордану.
- Сначала строится теория меры Лебега (которая определена на измеримых множествах), а потом — теория интегрирования, применимая к измеримым функциям.

Теория меры и интегрирования Лебега

- Идея построения интеграла Лебега состоит в том, что вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают её область значений, а затем суммируют с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов.



$$\sum_{k=1}^{N} F(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$



$$\sum_{k=1}^{N} y_k\, \mu\{x \in X : \ y_k < F(x) \le y_{k+1})\}$$

- Современная теория вероятностей является теорией меры и интеграла Лебега в специальном случае, когда мера универсального множества равна единице.

А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин
Элементы теории функций и функционального анализа.
М., Наука, …

Альтернативный подход

- Интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$ вводится как обобщение понятия интеграла Римана.
- Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ вводится как интеграл от характеристической функции множества.

Такой подход позволяет быстро ввести необходимые для матфизики понятия.

В.С. Владимиров.
Уравнения математической физики.
М., Наука, …

Интеграл Лебега: множества меры нуль

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль $\iff$ $\forall \epsilon > 0$ оно может быть покрыто не более чем счетной системой шаров суммарного объема $< \epsilon$.

Из этого определения вытекает, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль и объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль. Например, всякое счетное множество и всякая кусочно-гладкая поверхность имеют меру нуль.

Определение

Некоторое свойство выполняется почти везде в области $G \in \mathbb{R}^n$, если множество точек области G, которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

Интеграл Лебега: измеримые функции и множества

Далее считаем, что все функции заданы во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и почти везде конечны.

Определение

Функция называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

f, g — измеримы $\Longrightarrow f + g,\ fg,\ \max(f, g)$ etc измеримы.

Определение

Множество $A \in \mathbb{R}^n$ называется измеримым, если его характеристическая функция $\chi_A(\mathbf{x})$ измерима.

Неизмеримые функции (и множества) устроены весьма неправильно, и ни одна из них не построена в явном виде; можно только теоретически доказать их существование, используя так называемую аксиому выбора. Это говорит о том, что все функции и множества, которые нам могут встретиться, будут измеримы. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые множества измеримы, а функции измеримы и почти везде конечны.

Пример неизмеримого множества — множество Витали.

Пример неизмеримого множества — множество Витали

Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на отрезке $[0,\ 1]$: $x \sim y$ если разница $x - y$ рациональна. Это отношение эквивалентности разбивает интервал $[0,\ 1]$ на классы эквивалентности, каждый из которых имеет счётную мощность, но их количество имеет мощность континуума. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной точке.

Аксиома выбора

Для всякого семейства непустых множеств существует функция, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества.

Тогда полученное множество E представителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть E счётное число раз на все рациональные числа из интервала $[-1, 1]$, то объединение будет содержать весь отрезок $[0, 1]$, но при этом оно будет содержаться в отрезке $[-1, 2]$. При этом «сдвинутые копии» множества E не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения $\sim$ и E.
$\daleth$ E — измеримо (предполагаем что, мера конгруэнтных множеств одинакова):

- Мера E ноль. Тогда мера $[0, 1]$ ноль (счётное объединение множеств меры нуль).
- Мера E — положительна. Тогда мера $[-1, 2]$ бесконечна (счётное объединение множеств одинаковой ненулевой меры).

Интеграл Лебега от неотрицательной функции по $\mathbb{R}^n$

Определение

Пусть неотрицательная измеримая функция $f(\mathbf{x})$ совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности финитных кусочно-непрерывных функций $f_k(\mathbf{x})$ с ограниченной последовательностью интегралов (Римана) $\int f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Предел неубывающей ограниченной последовательности этих интегралов называется <u>интегралом Лебега</u> функции f. Функция f в этом случае называется <u>интегрируемой по Лебегу</u> или суммируемой.

Здесь вообще говоря нужно доказать корректность (независимость от f_k).

Теорема

Функция $f(\mathbf{x}) \geq 0$ равна нулю почти везде $\iff$ $\int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$.

Интеграл Лебега от вещественной функции по $\mathbb{R}^n$

$\daleth\ f$ — вещественная:

$$f_+ = \max(f, 0), \qquad f_- = \max(-f, 0);$$
$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

Определение

Вещественная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой) $f \in \mathcal{L}$, если неотрицательные f_+, f_- интегрируемы.

Число

$$\int f\,\mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int f_+\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int f_-\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл Лебега от комплекснозначной функции

Определение

Комплекснозначная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), если $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$ интегрируемы.

Число

$$\int f \,\mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int \mathrm{Re}\, f \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{i} \int \mathrm{Im}\, f \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл по измеримому множеству

Определение

Функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A, $f \in \mathcal{L}(A)$, если $f\chi_A \in \mathcal{L}$.

Число

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int f\chi_A \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега функции f по множеству A.

Число

$$\int_A \mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int \chi_A \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется мерой Лебега множества A.

Теорема Лебега

Теорема

Пусть последовательность (измеримых) функций f_k сходится почти везде к функции f. Если существует интегрируемая функция g такая, что $|f_k| \leq g$ почти везде, то f — интегрируема и

$$\lim \int f_k \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int f \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Отсюда в частности следует, что всякая интегрируемая функция интегрируема по любому измеримому множеству A.

Связь с интегралом Римана

Теорема

Если функции $f(\mathbf{x})$ и $|f(\mathbf{x})|$ интегрируемы по Риману (возможно, в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и их интегралы в обоих смыслах совпадают.

Пример ограниченной интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману функции: функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально}, \\ 1, & x \text{ рационально}. \end{cases}$$

(доказать по определению!)

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману в $\mathbb{R}^1$

Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет меру нуль.

Контрольный вопрос

Почему функция Дирихле не интегрируема по Риману?

Локально интегрируемые функции

Определение

Ограниченная область G' называется подобластью, строго лежащей в области G, если $\bar{G}' \subset G$, при этом пишут $G' \Subset G$.

Определение

Функция f называется локально интегрируемой по Лебегу в области G, $f \in \mathcal{L}_{loc}(G)$, если $f \in \mathcal{L}(G')$ для всех измеримых $G' \Subset G$.

Контрольный вопрос

Является ли локально интегрируемой функция $f(t) = 1/t, \; t \in \mathbb{R}$?

Теорема Фубини

Теорема

Если функция $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, заданная на $\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ измерима и существует повторный интеграл Лебега

$$\int \left(\int |f| \,\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} < \infty,$$

то $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Обратно, если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, то интегралы Лебега

$$\int f \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \int f \,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

существуют почти везде, интегрируемы по Лебегу, и справедливы равенства

$$\int \left(\int f \,\mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int f \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int \left(\int f \,\mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Литература к лекции

В.С. Владимиров.
Уравнения математической физики.
М., Наука, …

И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.
Обобщенные функции и действия над ними.
М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

Локально интегрируемые функции как линейные функционалы

Определение

Функция $\phi(\mathbf{x})$ называется финитной, если $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $|\mathbf{x}| > R$ для некоторого R.

Из теоремы Лебега следует, что любой локально интегрируемой функции на $\mathbb{R}^n$ можно сопоставить линейный функционал, порождаемый локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией f, действующей по правилу $(f, \phi) = \int f \phi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

δ-функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ:

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{array}\right.$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{array}\right.$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

δ-функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ:

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{array}\right.$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{array}\right.$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \quad \forall \text{ области } \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3.$$

Хотим, чтобы было так:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ll} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{array}\right.$$

Поточечный предел не годится!

δ-функция Дирака как линейный функционал

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{bmatrix}$$

Рассмотрим слабый предел f_ϵ, т.е. для любой достаточно гладкой функции ϕ найдём предел при $\epsilon \to 0$ величины $\int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$: Вычисляя, находим:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}).$$

Слабым пределом является функционал $\delta(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\mathbf{x})$, сопоставляющий каждой непрерывной в $\mathbf{x} = 0$ функции $\phi(\mathbf{x})$ число $\phi(\mathbf{0})$: её значение в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — дельта-функция Дирака. Тогда имеем:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x})\chi_{\mathcal{V}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{bmatrix}$$

Обобщенные функции: идея

- В связи с тем, например, что решения гиперболических уравнений могут быть разрывными, для решения соответствующих задач матфизики недостаточно локально-интегрируемых функций, а нужны еще так называемые сингулярные функции (например, дельта-функция Дирака).
- При решении конкретных задач сингулярные функции встречаются, как правило, только на начальном или промежуточных этапах. В окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком “интеграла” в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией.
- Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно понимать как с ней работать.
- Множество всех регулярных (локально интегрируемых функций) и сингулярных функций является множеством обобщенных функций.

Основные и обобщенные функции — определение

- Обобщенные функции (distributions) — линейные непрерывные функционалы на пространстве достаточно “хороших” функций (основных, test functions).
- Чем более жёсткие требования налагаются на основные функции, тем богаче выбор соответствующих обобщенных функций.
- Далее рассматриваем пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных (тождественно равных нулю за пределами некоторого шара) бесконечно дифференцируемых функций: $\mathcal{D} \subset C^\infty$.
- Последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится, если они равны нулю за пределами некоторого шара и в нём они C^∞-сходятся.
- Пример основной функции, отличной от нуля, — “шапочка”: $C \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |\mathbf{x}|^2}\right) H(\epsilon - |\mathbf{x}|)$ (H — функция Хевисайда).

Определение

Обобщенные функции — элементы линейного пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$.

Основные и обобщенные функции — свойства

- Обобщенная функция f есть функционал на $\mathcal{D}$, т.е. каждой $\phi \in \mathcal{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, ϕ).
- Обобщенная функция f есть линейный функционал на $\mathcal{D}$, т.е.

$$(f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 (f, \phi_1) + \alpha_2 (f, \phi_2)\,.$$

- Обобщенная функция f есть непрерывный функционал на $\mathcal{D}$, т.е.

$$\varphi_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad (f, \varphi_k) \to 0.$$

- Линейные функционалы на $\mathcal{D}$ не обязаны быть непрерывными. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathcal{D}$; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Сходимость в $\mathcal{D}'$ и полнота $\mathcal{D}'$

Теорема

Пусть последовательность $f_k \in \mathcal{D}'$ такова, что для каждой $\phi \in \mathcal{D}$ числовая последовательность (f_k, ϕ) сходится при $k \to \infty$. Тогда функционал f на $\mathcal{D}$, определенный равенством

$$(f, \phi) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \phi)$$

также является линейным и непрерывным.

Носитель основной функции

Определение

Носителем $\operatorname{supp}\phi$ непрерывной функции называется замыкание множества тех точек, где $\phi \neq 0$.

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области $\mathcal{G}$, обозначим через $\mathcal{D}(G)$; таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}$.

Нулевое множество обобщенной функции

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль $(f = 0)$ обобщенной функции в области.

Определение

Обобщенная функция f обращается в нуль в области $\mathcal{G}$, если $(f, \phi) = 0 \; \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Теорема

Обобщенная функция f обращается в нуль в некоторой окрестности каждой точки области $\mathcal{G}$ $\iff$ f обращается в нуль в области $\mathcal{G}$.

Определение

Объединение всех окрестностей, где $f = 0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$ которое называется нулевым множеством обобщенной функции f и представляет собой наибольшее открытое множество, где $f = 0$.

Носитель обобщенной функции

Определение

Носителем $\operatorname{supp} f$ называется $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$.

Определение

Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется финитной.

Регулярные обобщенные функции

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией f: $(f, \phi) = \int f \phi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Теорема (лемма дю Буа-Реймона)

Для того чтобы локально интегрируемая в $\mathcal{G}$ функция $f(x)$ обращалась в нуль в области $\mathcal{G}$ в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в $\mathcal{G}$.

Доказательство.

Достаточность очевидна, необходимость доказывается разложением по локальной тригонометрической системе для шара, содержащегося в окрестности выбранной точки области $\square$

Всякая локально интегрируемая функция определяет регулярную обобщенную функцию. Из теоремы следует, что если регулярные обобщенные функции равны в смысле обобщенных функций, то они равны почти везде как локально-интегрируемые. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею обобщенную функцию.

Сингулярные обобщенные функции

Сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией.

Примеры.

- Дельта-функция Дирака $\delta(\mathbf{x})$;
- $\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$: $\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \phi\right) = \mathrm{VP} \int \frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ — интеграл в смысле главного значения.

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$\urcorner\ f$ — локально интегрируемая, $t = A\tau + b,\ A \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^1$ на себя. Тогда:

$$\big(f(A\tau + b), \phi\big) = \int_{\mathbb{R}} f(A\tau + b)\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{\color{red}{|A|}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|A|}\Big(f, \phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\Big)$$

$\urcorner\ f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$\big(f(At + b), \phi\big) \equiv \frac{1}{|A|}\Big(f, \phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\Big)$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\exists\, f$ — локально интегрируемая, $\mathbf{x} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{b}$, $\det\mathbf{A} \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ на себя. Тогда:

$$\big(f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b}), \phi\big) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b})\phi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\Big(f, \phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\Big)$$

$\exists\, f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$\big(f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}), \phi\big) \equiv \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\Big(f, \phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\Big)$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: частные случаи

- $\big(f(c\mathbf{x}), \phi\big) = \frac{1}{|c|^n}\big(f, \phi(c^{-1}\mathbf{x})\big)$
- $\big(f(\mathbf{x}+\mathbf{b}), \phi\big) = \big(f, \phi(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)$
- $\big(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \phi\big) = \big(\delta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\big) = \phi(x_0)$
- $\delta(c\mathbf{x}) = \frac{1}{|c|^n}\delta(\mathbf{x})$
- $[\delta(t)] =$ секунда$^{-1}$, если t — время.

Умножение обобщенных функций

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую: $\exists\ a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:

Определение

$$(af, \phi) \equiv (f, a\phi).$$

Примеры.

- $a(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{0})\delta(\mathbf{x})$
- $t \,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} = 1$:

$$\left(t \,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \phi\right) = \left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, t\phi\right) = \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}} \frac{t\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t = (1, \phi).$$

Умножение обобщенных функций

Операция произведения не допускает распространения на любые обобщённые функции так, чтобы она была ассоциативной, коммутативной и чтобы сужение этой операции на множество непрерывных функций совпадало с обычным произведением:

$$0 = 0\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} = \big(t\delta(t)\big)\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} = \big(\delta(t)t\big)\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} = \delta(t)\left(t\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}\right) = \delta(t)$$

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}} Df(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(t)D\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

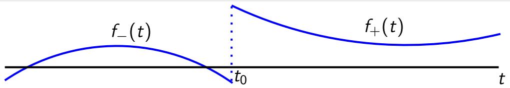
Определение

$$(Df,\phi) \ = -(f,D\phi)$$

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$f(t) = \begin{bmatrix} f_-(t), & t < t_0, \\ f_+(t), & t > t_0; \end{bmatrix}$ $\quad f_-(t_0) \neq f_+(t_0), \quad f_\pm \in C^1$. Вычислить f'.



$\{f'\} \equiv \begin{bmatrix} f'_-(t), & t < t_0, \\ f'_+(t), & t > t_0; \end{bmatrix}$ — классическая производная $f(t)$, $[f] \equiv f_+(t_0) - f_-(t_0)$ — величина скачка.

$$(f', \phi) = -(f, \phi') = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t = -\left(\int_{-\infty}^{t_0} + \int_{t_0}^{\infty}\right) f(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \big(f(t_0+0) - f(t_0-0)\big)\phi(t_0) + \int_{\mathbb{R}} \{f'\}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \big([f]\delta(t-t_0) + \{f'\}, \phi\big).$$

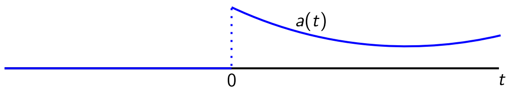
Следствие

$H' = \delta$.

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$f(t) = a(t)H(t),\ a \in C^1$ Вычислить f'.



Свойства $\delta'(t)$

Задача

Доказать равенство: $a(t)\delta'(t) = -a'(0)\delta(t) + a(0)\delta'(t),\ a \in C^1.$

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})D^\alpha\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Определение

$$(D^\alpha f, \phi) \ = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\phi)$$

Здесь используются обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— мульти-индекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha\phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\dots\partial^{\alpha_n}x_n}$$

— частная производная ϕ порядка $|\alpha|$.

Свойства обобщенных производных

- Если обобщенная функция гладкая, то ее обобщенная производная совпадает с классической производной (прямое следствие определения обобщенной производной)
- Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема (поскольку основные функции бесконечно дифференцируемы)
- Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (поскольку это так для основных функций)

Дифференцирование произведения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую

Утверждение

Для произведения af, где $a \in C^\infty$, $f \in \mathcal{D}'$, справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения. Например, в одномерном случае

$$(af)' = a'f + af'.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}((af)', \phi) = -(af, \phi') = -(f, a\phi') = -\big(f, (a\phi)' - a'\phi\big) = \\ = -\big(f, (a\phi)'\big) + \big(f, a'\phi\big) = (f', a\phi) + (a'f, \phi) = (a'f + af', \phi)\end{aligned}$$

□

$\delta\big(f(t)\big)$

Наводящие соображения:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi(0)$$

$\daleth\ \tau = f(t)$ — монотонная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный простой корень при $t = t_0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\big(f(t)\big)\phi\big(f(t)\big)|f'(t)|\,\mathrm{d}t = \phi(0)$$

$\daleth\ \psi(t) = \phi\big(f(t)\big)|f'(t)|$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\big(f(t)\big)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \phi(0) = \frac{\psi(t_0)}{|f'(t_0)|}.$$

$\delta\big(f(t)\big)$

Определение

$\exists\; t_i$ — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i) = 0,\; f'(t_i) \neq 0$. Тогда

$$\Big(\delta\big(f(t)\big), \phi\Big) = \sum_i \frac{\phi(t_i)}{|f'(t_i)|},$$

т.е.

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i).$$

Это определение является естественным обобщением на нелинейный случай формулы для линейной замены переменных в обобщенных функциях.

Пример

$\delta(\sin t) = \sum_i \delta(t - \pi i).$

$\delta^{(n)}\big(f(t)\big)$

Наводящие соображения:

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i) \quad\Longrightarrow\quad \delta'\big(f(t)\big)f'(t) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\frac{\mathrm{d}\delta(t-t_i)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow\quad \delta'\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}\delta(t-t_i)}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \delta'\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta(t-t_i).$$

Определение

$\rceil$ t_i — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i)=0,\ f'(t_i)\neq 0$. Тогда

$$\delta^{(n)}\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\delta(t-t_i). \tag{9}$$

Контрольный вопрос

Можно ли заменить в формуле (9) оператор $\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ на $\left(\frac{1}{f'(t_i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$?

Структура пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$

Теорема

Любая обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторых непрерывных функций.

Формулы Сохоцкого

Утверждение

$$\frac{1}{t \pm i0} = \mp i\pi\delta(t) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{t}$$

Доказательство.

$\exists\ \phi(t) \equiv 0$ при $|t| > R$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to+0}\int \frac{\phi(t)}{t \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{t \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\phi(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{\cancel{t} \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\phi(0)\,\mathrm{d}t + \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{t \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\big(\phi(t)-\phi(0)\big)\,\mathrm{d}t = \\
&= \mp 2i\phi(0)\lim_{\epsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\epsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \mp i\pi\phi(0) + \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(0)}{t}\,\mathrm{d}t = \mp i\pi\phi(0) + \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\square$

Задачи

1. $\exists\; f(t) = a(t)H(t),\; a \in C^2.$ Вычислить f''.
2. Вычислить обобщенные производные порядка 1, 2, 3 функций $f_1(t) = |t| \sin t,\, f_2(t) = |t| \cos t.$
3. Вычислить обобщенную производную $f^{(n)}$ порядка n функции $f(t) = \operatorname{sign}(\sin t).$

Прямое произведение обобщенных функций

$\exists\ f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{y})$ — локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Функция $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ также будет локально интегрируемой в $\mathbb{R}^{m+n}$. Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции ϕ по формулам

$$(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi) \equiv \iint f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} =$$

$$= \int f(\mathbf{x}) \int g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x} = \big(f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi)\big) =$$

$$= (g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}), \phi) = \iint g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} =$$

$$= \int g(\mathbf{y}) \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \big(g(\mathbf{y}), (f(\mathbf{x}), \phi)\big)$$

Прямое произведение обобщенных функций

Определение

Прямым произведением обобщенных функций $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ соответственно называется обобщенная функция $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, действующая по правилу $\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) = \Big(f(\mathbf{x}), \big(g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)\Big)$.

Теорема (корректность определения)

Функционал, определяемый формулой $\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) = \Big(f(\mathbf{x}), \big(g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)\Big)$, линейный и непрерывный.

Свойства прямого произведения обобщенных функций

- Коммутативность
$$f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x})$$
(для $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{y})$ очевидна, в общем случае следует из того, что множество таких функций всюду плотно в $\mathcal{D}$)
- Ассоциативность
$$\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) \cdot h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \cdot \big(g(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{z})\big)$$
- Умножение прямого произведения. $\exists\ a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:
$$a(\mathbf{x})\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) = \big(a(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\big) \cdot g(\mathbf{y})$$
- Дифференцирование прямого произведения
$$D^\alpha_{\mathbf{x}}\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) = \big(D^\alpha_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\big) \cdot g(\mathbf{y})$$

Прямое произведение: пример

Обобщенная функция $f(x) \cdot 1(y)$, которая не зависит от y:

$$\big(f(x) \cdot 1(y), \phi\big) = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x), \phi(x, y)\big)\, \mathrm{d}y.$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}$.

Свёртка регулярных обобщённых функций

Определение

$\daleth$ $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ — локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$ такие, что функция $\int |g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathrm{d}\mathbf{y}$ также локально интегрируема. Свёрткой $f * g$ называется функция

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = (g * f)(\mathbf{x})$$

Она стандартным образом определяет (регулярную) обобщенную функцию:

$$(f * g, \phi) = \int (f * g)(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int \left(\int g(\mathbf{y})f(\xi-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int g(\mathbf{y})\left(\int f(\xi-\mathbf{y})\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \int g(\mathbf{y})\left(\int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \int\int g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,d\mathbf{y}$$

Свёртка (в классическом смысле) существует не всегда!

Некоторые достаточные условия существования свёртки:

- Одна из функций финитна;
- Обе функции обращаются в нуль при $x < 0$ $(n = 1)$;
- Обе функции интегрируемы в $\mathbb{R}^n$.

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

$$(f * g, \phi) = \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})\big),$$

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

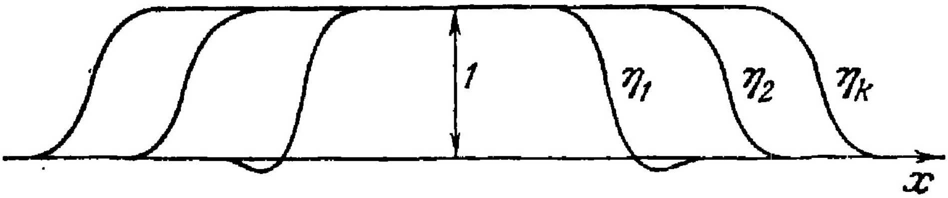
$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) \quad \forall \eta_k,$$

где $\eta_k \twoheadrightarrow 1$ (сходится к единице) в $\mathcal{D}$:

- $\forall$ замкнутого и ограниченного множества $\mathcal{K}$ найдется N: $\eta_k = 1$ при $k \geq N$, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$;
- η_k равномерно ограничены со всеми своими производными: $|D^\alpha \eta_k| < C_\alpha$.

Для обобщённых функций:

$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) \quad \forall \eta_k$$



Свёртка обобщённых функций: определение и свойства

Определение

Пусть пара обобщенных функций $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такова, что их прямое произведение $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ допускает продолжение на функции вида $\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})$, а именно $\forall \phi \in \mathcal{D}$, $\forall \eta_k \twoheadrightarrow 1$ $\exists$ предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big),$$

не зависящий от выбора η_k. <u>Свёрткой</u> $f * g$ называется функционал

$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big).$$

Свойства:

- Линейность;
- Коммутативность (следствие коммутативности прямого произведения).

Свёртка с δ

Утверждение

Свертка любой обобщенной функции f с δ-функцией существует и равна f:

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x})\cdot\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(\mathbf{x})\big(\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)\Big) = \lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x}), \eta_k(\mathbf{x},0)\phi(\mathbf{x})\right) = (f,\phi)$$

□

Дифференцирование свёртки

Теорема

Если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $(D^\alpha f) * g$ и $f * (D^\alpha g)$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g$$

Доказательство.

Достаточно доказать $\forall\, D_j$:

$$\exists\ \forall \eta_k \twoheadrightarrow 1 \implies \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} \twoheadrightarrow 1 \quad \implies \quad (D_j(f*g),\phi) = -(f*g, D_j\phi) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\left(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{\partial x_j}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \frac{\partial\big(\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)}{\partial x_j} - \frac{\partial\big(\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)}{\partial x_j}\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\Big(D_j f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\Big) + \lim_{k\to\infty}\left(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \left(\eta_k + \frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) - \lim_{k\to\infty}\Big(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \eta_k\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\Big(D_j f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\Big) + (f*g,\phi) - (f*g,\phi) = \lim_{k\to\infty}\Big(D_j f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\Big) =$$

$$= (D_j f * g, \phi)$$

Второе равенство $f * D_j g = D_j(f*g)$ следует из первого и коммутативности свертки. □

Дифференцирование свёртки

- Существование сверток $(D^\alpha f) * g$ и $f * D^\alpha g$ $(|\alpha| \geq 1)$ не достаточно для существования свертки $f * g$ и справедливости равенства $(D^\alpha f) * g = f * D^\alpha g$. Контрольный вопрос: почему?
- Например: $H' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $H * 1' = H * 0 = 0$. Контрольный вопрос: что можно сказать про свёртку $H * 1$?
- Операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(H * \delta') * 1 = H' * 1 = 1,$$
$$H * (\delta' * 1) = H * 0 = 0.$$

Свёртка с $\delta^{(n)}$

Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции с $\delta^{(n)}$ существует и равна $f^{(n)}$:

$$f * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * f = f^{(n)}.$$

Доказательство.

Применяем теорему о дифференцировании свёртки к тождеству

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

$\square$

Достаточные условия существования свёртки обобщённых функций

- Одна из функций финитна
- $n = 1$: Обе функции обращаются в нуль при $t < 0$ (в этом случае можно доказать ассоциативность операции свертки).

Задачи

1. Вычислить свёртки: $H(t) * \delta'(t)$, $H(t) * H(t)$, $H(t) * H(-t)$.
2. Упростить выражение $\sin t \cdot \delta\big(\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})\big)$.
3. Вычислить $|\sin t|'' + |\sin t|$.

Литература к лекции

- И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.
  Обобщенные функции и действия над ними.
  М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
- В.С. Владимиров.
  Обобщенные функции в математической физике.
  М., Наука, 1976.

Обобщенное решение линейных ODE/PDE с постоянными коэффициентами

$$\exists \qquad L(D)u(\mathbf{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad f \in \mathcal{D}'$$

— линейное ODE/PDE порядка n с постоянными коэффициентами.

Определение

Обобщенным решением в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т.е. для любой $\phi \in \mathcal{D}$:

$$(L(D)u, \phi) = (f, \phi)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(u, \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \phi)\right) = (f, \phi)$$

Всякое классическое решение является и обобщенным решением. Всякое гладкое обобщенное решение является классическим решением.

ODE $\dot{u} = 0$

Лемма

$\phi_0 \in \mathcal{D}$ может быть представлена как $\phi_0 = \dot{\phi}_1,\ \phi_1 \in \mathcal{D} \iff \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Доказательство.

$\sqsupset \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0\colon \quad \phi_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{D}$

$\sqsupset \phi_0 = \dot{\phi}_1\colon \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = \phi_1(t)\big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$ $\square$

ODE $\dot{u} = 0$

Теорема

Общее решение уравнения $\dot{u} = 0$ в классе обобщенных функций — $u = C = \mathrm{const}$.

Доказательство.

$\dot{u} = 0 \iff (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = 0$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$\exists\, \phi_1 \in \mathcal{D},\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

$\forall \phi \in \mathcal{D}: \quad \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \phi_0(t)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_{C} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} C\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Определение

Первообразной (или неопределенным интегралом) от обобщённой функции $f(t) \in \mathcal{D}'$

$$u = \int f \, \mathrm{d}t$$

называется решение ОДУ

$$\dot{u} = f(t).$$

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Теорема

Любая обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{D}'$ имеет единственную с точностью до аддитивной постоянной первообразную.

Доказательство.

$\dot{u} = f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \phi \quad (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = (f, \phi)$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$\exists\ \phi_1 \in \mathcal{D},\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

$\forall \phi \in \mathcal{D}\ :\ \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \phi_0(t)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \Longrightarrow$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_{C} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + (u, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C\phi(t)\,\mathrm{d}t - \left(f, \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f \\ \dot{u}_2 = f \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (u_1 - u_2)^{\cdot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 - u_2 = \mathrm{const} \qquad \square$$

Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Определение

Фундаментальным решением $\Phi(t)$ (функцией Грина, функцией влияния) оператора $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ (или ODE $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)u = f$) называется обобщенное решение ODE

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = \delta(t).$$

Фундаментальное решение очевидно не единственно. Если $\Phi_1(t)$ — фундаментальное решение, то $\Phi_1 + \Phi_0$, где

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_0 = 0$$

также является фундаментальным решением.

При рассмотрении задач Коши для ODE и гиперболических / параболических PDE нас будут интересовать фундаментальные решения, обладающие свойством $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$.

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

$\rceil\, n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = U(0)\delta(t) + \dot{U}(t)H(t),$$
$$\ddot{\Phi}(t) = U(0)\dot{\delta}(t) + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

$\Longrightarrow \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. $\square$

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

$\rightharpoondown$ $n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = \cancel{U(0)\delta(t)} + \dot{U}(t)H(t),$$
$$\ddot{\Phi}(t) = \cancel{U(0)\dot{\delta}(t)} + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

$\Longrightarrow \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. $\square$

Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Пример 1

Фундаментальным решением оператора $\dfrac{d^2}{dt^2} + a^2$ является функция

$$\Phi(t) = H(t)\,\frac{\sin at}{a}.$$

Пример 2

Фундаментальным решением оператора $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a$ является функция

$$\Phi(t) = H(t)\exp(-at).$$

Обобщенное решение неоднородного линейного ODE с постоянными коэффициентами

Теорема

Пусть $f \in \mathcal{D}'$ такова, что свертка $\Phi * f$ существует в $\mathcal{D}'$. Тогда решение уравнения

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)u = f(t)$$

существует в $\mathcal{D}'$ и дается формулой $u = \Phi * f$.

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ для которых существует свертка с Φ.

Доказательство.

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(\Phi * f) = \left(L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi\right) * f = \delta * f = f.$$

Для доказательства единственности этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{u} = 0$ имеет только нулевое решение. Это так:

$$\hat{u} = \hat{u} * \delta = \hat{u} * L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{u} * \Phi = 0.$$

$\square$

Обобщенная задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: идея

Задача

$u(t) = u_*(t)H(t),\ u_* \in C^2.$ Вычислить $\dot{u}, \ddot{u}$.

$$\dot{u} = u_*(0)\delta(t) + \dot{u}_*(t)H(t),$$
$$\ddot{u} = u_*(0)\dot{\delta}(t) + \dot{u}_*(0)\delta(t) + \ddot{u}_*(t)H(t).$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\ddot{u}_* + \omega^2 u_* = f_*(t),$$
$$u_*(0) = u_0, \qquad \dot{u}_*(0) = u_1.$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_* + \omega^2 u_* = f_*(t), \\ &u_*(0) = u_0, \qquad \dot{u}_*(0) = u_1. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши: $\forall t \in \mathbb{R}$ разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ &f(t) = f_*(t)H(t) + u_0\dot{\delta}(t) + u_1\delta(t), \\ &u\big|_{t<0} \equiv 0. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_*.

Решение задачи Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: интеграл Дюамеля

Обобщенная задача Коши: $\forall t \in \mathbb{R}$ разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ &f(t) = f_*(t) + u_0\dot{\delta}(t) + u_1\delta(t), \quad f_*|_{t<0} \equiv 0, \\ &u\big|_{t<0} \equiv 0. \end{aligned}$$

Решение обобщенной задачи Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами существует (поскольку при $n = 1$ существует свёртка любых двух обобщенных функций, тождественно равных нулю при $t < 0$), единственно и выражается формулой:

$$u = \Phi * f.$$

В частности, в случае гладкой функции f_* решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau) f_*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_0\cos\omega t + u_1\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

Задача Коши для линейного ODE с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$u_*^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_*^{(k)} \equiv L\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)u_*(t) = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dots \quad , u_*^{(n-1)}(0) = u_{n-1}.$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$L\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)u(t) = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t)H(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0,$$

$$c_{n-1} = u_0, \quad c_{n-2} = a_{n-1}u_0 + u_1, \quad \dots, \quad c_0 = a_1 u_0 + \dots a_{n-1}u_{n-2} + u_{n-1}.$$

Задачи

1. Сформулировать обобщенную задачу Коши, соответствующую классической задаче Коши для уравнения

$$\ddot{u} + 2\eta\dot{u} + \omega^2 u = f(t),$$
$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1.$$

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

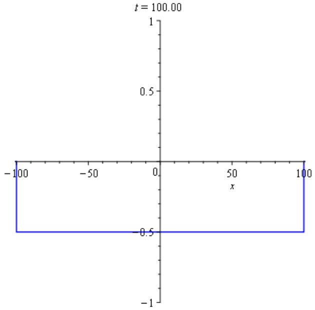
Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0.$



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t + \frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0$:

$$\dot{\Psi}_1 = \dots ,$$
$$\Psi_1' = \dots .$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0$:

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + \delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big),$$

$$\Psi_1' = -\frac{1}{2}\Big(-\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + \delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t + \frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0:$

$$\ddot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\dot{\delta}\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + \dot{\delta}\Big(t + \frac{x}{c}\Big)\Big),$$

$$\Psi_1'' = -\frac{1}{2c}\Big(\dot{\delta}\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + \dot{\delta}\Big(t + \frac{x}{c}\Big)\Big).$$

$\square$

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t \to +0$:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) \to 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + \delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big) \to -c^2\delta(x).$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство

$$(\Psi_1{}'' - c^{-2}\ddot{\Psi}_1, \phi) = (\Psi_1, \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = -\frac{c}{2}\big(H(ct - |x|), \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}\big) =$$

$$= -\frac{c}{2}\iint (\phi'' - c^{-2}\ddot{\phi})H(ct - |x|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \int_{-ct}^{ct} \phi''\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|/c}^{\infty} \ddot{\phi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}\Big(x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(-x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство.

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

$$-\frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(t,\frac{t}{c}\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(-t,\frac{t}{c}\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

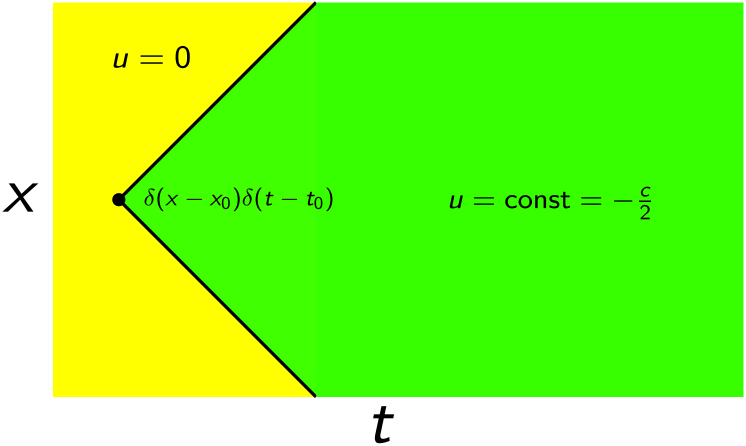
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{\phi}(ct,t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{\phi}(-ct,t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\frac{d\phi(ct,t)}{dt} + \frac{d\phi(-ct,t)}{dt}\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\phi(0,0) + \frac{1}{2}\phi(0,0) = (\delta,\phi)$$

$\square$

Свойства фундаментального решения: область влияния — характеристический (световой) конус будущего



Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$

$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u''_* - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x, t) = u_*(x, t)H(t)$:

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = f(x, t),$$

$$f(x, t) = f_*(t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_*.

Обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x,t) = u_*(x,t)H(t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f(x,t),$$

$$f(x,t) = f_*(x,t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения существует, единственно и выражается в виде *запаздывающего потенциала*:

$$u = \Psi_1 * f.$$

(поскольку существует свёртка двух функций равных нулю в области $t < 0$, таких что при $t > 0$ одно из них имеет носитель внутри светового конуса).

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u''_* - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x, t),$$
$$u_*(x, 0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Задача

Получить формулу Даламбера

$$u = -\frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \frac{c}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{c^2}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big).$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Решение

$$\urcorner\ f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$$

$$f_* H(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau) f_*(\xi,\tau) H(t-\tau) H\Big(t-\tau-\frac{|x-\xi|}{c}\Big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = -\frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

$$t-\tau-\frac{|x-\xi|}{c} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-\xi| < c(t-\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > \xi > x - c(t-\tau) \\ x < \xi < x + c(t-\tau) \end{array}\right.$$

$$\overset{t-\tau>0}{\Longleftrightarrow} \quad x - c(t-\tau) < \xi < x + c(t-\tau)$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u''_* - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Решение

$\urcorner\ f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$

$$u_1(x)\delta(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)\, \delta(\tau) H\Big(t - \tau - \frac{|x-\xi|}{c}\Big)\, \mathrm{d}\tau\, d\xi =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) H\Big(t - \frac{|x-\xi|}{c}\Big)\, \mathrm{d}\xi = -\frac{c}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

$$t - \frac{|x-\xi|}{c} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-\xi| < ct \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > \xi > x - ct \\ x < \xi < x + ct \end{array}\right. \overset{t>0}{\Longleftrightarrow} \quad x - ct < \xi < x + ct$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Решение

$\daleth\ f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$

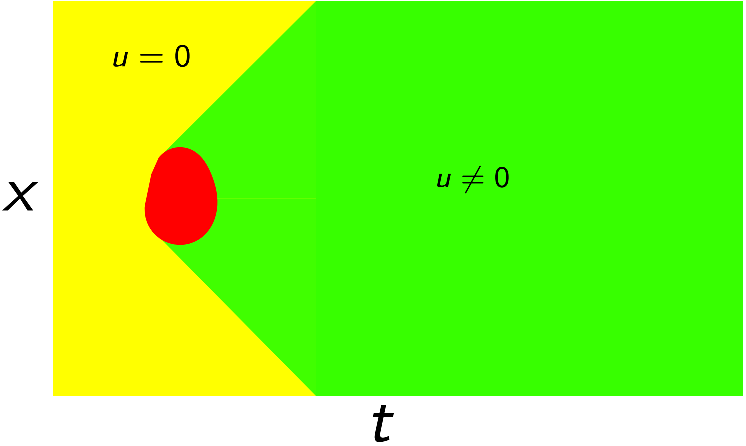
$$u_0(x)\dot{\delta}(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\, \dot{\delta}(\tau) H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\, \mathrm{d}\tau\, d\xi = -\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\delta\big(t - \tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= -\frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\delta\big(ct - |x-\xi|\big)\, \mathrm{d}\xi = -\frac{c^2}{2}\big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\big)$$

$$|x-\xi| = ct \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > \xi = x - ct \\ x < \xi = x + ct \end{array}\right. \quad \overset{t>0}{\Longleftrightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} \xi = x - ct \\ \xi = x + ct \end{array}\right.$$

Свойства запаздывающего потенциала: характеристический (световой) конус будущего



Одномерное волновое уравнение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$

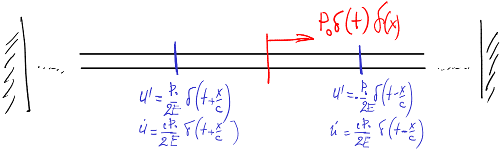
Решение Даламбера: $u = \overbrace{\Psi_+(x+ct)}^{\text{волна}} + \Psi_-(\underbrace{x-ct}_{\text{фаза}:\ \phi_\pm}),$

$\Psi_\pm$ — произвольные функции.

Фундаментальное решение:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right).$$

Бесконечный стержень под действием сосредоточенной продольной импульсной нагрузки



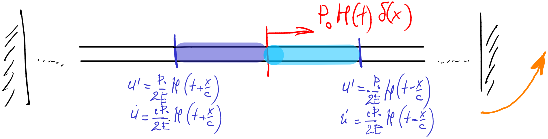
$$E S u'' - \rho_0 S \ddot{u} = -S P_0 \delta(x)\delta(t) \Longrightarrow u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -\frac{P_0}{E}\delta(x)\delta(t)$$

$$\underset{u|_{t<0}=0}{\Longrightarrow} \qquad u = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$u' = \frac{P_0}{2E}\left(-H(x)\delta\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)\delta\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\dot{u} = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)\delta\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)\delta\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



$$E[u'] = -P_0$$
$$[\dot u] = 0$$
$$c u'_- = \dot u_-$$
$$c u'_+ = -\dot u_+$$

$$E S u'' - \rho_0 S \ddot u = -S P_0 \delta(x) H(t) \implies u'' - \frac{1}{c^2}\ddot u = -\frac{P_0}{E}\delta(x) H(t)$$

$$\implies \quad u\big|_{t<0} \equiv 0$$

$$u = \int_0^t \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x) H\left(\tau - \frac{x}{c}\right) + H(-x) H\left(\tau + \frac{x}{c}\right)\right) d\tau =$$

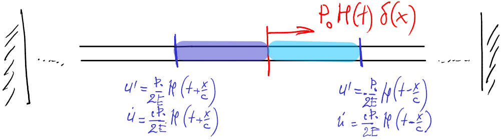
$$= \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)\,\vartheta\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)\,\vartheta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right), \qquad \vartheta(t) = t H(t)$$

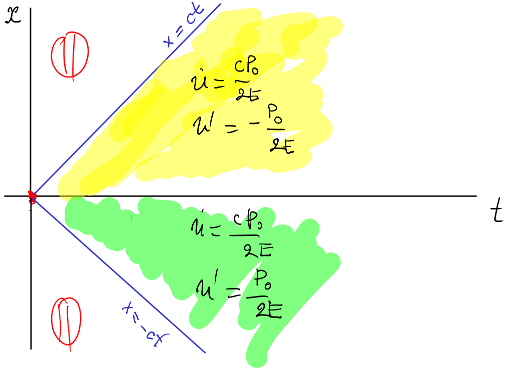
$$\dot u = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x) H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$u' = \frac{P_0}{2E}\left\{H(x)\left(\int_0^t H\left(\tau - \frac{x}{c}\right) d\tau\right)'_x + H(x)\left(\int_0^t H\left(\tau + \frac{x}{c}\right) d\tau\right)'_x\right\} =$$

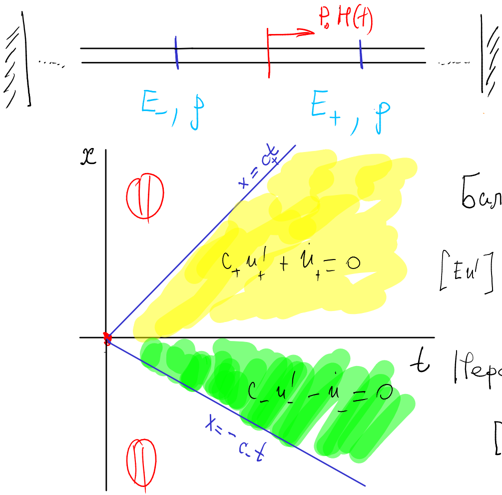
$$= \frac{P_0}{2E}\left(-H(x) H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки





Составной стержень



Баланс сил:

$$[Eu'] = \rho[c^2 u'] = -P_0$$

Неразрывность:

$$[\dot u] = 0$$

Составной стержень

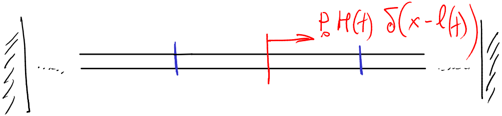
$$\rho_1\left(c_+^2 u_+' - c_-^2 u_-'\right) = -P_0$$
$$\dot u_+ - \dot u_- = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_+ u_+' + \dot u_+ &= 0 \\ c_- u_-' - \dot u_- &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} c_+ u_+' + c_- u_-' = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c_+^2 u_+' + c_+ c_- u_-' = 0 \Longrightarrow c_+ c_- u_-' + c_-^2 u_-' = \frac{P_0}{\rho_0}$$

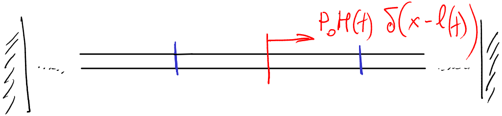
$$\Longrightarrow u_\pm' = \mp \frac{P_0}{\rho_0 c_\pm (c_+ + c_-)}$$

Подвижная нагрузка: условия Гюгонио



$$
\begin{aligned}
&[u] = 0 \\
&-P_0 = E[u'] + \rho \dot{l}\, [\dot{u}]
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&[\dot{u}] + \dot{l}\, [u'] = 0 \\
&-P_0 = \rho_0 (c^2 - \dot{l}^2) [u']
\end{aligned}
$$

Подвижная нагрузка: докритический случай



$\exists\ \dot\ell \equiv V$

$|V| < c$

$$[u] = 0 \quad\Longrightarrow\quad [\dot u] + \dot\ell\,[u'] = 0$$

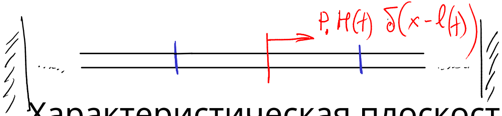
$$-P_0 = E\,[u'] + \rho\dot\ell\,[\dot u] \qquad\qquad -P_0 = \rho_0\left(c^2 - \dot\ell^2\right)[u']$$

$$\begin{aligned} c\,u'_+ + \dot u_+ &= 0 \\ c\,u'_- - \dot u_- &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad [\dot u] + c\,u'_+ + c\,u'_- = 0 \;\Rightarrow\; c\,u'_+ + c\,u'_- - \dot\ell\,[u'] = 0$$

$$\Rightarrow\quad (c - \dot\ell)\,u'_+ + (c + \dot\ell)\,u'_- = 0 \quad\Rightarrow\quad (c-\dot\ell)^2 u'_+ + (c^2 - \dot\ell^2)\,u'_- = 0$$

$$-P_0 = \rho_0\left(c^2 - \dot\ell^2\right) u'_+ + \rho_0 (c - \dot\ell)^2 u'_+ \quad\Rightarrow\quad u'_\pm = \frac{\mp P_0}{2E\left(1 \mp \dot\ell/c\right)}$$

Подвижная нагрузка: докритический случай

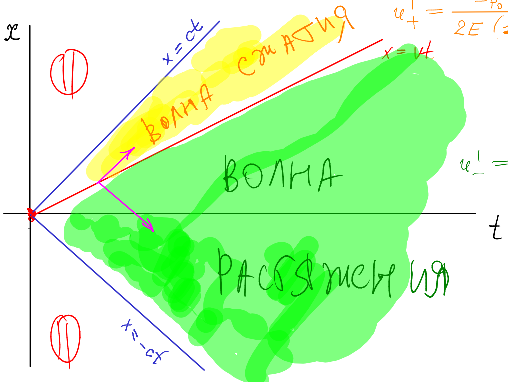


$\exists\ \dot{\ell} \equiv v = \text{const}$

$|v| < c$

Характеристическая плоскость

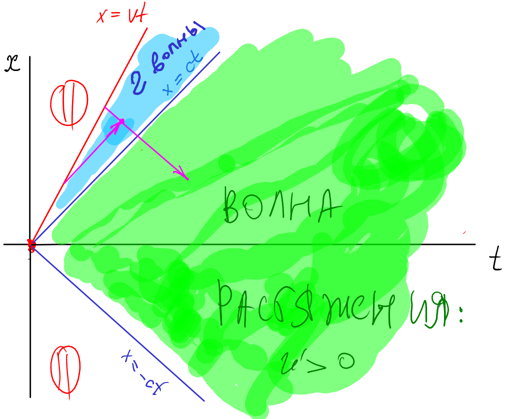
$u'_+ = \dfrac{-P_0}{2E\,(1 - \dot{\ell}/c)}$



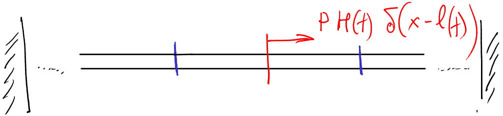
$u'_- = \dfrac{P_0}{2E\,(1 + \dot{\ell}/c)}$

Подвижная нагрузка: закритический случай

Характеристическая плоскость



Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u]=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot u_- + \dot\ell\, u'_- = 0$$

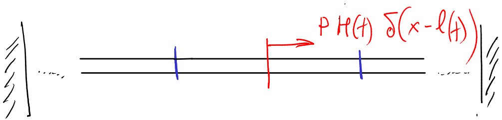
$$-P_0 = E\,[u'] + \rho_0 \dot\ell\, [\dot u] \qquad\qquad P_0 = \rho_0 \left(c^2 - \dot\ell^2\right) u'_-$$

В зоне сжатия:

$$u'_- = \frac{-P_0}{E\left(\dot\ell^2/c^2 - 1\right)}, \qquad \dot u_- = \frac{P_0\,\dot\ell}{E\left(\dot\ell^2/c^2 - 1\right)}$$

$$u = u_L(x+ct) + u_R(x-ct)$$

Подвижная нагрузка: закритический случай



$$\begin{cases} [u] = 0 \\ -P_0 = E[u'] + \rho_0 \dot{\ell}[\dot{u}] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{u}_- + \dot{\ell} u'_- = 0 \\ P_0 = \rho_0 (c^2 - \dot{\ell}^2) u'_- \end{cases}$$

В зоне растяжения: $u = u_L(x+ct) \Rightarrow u' = u'_L,\ \dot{u} = c u'_L$

$$u'_- = u'_R + u'_L; \quad \dot{u}_- = -c u'_R + c u'_L \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} u'_R + u'_L &= \frac{-P_0}{E\left(\dot{\ell}^2/c^2 - 1\right)} \\ -u'_R + u'_L &= \frac{P_0 \dot{\ell}}{cE\left(\dot{\ell}^2/c^2 - 1\right)} \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \quad u'_L = \frac{P_0}{2E\left(\dot{\ell}^2/c^2 - 1\right)}\left(-1 + \frac{\dot{\ell}}{c}\right) = \frac{P_0}{2E\left(1 + \dot{\ell}/c\right)}$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

Получить выражения для деформаций u' в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке, движущейся по произвольному закону, как свертку фундаментального решения Ψ_1 с функцией нагрузки:

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

$\Longrightarrow$

$$u = \frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau)P(\tau)\delta\big(\xi - \ell(\tau)\big)H(t-\tau)H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\ell(\tau)|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau$$

$\Longrightarrow$

$$u' = \frac{c}{2}\int_0^t P(\tau)\frac{\partial}{\partial x}H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\ell(\tau)|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(x - \ell(\tau)\big)\delta\big(t - \tau - \tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(\ell(\tau) - x\big)\delta\big(t - \tau + \tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u' = -\frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(x-\ell(\tau)\big)\delta\big(t-\tau-\tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(\ell(\tau)-x\big)\delta\big(t-\tau+\tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau = \sum_i u_i'$$

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i), \quad \text{где } f(t_i)=0.$$

$$u' = \frac{1}{2}\left(-\sum_{t_i'\in\mathcal{T}_+}\frac{P(t_i')}{\left|1-\frac{\dot\ell(t_i')}{c}\right|} + \sum_{t_i'\in\mathcal{T}_-}\frac{P(t_i')}{\left|1+\frac{\dot\ell(t_i')}{c}\right|}\right)$$

u' представляет собой сумму вкладов от множества точек $\mathcal{T}=\{t_i'\}$ в промежутке интегрирования таких, что

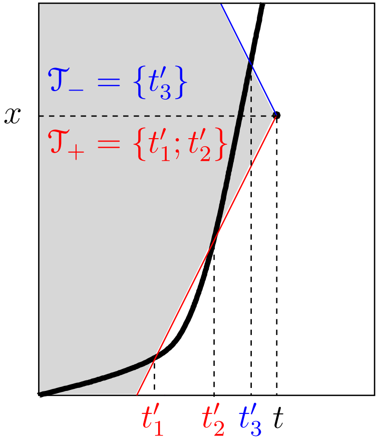
$$t-t_i'-\frac{|x-\ell(t_i')|}{c}=0$$

При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{T}_+=\{t_i' : x-\ell(t_i')>0\}$ и $\mathcal{T}_-=\{t_i' : x-\ell(t_i')<0\}$.

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

- При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{T}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$ и $\mathcal{T}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$.
- Наличие точки t'_i такой, что $x - \ell(t'_i) = 0$, свидетельствует о том, что рассматриваемая точка $(t; x)$ находится под нагрузкой. В этом случае производная u' разрывна, и говорить имеет смысл лишь о пределах производной слева и справа.
- При фиксированных x и t множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+$ будет конечным, если принять ограничение: $\ell(t)$ — кусочно-монотонная функция, такая что $|\dot{\ell}| = c$ лишь в конечном числе точек.

$$t'_i + \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = t$$



Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

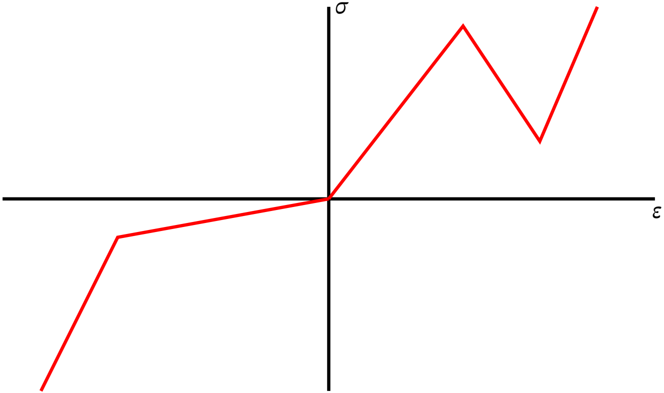
Выписать аналогичную формулу для скоростей $\dot{u}$.

Задача

Получить выражения для деформаций в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке постоянной интенсивности, движущейся с постоянной докритической и закритической скоростью, с помощью полученной выше формулы.

Пример механической системы, для которой характерно распространение фронтов разрывов деформаций: продольные движения стержня из полилинейного материала

Баланс количества движения: $T' - \rho_0 S\ddot{u} = f$.
Выражение для силы: $T = S\sigma$.
Определяющие уравнение для напряжения: $\sigma = \sigma_i + E_i u'$, $\varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_i$
Внутренняя энергия: $W = \int \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon$.



Условия Гюгонио на разрыве

Неразрывность:

$$[u(\ell(t), t)] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [\dot{u} + \dot{\ell} u'] = 0$$

Баланс количества движения:

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}]$$

Баланс энергии на разрыве

$$[\dot u + \dot\ell u'] = 0, \tag{1}$$

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot\ell [\dot u] \tag{2}$$

Вычислим диссипацию энергии на разрыве:

$$\mathcal{D} = [\sigma \dot u] + \dot\ell [E] \overset{[\alpha\beta]\equiv\langle\alpha\rangle[\beta]+[\alpha]\langle\beta\rangle}{=}$$

$$= \langle\sigma\rangle[\dot u] + [\sigma]\langle\dot u\rangle + \dot\ell[W] + \rho_0\dot\ell[\dot u]\langle\dot u\rangle =$$

$$\overset{(1)}{=} -\dot\ell\langle\sigma\rangle[u'] + [\sigma]\langle\dot u\rangle + \dot\ell[W] + \rho_0\dot\ell[\dot u]\langle\dot u\rangle \overset{(2)}{=} -\dot\ell\big(-[W] + \langle\sigma\rangle[u']\big) =$$

$$= -\mathcal{F}\dot\ell \geq 0.$$

$\mathcal{F}S$ — конфигурационная сила.

$$[\alpha] = \alpha(\ell+0) - \alpha(\ell-0), \qquad \langle\alpha\rangle = \big(\alpha\ell(\ell+0) + \alpha(\ell-0)\big)/2.$$

Энтропийный критерий Дафермоса

$$\mathcal{D} = -\mathcal{F}\dot{\ell} \geq 0,$$
$$\mathcal{F} = -[W] + \langle\sigma\rangle[u']$$

- Критерий позволяет отбирать термодинамически допустимые решения.
- В статике $[\sigma] = 0 \implies \langle\sigma\rangle = \sigma \implies \mathcal{F} = [\mathcal{E}]$. Здесь $\mathcal{E} = -W + \sigma u'$ — одномерный аналог тензора Эшелби.
- Для термомеханических систем, где определены температура и энтропия, критерий получается рассмотрением УДН на скачке с учетом баланса энергии и условий Гюгонио.

Dafermos C.M.
The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws
Journal of Differential Equations. 1973. Vol. 14(2) P. 202–212.

Пространство основных функций $\mathcal{S}$

Определение

Множество основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — все функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ убывающие при $|\mathbf{x}| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|\mathbf{x}|^{-1}$.

Определение

Последовательность функций $\phi_1, \phi_2, \ldots$ из $\mathcal{S}$ сходится к функции $\phi \in \mathcal{S}$ ($\phi_k(\mathbf{x}) \to \phi(\mathbf{x})$), если $\forall\ \alpha,\ \beta$

$$\mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi_k(\mathbf{x}) \rightrightarrows \mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi(\mathbf{x})$$

Здесь $\alpha,\ \beta$ — мультииндексы,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n},$$
$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Пространство основных функций $\mathcal{S}$

- $\mathcal{S}$ — линейное пространство.
- Из сходимости в $\mathcal{D}$ следует сходимость в $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S}$ не совпадает с $\mathcal{D}$ (e.g. $\exp(-x^2)$).
- Операции дифференцирования и линейной неособенной замены переменных непрерывны из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.
- Умножение на произвольную $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ может вывести за пределы $\mathcal{S}$ (e.g. $\exp(x^2)$).
- $\exists\ a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ растет не быстрее полинома:

$$|D^\alpha \phi(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|)^{m_\alpha}.$$

Операция умножения на такую $a(\mathbf{x})$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$

Определение

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{S}$.

- Сходимость в $\mathcal{S}'$ — слабая сходимость последовательности функционалов.
- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

$\urcorner$ $f(\mathbf{x})$ — локально интегрируемая функция полиномиального роста на бесконечности: $\exists\ m$

$$\int |f(\mathbf{x})|(1 + |\mathbf{x}|)^{-m}\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Она определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста из $\mathcal{S}'$:

$$(f, \phi) = \int f\phi\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

Не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая $\mathcal{S}'$, имеет полиномиальный рост. Например, функция

$$\big(\cos(\exp x)\big)' = -\exp x\ \sin(\exp x)$$

не является функцией полиномиального роста, но тем не менее задает обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$\Big(\big(\cos(\exp x)\big)', \phi\Big) = -\int \cos(\exp x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

Если f — финитная обобщенная функция из $\mathcal{D}'$, то она единственным образом продолжается на $\mathcal{S}$ как элемент из $\mathcal{S}'$ по формуле

$$(f, \phi) = (f, \eta\phi),$$

где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ в окрестности носителя f.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

$\exists\ f \in \mathcal{S}'$.

- $D^{\alpha} f \in \mathcal{S}'$.
- $f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}) \in \mathcal{S}'$ если $\det A \neq 0$.
- $af \in \mathcal{S}'$, если $a(\mathbf{x}) \in C^{\infty}$ и растет не быстрее полинома.
- Естественным образом определяется прямое произведение: $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.
- Естественным образом определяется свёртка $f * g$. Она существует не всегда.

Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$

$\exists\ \phi \in \mathcal{S}$:

$$F[\phi](\omega) = \int \phi(\mathbf{x}) \exp \mathrm{i}(\omega \cdot \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

— преобразование Фурье функции ϕ.

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$.

$$F^{-1}\big[\phi(\mathbf{x})\big](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(\mathbf{x}) \exp\big(- \mathrm{i}(\omega \cdot \mathbf{x})\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} F\big[\phi(-\mathbf{x})\big]$$

— обратное преобразование Фурье функции ϕ:

$$\phi = F^{-1}\big[F[\phi]\big] = F\big[F^{-1}[\phi]\big].$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$

Определение

$\forall\, f \in \mathcal{S}',\ \phi \in \mathcal{S}\ :$

$$\big(F[f], \phi\big) = \big(f, F[\phi]\big),$$

$$F^{-1}\big[f(\mathbf{x})\big] = \frac{1}{(2\pi)^n} F\big[f(-\mathbf{x})\big]$$

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$, причем $\forall\, f \in \mathcal{S}'$

$$f = F^{-1}\big[F[f]\big] = F\big[F^{-1}[f]\big].$$

Свойства преобразования Фурье

- Дифференцирование ПФ: $D^{\alpha}F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^{\alpha} f(\mathbf{x})]$.
- ПФ производной: $F[D^{\alpha} f](\omega) = (-\mathrm{i}\omega)^{\alpha} F[f](\omega)$.
- ПФ сдвига: $F[f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)](\omega) = \exp \mathrm{i}(\mathbf{x}_0 \cdot \omega) F[f](\omega)$
- Сдвиг ПФ: $F[f](\omega+\omega_0) = F[\exp \mathrm{i}(\omega_0 \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega)$
- ПФ подобия: $F[f(c\mathbf{x})](\omega) = \frac{1}{|c|^n} F[f](c^{-1}\omega)$.
- ПФ прямого произведения: $F[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})] = F[f] \cdot F[g]$
- ПФ свертки: $F[f * g] = F[f]F[g]$, если свёртка существует.

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\omega) = (-\mathrm{i}\omega)^\alpha F[f](\omega)$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\omega) = (-\mathrm{i}\omega)^\alpha F[f](\omega)$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] = (-\mathrm{i}\omega)^\alpha.$$

Преобразование Фурье функции Хевисайда

$$F[H(t)\exp(-at)] = \int_0^{\infty} \exp(-at + \mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{\omega + \mathrm{i}a}$$

Так как $H(t)\exp(-at) \to H(t)$ в S' при $a \to +0$, в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем:

$$F[H] = \frac{\mathrm{i}}{\omega + \mathrm{i}0} = \pi\delta(\omega) + \mathrm{i}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$$

Последнее равенство справедливо в силу формул Сохоцкого.

Таблицы преобразований Фурье обобщенных функций

Брычков Ю.А., Прудников А.П.
Интегальные преобразования обобщенных функций
Наука, 1977.

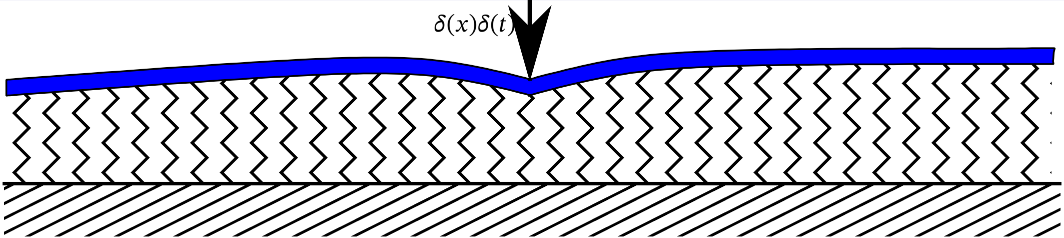
Задачи

1. Вычислить преобразование Фурье функции $H(R - |x|)$, $R = \mathrm{const}$.
2. При помощи преобразования Фурье по x найти решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющее условию $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

Фундаментальное решение уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^1$



Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

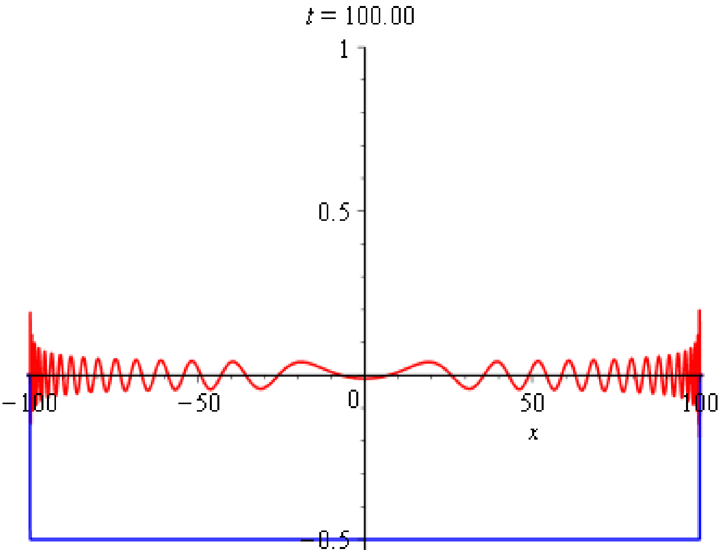
находим:

$$-(\omega^2 + k)u_F - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = -c^2\delta(t) \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = -c^2 H(t)\frac{\sin c\sqrt{\omega^2 + k}t}{c\sqrt{\omega^2 + k}} \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)J_0\Big(\sqrt{k(c^2t^2 - x^2)}\Big)$$

В частном случае $k = 0$ получаем фундаментальное решение волнового уравнения.

Фундаментальные решения волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^1$ $(k = 1,\ c = 1)$



Задача

Вычислить фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$:

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

для случая малой диссипации $k_* = k - c^2\gamma^2 > 0$.

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$: случай большой диссипации

Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 < 0$):

$$u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)I_0\Big(\sqrt{|k_*|(c^2t^2 - x^2)}\Big)\exp(-c^2\gamma t)$$

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$: особый случай

Применяя ПФ по x к уравнению

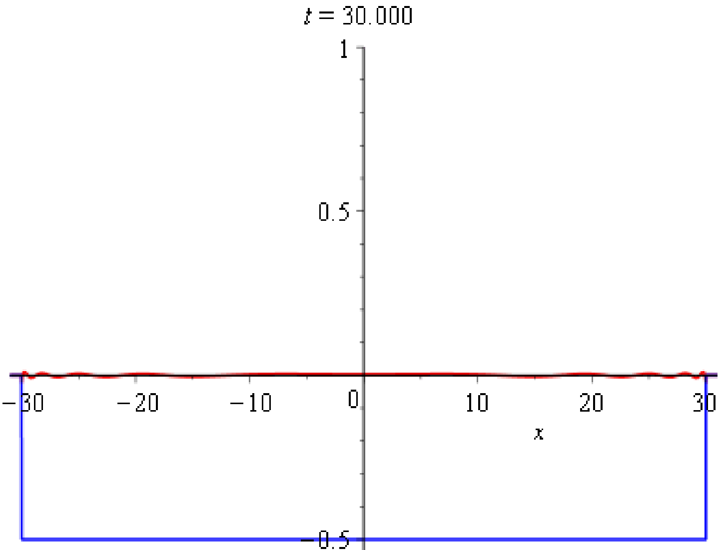
$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 = 0$):

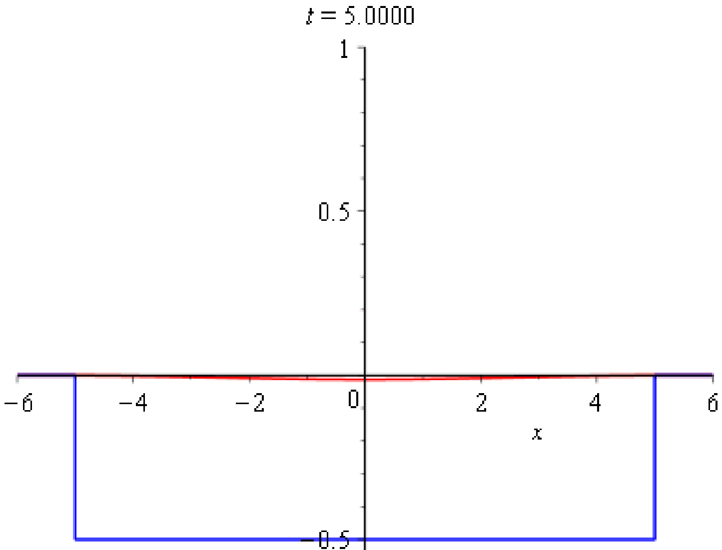
$$u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)\exp(-c^2\gamma t)$$

В данном случае искажения в форму сигнала, вызванные наличием упругого основания, компенсируются искажениями вследствие диссипации.

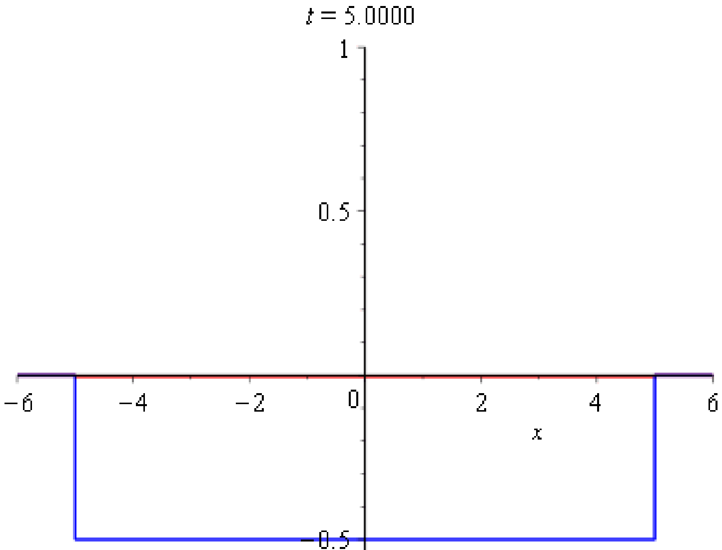
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ ($k = 1,\ c = 1, \gamma = 0.1$): случай малой диссипации



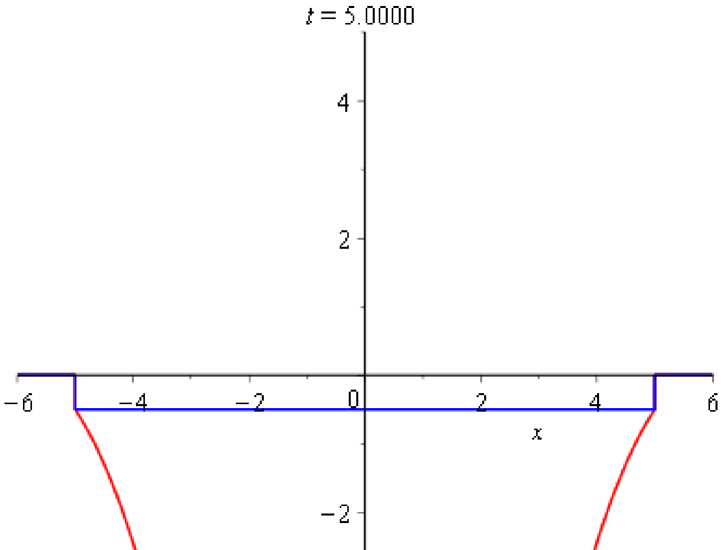
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ $(k = 1,\ c = 1, \gamma = 2)$: случай большой диссипации



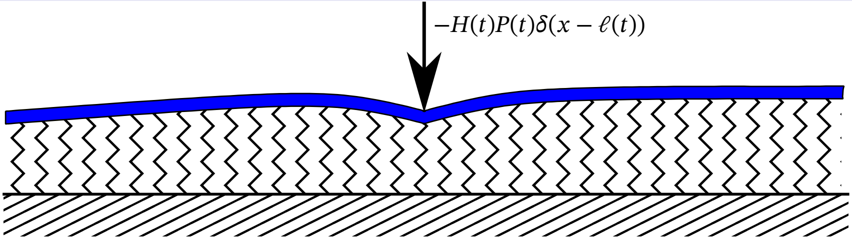
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ $(k = 1,\ c = 1, \gamma = 1)$: особый случай



Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ $(k = -1,\ c = 1, \gamma = 0)$: случай упругого основания отрицательной жесткости



Подвижная нагрузка на струне на упругом основании



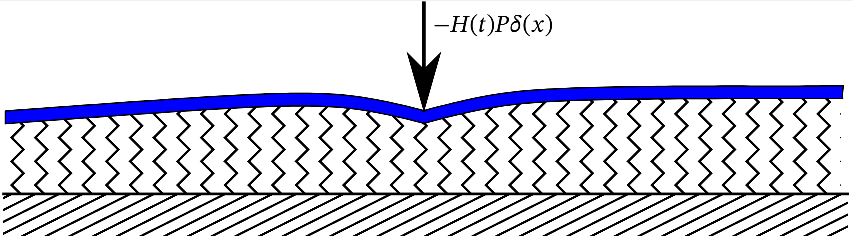
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

Делаем по аналогии со струной без упругого основания (см. слайд 130).

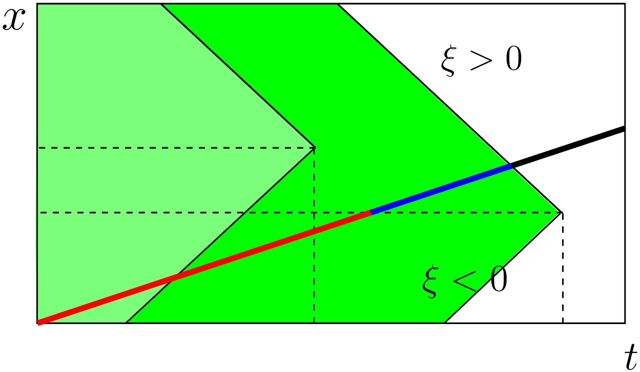
Внезапно приложенная нагрузка постоянной амплитуды



$$u = \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c(t-\tau)-|x|\Big)J_0\Big(\sqrt{k\big(c^2(t-\tau)^2-x^2\big)}\Big)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c\tau-|x|\Big)J_0\Big(\sqrt{k\big(c^2\tau^2-x^2\big)}\Big)\,\mathrm{d}\tau$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью



$$\xi = x - vt$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Рассмотрим случай $\xi = x - vt < 0$. Имеем:

$$u = \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c(t-\tau) - |x - v\tau|\Big)J_0\left(\sqrt{k\Big(c^2(t-\tau)^2 - \big(x - v\tau\big)^2\Big)}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\left(\int_0^{t+\frac{\xi}{v}} H(c(t-\tau) - v(t-\tau) - \xi)\times + \int_{t+\frac{\xi}{v}}^{t} H(c(t-\tau) + v(t-\tau) + \xi)\times\right)$$

$$\times J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (v(t-\tau) + \xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\left(\int_{-\frac{\xi}{v}}^{t} H((c-v)\tau - \xi)\cdot + \int_0^{-\frac{\xi}{v}} H((c+v)\tau + \xi)\cdot\right)J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\int_{\frac{|\xi|}{c+v}}^{t} J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau.$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Делаем замену ($\xi = -|\xi|,\ \operatorname{sign}\xi = -1$)

$$\zeta = c\Big(\tau - \frac{|\xi|}{c - v\operatorname{sign}\xi}\Big),$$

получим

$$u = \frac{P}{2}\int_0^{c\left(t - \frac{|\xi|}{c - v\operatorname{sign}\xi}\right)} J_0\left(\sqrt{k\zeta((1-\beta^2)\zeta + 2\xi)}\right)\mathrm{d}\zeta,$$

где $\beta = v/c$. Пусть $t \to \infty$, а ξ фиксировано. Тогда верхним пределом интегрирования будет $+\infty$, и после вычисления интеграла получим

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$

$$k_0 = \left|\frac{k}{1-\beta^2}\right|.$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Для $\xi > 0$ имеем $x > vt > v\tau\ \forall \tau \leq t \implies H(v\tau - x) = 0$. Поэтому,

$$u = \frac{cP}{2} \int_0^t H((c-v)\tau - \xi) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right) \mathrm{d}\tau$$

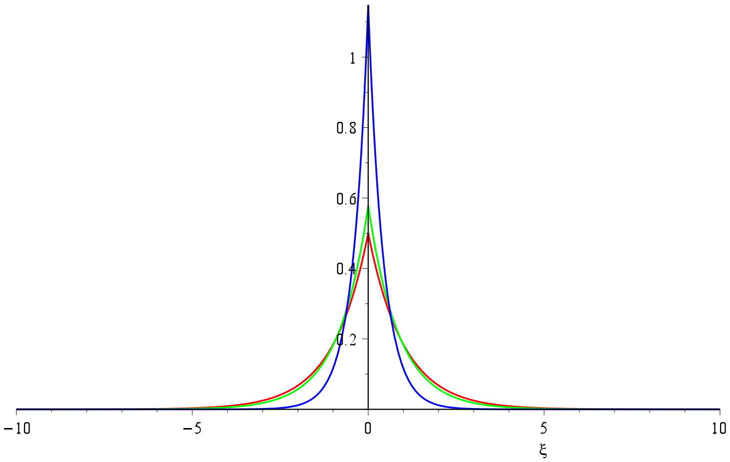
Определяя границы промежутка, где подынтегральная функция отлична от нуля, и применяя ту же замену переменной, приходим вновь к формуле

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$

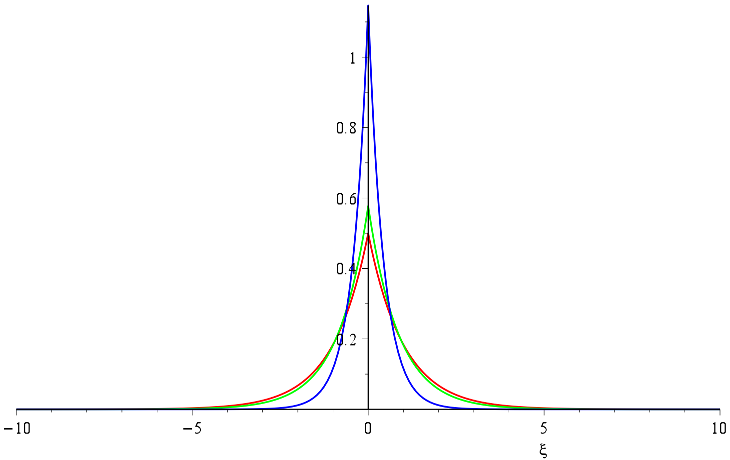
$$k_0 = \left|\frac{k}{1-\beta^2}\right|.$$

Стационарное решение в точке ξ в подвижной системе координат устанавливается за бесконечное время.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба ($v/c = 0$, $v/c = 0.5$, $v/c = 0.9$)



Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба ($v/c = 0$, $v/c = 0.5$, $v/c = 0.9$)



Контрольный вопрос: а что будет в этой же задаче для волнового уравнения?

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

- При ненулевой скорости нагрузки нестационарное решение несимметрично относительно нагрузки в движущейся с ней СК.
- При $t \to \infty$ устанавливается симметричное в подвижной СК стационарное решение.
- Стационарное решение устанавливается за бесконечное время.
- При скорости нагрузки, близкой к критическому значению c, прогиб под нагрузкой стремится к бесконечности.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*\prime\prime} - \dfrac{1}{c^2}\ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*\prime\prime} - \dfrac{1}{c^2}\ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

Указания:

1. Переписать уравнение движения в новых независимых переменных $\xi = x - vt, \ \tau = t$.
2. В полученном уравнении пренебречь производными по времени τ.
3. Найти решение, удовлетворяющее условиями на бесконечности и условиями Гюгонио на (неподвижном) скачке $\xi = 0$.

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью

$\xi > 0$: $\quad u = 0.$

$\xi < 0$:

$$u = \frac{cP}{2} H\!\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_{\frac{|\xi|}{2c}}^{t} J_0\left(\sqrt{k(2c|\xi|\tau - \xi^2)}\right) \mathrm{d}\tau.$$

Сделав замену

$$\zeta = \sqrt{\tau - \frac{|\xi|}{2c}},$$

приводим интеграл к табличному:

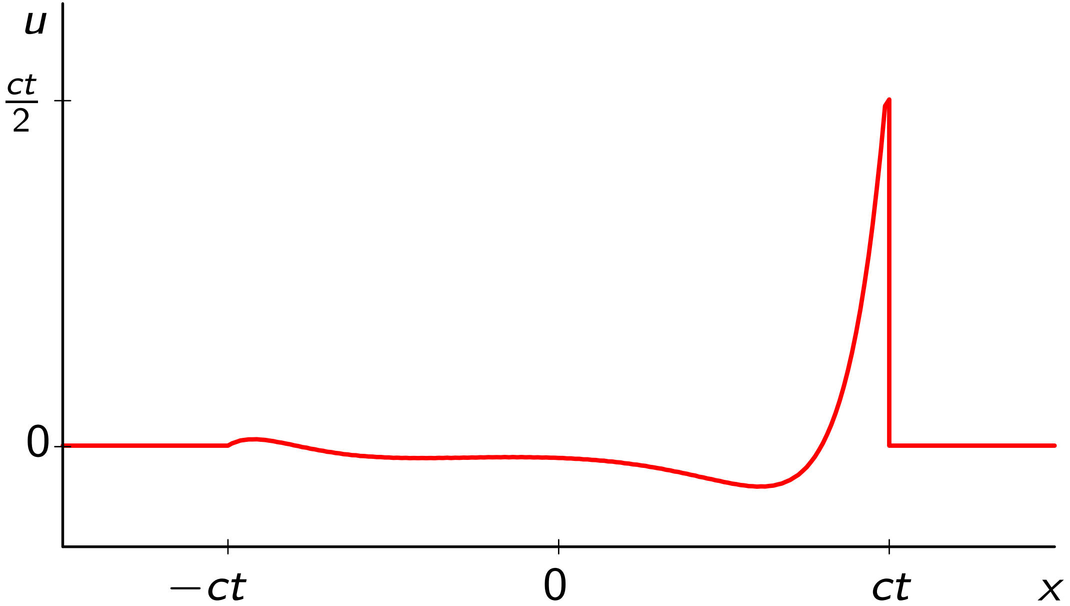
$$u = cP\,H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_0^{\sqrt{t - \frac{|\xi|}{2c}}} \zeta J_0\left(\sqrt{2kc|\xi|}\,\zeta\right) \mathrm{d}\zeta =$$

$$= P\sqrt{\frac{ct - \frac{|\xi|}{2}}{2k|\xi|}} J_1\left(\sqrt{2k|\xi|(ct - \frac{|\xi|}{2})}\right) H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right)$$

При $\xi \to -0$:

$$u = \frac{cPt}{2} + o(1).$$

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью



Необходимые определения

Интеграл Фурье:

$$\mathcal{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega, \quad t \to +\infty$$

- $\varphi(\omega)$ — фаза
- $\omega_* \,:\; \varphi'(\omega_*) = 0$ — стационарные точки.
- $\omega_* \,:\; \varphi'(\omega_*) \neq 0;\ f, \varphi \in C^{\infty}(\omega_* - \delta, \omega_* + \delta)$ — обыкновенные точки.
- Точки не являющиеся обыкновенными — критические.
- Вкладом от изолированной критической точки ω_* называется интеграл

$$\hat{\mathcal{J}}(t, \omega_*) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \eta(\omega - \omega_*)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega,$$

Здесь η — нейтрализатор: $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta \equiv 1$ в некоторой окрестности ω_*, $\operatorname{supp}\eta$ не содержит других критических точек.

Федорюк М.В. Метод перевала. М: Наука, 1977.

Лемма Римана-Лебега

Для интегрируемой f:

$$\mathcal{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = o(1), \quad t \to +\infty$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок,

$$\varphi'(\omega) \neq 0, \quad x \in I,$$

и $f(\omega) \in C^{N+1}$, $\varphi(\omega) \in C^{N+2}$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{k=0}^{N} (it)^{-k-1} M^k \left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) \Bigg|_a^b + o(t^{-N-1}).$$

$$M = -\frac{1}{\varphi'(\omega)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$$

Главный член ($N = 0$) асимптотики имеет вид:

$$\mathcal{J}(t) = (it)^{-1}\left(\frac{f(b)}{\varphi'(b)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(b)t} - \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(a)t} \right) + o(t^{-1}).$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Доказательство

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^b f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\,d\omega = \frac{1}{it}\int_a^b \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\,\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{it\varphi(\omega)}\big) = \frac{1}{it}\,\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\,\mathrm{e}^{it\varphi(\omega)}\Big|_a^b + \frac{1}{it}\mathcal{J}_1(t)$$

$$\mathcal{J}_1(t) = -\int_a^b e^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\right)\mathrm{d}\omega = o(1)$$

Лемма Эрдейи

Теорема

Пусть $a > 0,\ \alpha \geq 1,\ \beta > 0,\ f(\Omega) \in C^\infty,\ f^{(n)}(a) = 0\ \forall n$. Тогда

$$\int_0^a \Omega^{\beta-1} f(\Omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Omega^\alpha}\, \mathrm{d}\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad t \to \infty;$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!\alpha}\, \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(k+\beta)}{2\alpha}}.$$

Принцип локализации

Лемма

Пусть $\varphi(\omega) \in C^\infty$, $f(\omega) \in \mathcal{D}$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}).$$

Доказательство.

Интеграл фактически берется по конечному отрезку; применяем формулу для вкладов от границ промежутка интегрирования. □

Принцип локализации

Пусть $I = [a; b]$ — конечный отрезок, и пусть интеграл $\mathcal{J}(t)$ имеет конечное число изолированных критических точек $\omega_1, \ldots, \omega_k \in I$. Тогда

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{j=1}^{k} \hat{\mathcal{J}}(t, \omega_j) + O(t^{-\infty}),$$

т.е. интеграл $\mathcal{J}(t)$ равен сумме вкладов от критических точек с точностью до $O(t^{-\infty})$.

Вклад от стационарной точки

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок, и выполнены условия:

1. $f(\omega) \in C^1$, $\varphi(\omega) \in C^1$.
2. Функция $\varphi(\omega)$ имеет при $\omega \in I$ единственную стационарную точку ω_*: $\varphi'(\omega_*) = 0$.
3. $\varphi''(\omega_*) \neq 0$ (т.е. ω_* — невырожденная стационарная точка).

Тогда при $t \to +\infty$ главный член асимптотики имеет вид

$$\mathcal{J}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_*)|t}}\, f(\omega_*)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega_*)t + \frac{\mathrm{i}\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,\varphi''(\omega_*)} + O(t^{-1}).$$

Доказательство.

- Промежуток интегрирования разбивается на два точкой ω_*.
- В каждом из интегралов делается замена переменной: $\omega = \psi(w)\ :\ \ \varphi(\omega) - \varphi(\omega_*) = w^2$.
- Применяем лемму Эрдейи к каждому из интегралов.

$\square$

Задача

Задача

Вычислить асимптотику при $t \to +\infty$ функции Бесселя целого порядка $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \mathrm{i}(t \sin \omega - n\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\daleth\ f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\daleth\ f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\ f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp\mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp\mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Доказательство.

$\exists\ \eta(\omega) \in \mathcal{D}\ :\ \eta \equiv 1$ при $|\omega| < \delta$, $\quad f(\omega) = \big(f(\omega) - \eta(\omega)f(0)\big) + \eta(\omega)f(0)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\omega)-\eta(\omega)f(0))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega + f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}) + f(0)\left(\int_{\to\curvearrowright\to} \frac{\eta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega\right) =$$

$$= O(t^{-\infty}) + f(0)\left(\frac{i}{t}\right)^{N}\left(\int_{\to\curvearrowright\to} \frac{d^N}{d\omega^N}\left(\frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right) \underset{\left|\frac{d^N}{d\omega^N}\left(\frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)\right| \le C_N}{\overset{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}| \le 1}{=\!=\!=}} O(t^{-\infty})$$

Контур $\to\curvearrowright\to$: 2 луча и полуокружность фиксированного радиуса $\rho < \delta$, где $\eta \equiv 1$. $\square$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\daleth$ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Следствие

$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{i}\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

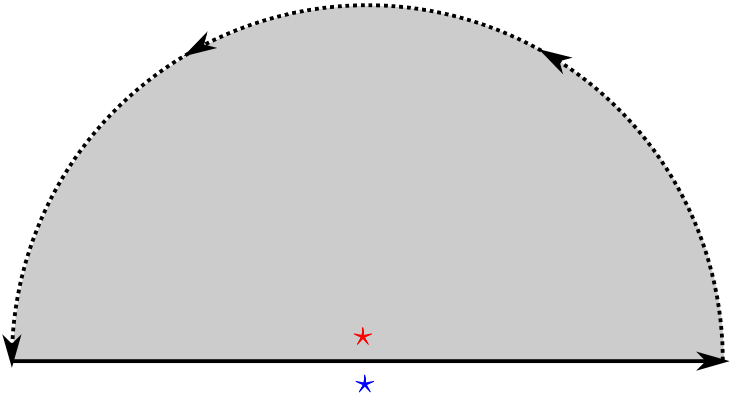
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости f:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0).$$

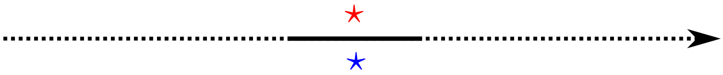


Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для функций вещественной переменной $f \in \mathcal{D}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty}).$$



Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp\mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Доказательство.

Аналогично □

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Следствие

$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = -\mathrm{i}\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = -2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: общий случай

Теорема

Пусть $f(\omega) \in \mathcal{D}$, $\varphi(\omega) \in C^\infty$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \pi\mathrm{i}\alpha\, f(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega + \mathrm{i}\alpha 0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega - \mathrm{i}\alpha 0}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{i}\alpha\, f(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

где $\alpha = \operatorname{sign}\varphi'(0)$.

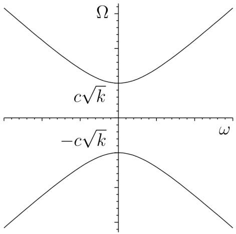
Доказательство.

Заменой переменных $\omega = \psi(w)\,:\;\; \varphi(\omega) - \varphi(0) = w$ сводим интегралы к эталонным. □

Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = 0 \qquad \exists \quad u = u_0(\omega, \Omega)\, e^{-i\omega x} e^{-i\Omega t} \Rightarrow$$

Дисперсионное соотношение: $\Omega^2 - c^2(\omega^2 + k) = 0$



$\Omega_* = c\sqrt{k}$ — частота отсечки

$\frac{\Omega}{\omega}$ — фазовая скорость

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{c^2}{(\Omega/\omega)} = c\,\frac{\sqrt{\Omega^2 - \Omega_*^2}}{\Omega} \; —$$

— групповая скорость

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\sin\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2 PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2 P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 2\gamma c^2\Omega_0 i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2+k}t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2+k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2+k}t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2+k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2+k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F_*}\big|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\dfrac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2+k}}u_{F_*}\big|_{t=0} \end{cases} \Longrightarrow$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2 PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2+k}t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2+k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2 P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F_*}\big|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\dfrac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2+k}}u_{F_*}\big|_{t=0} \end{cases} \Longrightarrow \quad C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2+k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2+k}}u_{F_*}\big|_{t=0}$$

Стационарное решение

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Находим корни знаменателя:

$$c^2\omega^2 = \Omega_0^2 - c^2 k - 0i \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_\pm \equiv \pm\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} \mp 0i$$

Разлагаем дробь на простейшие:

$$u_{F_*} = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

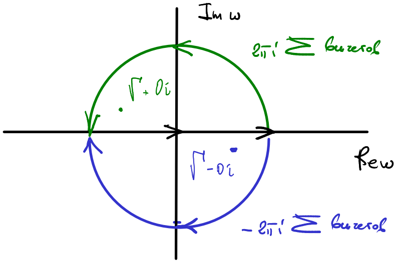
Применяем обратное преобразование Фурье по x:

$$u_* = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{4\pi\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x)\, d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x)\, d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Вычисляем интегралы через вычеты. Для $x > 0$ учитываем полюс в верхней полуплоскости, для $x < 0$ — в нижней.

рость

$$u_* = \frac{e^{i\Omega_0 t}}{2\pi}\,\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}}\left(\int \frac{e^{-i\omega x}\,d\omega}{\omega-\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}+0i} - \int \frac{e^{-i\omega x}\,d\omega}{\omega+\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}-0i}\right)$$



$x>0$: $$u_* = \frac{-iP}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}}\, e^{i\Omega_0 t}\, e^{-i\sqrt{\ }\,x}$$

$x<0$: $$u_* = \frac{-iP}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}}\, e^{i\Omega_0 t}\, e^{i\sqrt{\ }\,x}$$

Вычисляем Im:

$$u_* = -\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}}\cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2}-k}\,|x|\right)$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t),$$

$$C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}}\, u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega x)\, d\omega.$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t),$$

$$C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}}\, u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}}\left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i}\right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega W t)\, d\omega.$$

Рассматривая при $t \to \infty$ переходный процесс на фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью W, видим что основной вклад порядка $O(1)$ в финальный результат соответствуют тем же полюсам, что были рассмотрены при исследовании стационарного решения. Применяем теорему о вкладе от полюса в интеграл Фурье.

Вычисляем $C_-(\omega_\pm) = 0$, $C_+(\omega_\pm) = -u_{F_*}\big|_{t=0}$, $c\sqrt{\omega_\pm^2 + k} = \Omega_0$.

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + o(1),$$

$$C_+ = -u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}}\left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i}\right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{F_*} \exp(-i\omega W t)\, d\omega.$$

Для интеграла Фурье фаза равна:

$$\varphi(\omega) = c\sqrt{\omega^2 + k} - \omega W.$$

Вычисляем $\varphi'(\omega_\pm)$ с учетом дисперсионного соотношения $\Omega^2 = c^2(\omega^2 + k)$:

$$\varphi'(\omega_\pm) = \pm c_g(\Omega_0) - W.$$

В соответствии с теоремой имеем:

- $|W| < c_g$: оба вклада в переходный процесс — o(1), решение равно стационарному;
- $|W| > c_g$: вклад в переходный процесс равен стационарному решению с обратным знаком, решение равно $o(1)$;
- $|W| \simeq c_g$: стационарная точка совпадает с полюсом, требуется дополнительное исследование.

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Задача

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\sin\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Асимптотика решения при $t \to \infty$, $x = Wt$, $c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t} \neq 0$

$$u = -\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}\,|x|\right) H\left(c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t}\right) + O(t^{-1/2})$$

Групповая скорость

Основной вывод

На больших временах скорость переднего фронта гармонического сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником, равна групповой скорости, соотвествующей частоте колебаний источника.

Важные идеи, использованные при решении задачи

- Асимптотическая оценка интеграла обратного преобразования Фурье.
- Принцип предельного поглощения.
- Рассмотрение решения на подвижном фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью.

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x)\,d\omega \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x)\,d\omega \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)J_0\Big(\sqrt{k(c^2t^2 - x^2)}\Big)$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2+1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t)\,d\omega \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

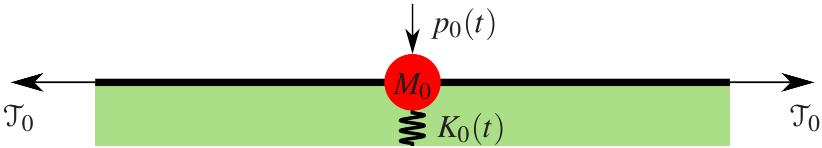
$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t)\,d\omega \quad \Longrightarrow \quad u = O(t^{-1/2}), \quad t \to \infty$$

Необходимое условие локализации в линейных системах

Необходимое условие локализации в линейных системах — наличие пространственной неоднородности.

В механических системах такими неоднородностями могут быть инерционные включения и/или зоны с ослабленной жесткостью.



Вынужденные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = P\exp(-\mathrm{i}\Omega t)\,\delta(x),$$

$\exists\ u = \hat{u}(x)\ \exp(-i\Omega t)\ :$

$$\hat{u}'' - (1-\Omega^2)\hat{u} = P\,\delta(x).$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Решение:

$$\hat{u} = -P\,\frac{\exp\left(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\right)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < \Omega_*;$$

$$\hat{u} = P\,\frac{\exp\left(\mathrm{i}\ \mathrm{sign}\,\Omega\,\sqrt{\Omega^2-1}|x|\right)}{2\mathrm{i}\ \mathrm{sign}\,\Omega\,\sqrt{\Omega^2-1}}, \quad |\Omega| > \Omega_*.$$

Здесь: $\Omega_* = 1$ — частота отсечки.

$|\Omega| > \Omega_*$: Синусоидальные бегущие волны

$|\Omega| < \Omega_*$: Локализованные решения, удовлетворяющие условиям конечности энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2\,dx < \infty.$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t),$$

$$M \geq 0, \qquad K \lesseqqgtr 0.$$

$\daleth\ u = \hat{u}(x)\,\exp(-i\Omega t)\ :$

$$\hat{u}'' - (1-\Omega^2)\hat{u} = (K - M\Omega^2)\hat{u}(0)\,\delta(x).$$

Ищем решения с конечной энергией:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2\,dx < \infty.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 + A^2(\Omega) = 0, \qquad A^2(\Omega) = 1 - \Omega^2.$$

Решение:

$$\hat{u} = -(K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0)\frac{\exp\left(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\right)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1-\Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1-\Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

Задача

Найти выражения для частоты Ω_0 локализованной моды и необходимые и достаточные условия существования локализованной моды в частных случаях a) $K = 0$ b) $M = 0$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$=$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-\mathrm{i}0} p_f(\bar{\Omega})\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega}\right)\exp(-\mathrm{i}\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-\mathrm{i}0} p_f(\bar{\Omega})\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega}\right)\exp(-\mathrm{i}\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$
$$= \frac{\sqrt{1-\Omega_0^2}\,|p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0\Big(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\Big)}\sin\big(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)\big) + o(1), \quad t \to \infty.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}(\omega_+ x - \varphi/2)\right), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}(\omega_- x + \varphi/2)\right), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$\mathrm{Re}[\mathrm{i}\omega\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 0,$$
$$\mathrm{Re}[(\mathrm{i}\omega)^2\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 0,$$
$$2C\,\mathrm{Re}[(\mathrm{i}\omega)^3\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\exp\left(\mathrm{i}(\omega_+ x - \varphi/2)\right), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\,\exp\left(\mathrm{i}(\omega_- x + \varphi/2)\right), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$a^3\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2C}.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(\omega_+ x - \varphi/2\right)\right), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(\omega_- x + \varphi/2\right)\right), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$C = \frac{1}{2(1-\Omega^2)^{3/4}},$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(\omega_+ x - \varphi/2\right)\right), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(\omega_- x + \varphi/2\right)\right), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$2\,\mathrm{Re}\,G_0(x,\Omega) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-a|x|}\cos\left(a|x| - \pi/4\right)}{(1-\Omega^2)^{3/4}}.$$

Локализованные колебания балки на упругом основании: спектральная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$
$$P(t) = -Kw(0,t).$$

Задача

Найти частотное уравнение, выражение для частоты Ω_0 локализованной моды, необходимые и достаточные условия существования локализованной моды.

Локализованные колебания балки на упругом основании: нестационарная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$
$$P(t) = -Kw(0,t) + p(t).$$

Задача

Найти выражение для незатухающих колебаний.

Параметрическое возмущение системы с единственной низкочастотной локализованной модой

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0, \qquad t = O(\epsilon^{-1}).$$

Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Используем асимптотический анзац (аппроксимацию решения):

$$T = \epsilon t,$$
$$u(t) = W(T)\,\exp\varphi(t),$$
$$\dot{\varphi} = -\mathrm{i}\,\Omega_0(T),$$
$$W(T) = \sum_{j=0}^{\infty}\epsilon^j W_j(T).$$

Переменные φ, T считаем независимыми.

$$\dot{(\cdot)} = -\mathrm{i}\,\Omega_0\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_T,$$
$$\ddot{(\cdot)} = -\Omega_0^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} - 2\epsilon\mathrm{i}\,\Omega_0\,\partial^2_{\varphi T} - \epsilon\mathrm{i}\,\Omega'_{0\,T}\,\partial_\varphi + O(\epsilon^2),$$

Подставляя в уравнение, получаем уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W'_{0\,T} + \Omega'_{0\,T}\,W_0 = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0$$

Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0{}'_T + \Omega_0{}'_T W_0 = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{W_0} = -\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0}\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0,\tau) = \frac{2C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right) + O(\epsilon).$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})^{\cdot} + u = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})^{\cdot} + u = 0.$$

$\daleth$ $\Omega_0^2 = 1/M$. Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_{0}{}'_{T} + \left(\Omega_{0}{}'_{T} + \Omega_0 \frac{M'_T}{M}\right) W_0 = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{W_0} = -\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} - \frac{\mathrm{d}M}{2M}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} + \frac{\mathrm{d}M}{2M}\right)\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0 M|}} = C_0\sqrt{|\Omega_0|},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0,\tau) = 2C_0\sqrt{|\Omega_0|}\sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right) + O(\epsilon).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + p(t),$$

- $\epsilon = o(1)$,
- $t = O(\epsilon^{-1})$,
- $K(\epsilon t)$ такова, что локализованная мода $\exists\ \forall t$.

Будем предполагать, что

- Частотное уравнение
$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2(\epsilon t)} = M\Omega_0^2(\epsilon t) - K(\epsilon t)$$
выполняется $\forall t$;
- Дисперсионное соотношение
$$\omega^2(\epsilon t) - \Omega^2(\epsilon t) + 1 = \omega^2 + A^2(\Omega) = 0$$
при $x = \pm 0$ выполняется $\forall t$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Используем асимптотический анзац ($t > 0$, $x \lessgtr 0$):

$$u(x,t) = W(X,T)\,\exp\varphi(x,t),$$

$$T = \epsilon t, \quad X = \epsilon x,$$

$$\varphi' = \mathrm{i}\,\omega(X,T), \quad \dot\varphi = -\mathrm{i}\,\Omega(X,T),$$

$$W(X,T) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(X,T),$$

причем

$$\Omega'_X + \omega'_T = 0.$$

Переменные φ, T, X считаем независимыми.

$$\dot{(\cdot)} = -\mathrm{i}\,\Omega\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_T,$$

$$\ddot{(\cdot)} = -\Omega^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} - 2\epsilon\mathrm{i}\,\Omega\,\partial^2_{\varphi T} - \epsilon\mathrm{i}\,\Omega'{}_T\,\partial_\varphi + O(\epsilon^2),$$

$$(\cdot)' = \mathrm{i}\,\omega\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_X,$$

$$(\cdot)'' = -\omega^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} + 2\epsilon\mathrm{i}\,\omega\,\partial^2_{\varphi X} + \epsilon\mathrm{i}\,\omega'_X\,\partial_\varphi + O(\epsilon^2).$$

Условия при $x = 0$:

$$\Omega(\pm 0, T) = \Omega_0(T),$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + p(t),$$

$$\Longrightarrow \quad [u'] = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + \cancel{p(t)}, \quad t \to \infty.$$

Подставляя в выражение

$$[u'] = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t),$$

представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$M(2\Omega_0 W_0{}'_T + \Omega_0{}'_T W_0) = \mathrm{i}[W_0{}'_X].$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = \cancel{-P(t)\delta(x)}, \quad x = \pm 0.$$

Подставляя представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$2\omega\, W_0{}'_X + \omega'_X\, W_0 + 2\Omega_0\, W_0{}'_T + \Omega_0{}'_T\, W_0 = 0.$$

Имеем:

$$\omega = \mathrm{i}\,\mathrm{sign}\, x\, A(\Omega_0),$$

$$\omega'_X = \omega'_\Omega\, \Omega'_X = -\omega'_\Omega\, \omega'_T.$$

Отсюда:

$$W_0{}'_X = -\frac{2\Omega_0\, W_0{}'_T + (-\omega'_\Omega \omega'_T + \Omega_0{}'_T)\, W_0}{2\mathrm{i}\,\mathrm{sign}\, x\, A(\Omega_0, T)},$$

$$[W_0{}'_X] = -\frac{\Lambda_2 W_0 + \Lambda_1 W_0{}'_T}{\mathrm{i}A(\Omega_0)},$$

$$\Lambda_1 \equiv 2\Omega_0,$$

$$\Lambda_2 \equiv A'_\Omega(\Omega_0) A'_T(\Omega_0) + \Omega_0{}'_T = \frac{\Omega_0^2 \Omega_0{}'_T}{1 - \Omega_0^2} + \Omega_0{}'_T.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Приравнивая выражения для $[W_0{}'_X]$, получаем уравнение для $\bar{W}_0(T) \equiv W_0(0,T)$:

$$M\left(2\Omega_0 \bar{W}_0{}'_T + \Omega_0{}'_T \bar{W}_0\right) = -\frac{\Lambda_2 \bar{W}_0 + \Lambda_1 \bar{W}_0{}'_T}{A(\Omega_0)}$$

или

$$\bar{W}_0{}'_T + \left(\frac{\Omega_0{}'_T}{2\Omega_0} + \frac{\Omega_0 \Omega_0{}'_T}{2(1-\Omega_0^2)\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)}\right)\bar{W}_0 = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} - \int \frac{\Omega_0\,\mathrm{d}\Omega_0}{2(1-\Omega_0^2)\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)}\right)$$

Вычисляя интегралы, находим:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \frac{\left(1-\Omega_0^2\right)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2}\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)^{1/2}}.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Комбинируя найденное решение с комплексно-сопряженным, находим

$$u(0,t) \sim C_0 \frac{\left(1-\Omega_0^2\right)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2}\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)^{1/2}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right).$$

Константы C_0 и D_0 должны быть определены приравниванием найденного решения при $t=0$ к решению задачи в нулевом приближении (при $\epsilon = 0$):

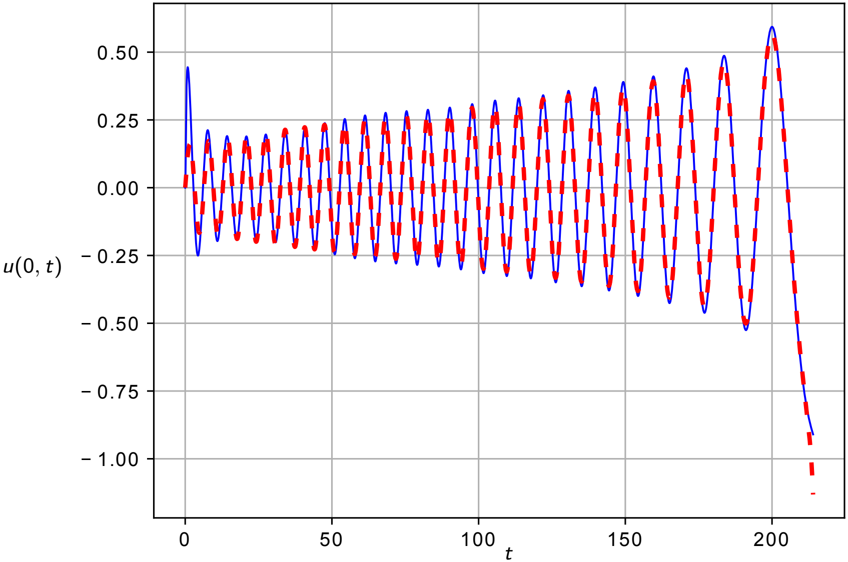
$$u(0,t) = \frac{\sqrt{1-\Omega_0^2}\,|p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)} \sin\left(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)\right) + o(1).$$

Находим:

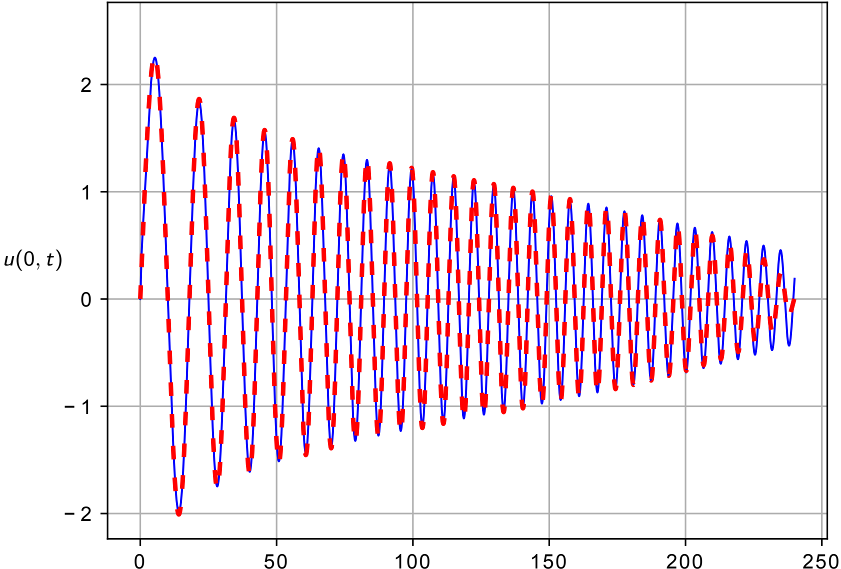
$$C_0 = \frac{\left(1-\Omega_0^2(0)\right)^{1/4}\,|p_F(\Omega_0(0)|}{\Omega_0^{1/2}(0)\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2(0)}\right)^{1/2}},$$

$$D_0 = \arg p_F(\Omega_0(0)).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: ссылки

Впервые подход был предложен С.Н. Гавриловым

С.Н. Гаврилов, Д.А. Индейцев.
Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании — подвижное инерционное включение”
Прикладная математика и механика, Т.66. №5, 2002. С. 864–873.

Рассмотренная задача исследована в статье

S.N. Gavrilov, E.V. Shishkina, Yu.A. Mochalova.
An infinite-length system possessing a unique trapped mode versus a single degree of freedom system: a comparative study in the case of time-varying parameters.
In book: Editors: Altenbach H. et al. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Springer, 2019.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u = \delta(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$$

Применяя преобразование Фурье по x_1, x_2, x_3, получим

$$-\mathbf{k}^2 u_F(\mathbf{k}) = 1.$$

Функция $\mathbf{k}^{-2}$ — локально интегрируемая в $\mathbb{R}^3$, поэтому

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,dk_1\,dk_2\,dk_3}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\exp(-i|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta)k^2\sin\theta\,dk\,d\theta\,d\phi}{k^2}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\cos\theta)\sin\theta\,dk\,d\theta \;\boxed{\mu = \cos\theta}\; = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty}\exp(-ik|\mathbf{r}|\mu)\,dk\,d\mu$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty}\cos(k|\mathbf{r}|\mu)\,dk\,d\mu \quad = -\frac{2}{(2\pi)^2|\mathbf{r}|}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\sin(k|\mathbf{r}|)}{k}\,dk}_{\text{Интеграл Дирихле} = \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk$

$$\lim_{\epsilon\to+0}\oint \frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk = 0 \overset{\alpha>0}{=} \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\mathrm{Re}} + \cancel{\int_{\cap}}\right)\frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk =$$

Формулы Сохоцкого: $\frac{1}{k\mp i0} = \pm i\pi\delta(k) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{k}$

$$= -i\pi + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\alpha)}{k}\,dk \quad \overset{\mathrm{Im}}{\Longrightarrow}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk = \frac{\pi}{2}$$

Разложение Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$

$\forall$ гладкого поля $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi,$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{W},$$
$$\Psi = -\nabla \times \mathbf{W},$$
$$\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{f} * \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Здесь Φ — скалярный потенциал, Ψ — векторный потенциал.

Сферические волны в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

$$\exists\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \qquad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \qquad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\,\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\,\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\exists\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \quad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \cancel{\frac{1}{r}\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\daleth\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$u = \dfrac{1}{r}\phi\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$, где ϕ подлежит определению. Вычислим $\triangle u$:

$$\triangle \frac{\phi(r,t)}{r} =$$

$$= \phi\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{1}{r} + \cancel{2\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \phi\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}} = \phi\triangle\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

$$= -4\pi\phi(0,t)\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad \underset{\phi(r,t)=\phi(t-r/c)}{\overset{(3)}{\Longrightarrow}} \quad \phi(0,t) = -\frac{1}{4\pi}\chi(t)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\exists\, u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$u = -\frac{\chi\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

В частности, если $\chi(t) = \delta(t)$:

$$u = \mathcal{U}_{(3)} \equiv -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Отражение сферической волны от центра симметрии

Ранее мы показали, что

$$\left(\triangle - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\phi(t \pm \frac{r}{c})}{r} = -4\phi\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом однородному волновому уравнению во всём $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет линейная комбинация

$$\frac{\phi(t + \frac{r}{c})}{r} - \frac{\phi(t - \frac{r}{c})}{r},$$

т.е. сходящаяся волна $r^{-1}\phi(t + \frac{r}{c})$ отражается от центра симметрии аналогично волнам в струне с закреплённым концом.

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси x_3:

$$\triangle \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \tag{4}$$

Начальные условия: $\mathcal{U}_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(2)}(\mathfrak{r})$, $\mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (4) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle} \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

...

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси x_3:

$$\triangle \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \qquad (4)$$

Начальные условия: $\mathcal{U}_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(2)}(\mathfrak{r})$, $\mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (4) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle} \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^{(3)}(\mathfrak{r}, x_3, t)\, dx_3 = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}{c}\right)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\, dx$$

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$x_0 = \sqrt{c^2t^2 - \mathfrak{r}^2}$$

$$g'_x\Big|_{x=x_0} = \left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}{c}\right)'_x\Big|_{x=x_0} = -\frac{2x}{2c\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\Big|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}{c^2t}$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta\big(g(x)\big)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\,dx = -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|\sqrt{\mathfrak{r}^2+x_0^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{c}{2\pi}\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$

Совершенно аналогично:

$$\mathcal{U}_{(1)} = \mathcal{U}^{(2)} \star 1(x_2)\delta(t)\delta(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{(2)}(x_1, y, t)\, dy =$$

$$= -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(c^2t^2 - x_1^2 - y^2)}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}}\, dy =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2}} \frac{dy}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}} =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \arcsin 1 =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

— уже знакомый нам результат!

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^3$)

$$\mathcal{U}_{(3)} = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{U}_{(2)} = -\frac{c}{2\pi}\frac{H(ct - \mathfrak{r})}{\sqrt{c^2t^2 - \mathfrak{r}^2}}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ принцип Гюйгенса не выполняется, т.к. за фронтом покой не наступает. Говорят, что имеет место диффузия волн.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^1$)

$$u_{(1)} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$ принцип Гюйгенса выполняется для производных $u', \dot{u}$ и не выполняется для u.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^n, n > 1$)

Выполняется для нечётных n, не выполняется для чётных n.

Задачи

1. Для $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ задано неоднородное волновое уравнение
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(1-|x_3|)\delta(t).$$
и нулевые начальные условия. На плоскости $x_3 = 0$ найти выражение для решения задачи.
2. Вычислить решение неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(t),$$
удовлетворяющее нулевым НУ.

Полезная литература

В.С. Владимиров
Уравнения математической физики.
М., Наука, …

Л.И. Слепян
Нестационарные упругие волны.
Л., «Судостроение», 1972.

Полезная литература

Бабич, В.М., Киселёв А.П.
Упругие волны. Высокочастотная теория.
СПб, «БХВ-Петербург», 2014.

Eringen, A.C., Şuhubi E.S.
Elastodynamics. Vol 2. Linear theory.
Academic Press, 1975.

Achenbach, J.D.
Wave propagation in elastic solids.
North Holland, 1975.

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Плоские волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

f — форма волны (произвольная функция),
θ — фаза,
$\mathbf{A}$ — векторная амплитуда,
$\mathbf{k}$ — волновой вектор.

Фазовая скорость плоской волны — нормальная скорость движения поверхности постоянной фазы:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega\mathbf{k}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} = \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}$$

Медленность плоской волны:

$$\mathbf{s} = \frac{|\mathbf{k}|}{\Omega}\hat{\mathbf{k}} = \Omega^{-1}\mathbf{k}$$

Плоские волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения <u>однородных</u> уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta),\ \theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\nabla f\cdot\mathbf{A} = f''\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A},$$
$$\triangle\mathbf{u} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla\cdot\nabla f\mathbf{A} = f''(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{I}\cdot\mathbf{A},$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = f''\Omega^2\mathbf{A}$$

Получаем задачу на собственные значения:

$$\left((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} + \mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I} - \rho\Omega^2\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Плоские P & S волны

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

Плоские P & S волны

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$A \perp \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $\mu\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_2\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_2^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские S (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

Скалярный потенциал и P-волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$\exists$ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi,$$

Φ — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем волновое уравнение

$$\cancel{(\lambda+2\mu)\nabla}\left(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\right) = 0.$$

Пример

Плоской P-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t). \qquad c_1^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует скалярный потенциал $\Phi = f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством скалярного потенциала, являются P-волнами.

Векторный потенциал и S-волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$\exists$ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla\times\boldsymbol{\Psi},$$

$\boldsymbol{\Psi}$ — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим волновое уравнение

$$\cancel{\mu\nabla\times}(\triangle\boldsymbol{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}) = \mathbf{0}.$$

Пример

Плоской S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}\times\mathbf{m}\,f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t), \qquad c_2^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует векторный потенциал $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{m}f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством векторного потенциала, являются S-волнами.

Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

$\exists\ \mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}$:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\big(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\big) + \mu\nabla\times\big(\triangle\boldsymbol{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}\big) = -\rho(\nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}).$$

$$\Longleftarrow \qquad \begin{aligned} \triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} &= -c_1^{-2}X, \\ \triangle\boldsymbol{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}} &= -c_2^{-2}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

$$\Phi = -\frac{\delta\big(t - \frac{r}{c_1}\big)}{4\pi r} * \big(-c_1^{-2}X\big),$$
$$\boldsymbol{\Psi} = -\frac{\delta\big(t - \frac{r}{c_2}\big)}{4\pi r} * \big(-c_2^{-2}\mathbf{Y}\big),$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой P и S волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 соответственно.

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \,\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \,\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \,\mathrm{Dev}\, \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\exists\ \phi=\nabla\cdot\mathbf{u},\ \boldsymbol{\psi}=\nabla\times\mathbf{u}$:

$$\nabla\cdot:\qquad \triangle\phi-c_1^{-2}\ddot{\phi}=-c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla\times:\qquad \triangle\boldsymbol{\psi}-c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi=c_1^{-2}\nabla\cdot\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi}=c_2^{-2}\nabla\times\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\daleth\ \phi = \nabla \cdot \mathbf{u},\ \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\triangle \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$
$$\triangle \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$
$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\sqsupset$ $\phi = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\triangle \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\triangle \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

объемная деформация (дилатация)

удвоенный вектор малого поворота

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})}\mathbf{n}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})}\mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r}-\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right)+\frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} =$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}$$

$$\exists\ z = \int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau \qquad \Longrightarrow$$

$$\ddot{z} = \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}$$

$$z = \int_{r/a}^{r/b} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow \ddot{z} = \int_{r/a}^{r/b} \tau\ddot{\chi}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t-r/a}^{t-r/b} (t-\tau)\,d\dot{\chi} = \frac{r}{b}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{a}\right) -$$

$$+ \int_{t-r/a}^{t-r/b} d\chi = \frac{r}{b}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{a}\right) + \chi\Big|_{t-r/a}^{t-r/b}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+ \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\, d\tau\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\mathbf{u} = \frac{\chi\left(t - \dfrac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t - \dfrac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+\left(\int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0.$

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})+\right.$$

$$\left.+\int_{r/c_1}^{r/c2}\tau\chi(t-\tau)\,d\tau\,\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\square\, \chi = \delta$

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0.$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau\delta(t - \tau)\, d\tau \, \frac{\left((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right)}{r^3}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\Box\,\chi = \delta$

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0.$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big) + \right.$$
$$\left. + t\big(H(t-r/c_1) - H(t-r/c_2)\big)\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}\right)$$

The basic singular solution of elastodynamics

Тензор Стокса

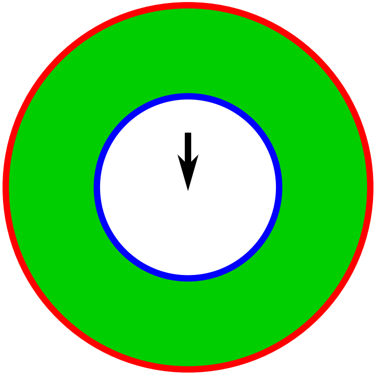
$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0.$

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I})+t\big(H(t-r/c_1)-H(t-r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{n}$$

Тензор Стокса: характер волнового поля

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}) + t\big(H(t-r/c_1)-H(t-r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{n}$$



$r = c_1 t$: дилатация и сдвиг

$r = c_2 t$: поворот и сдвиг

сдвиг

Тензор Стокса: характер волнового поля

Задача

Показать непосредственным вычислением, что дилатация и поворот между фронтами P и S волн равны нулю:

- $\nabla \cdot \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}$,
- $\nabla \times \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}$.

Решение через потенциалы

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\exists\ \mathbf{u}=\nabla\Phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}$:

$$\triangle\Phi-c_1^{-2}\ddot{\Phi}=c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$$\triangle\mathbf{\Psi}-c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$\Longrightarrow\qquad \exists\ \Phi=\nabla\cdot\varphi\mathbf{n},\quad \mathbf{\Psi}=-\nabla\times\psi\mathbf{n}$

$$\cancel{\nabla\cdot}:\qquad \triangle\varphi-c_1^{-2}\ddot{\varphi}=c_1^{-2}\frac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \varphi\big|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\cancel{\nabla\times}:\qquad \triangle\psi-c_2^{-2}\ddot{\psi}=c_2^{-2}\frac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \psi\big|_{t<0}\equiv 0.$$

$\Longrightarrow\qquad \exists\ \varphi=\dfrac{\varphi_0(r)}{4\pi r},\quad \psi=\dfrac{\psi_0(r)}{4\pi r}$:

$$\varphi_0''-c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0=c_1^{-2}\chi(t),\qquad \varphi_0\big|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\psi_0''-c_2^{-2}\ddot{\psi}_0=c_2^{-2}\chi(t),\qquad \psi_0\big|_{t<0}\equiv 0.$$

Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r} :$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\varphi\mathbf{n} - \nabla\times(\nabla\times\psi\mathbf{n}) = \nabla\nabla\cdot(\varphi-\psi)\mathbf{n} + \triangle\psi\mathbf{n} =$$

$$\nabla\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau\right) +$$

$$+\frac{\chi(t - r/c_2)\mathbf{n}}{4\pi c_2^2 r}$$

и далее, упрощая полученное выражение, приходим к прежнему ответу (см. Achenbach).

Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r}:$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

Важный вывод

Для $\chi(t)$: $\chi(t) \neq 0$ при $t > 0$ потенциалы мгновенно становятся ненулевыми во всём $\mathbb{R}^3$, однако вне фронта $r = c_1 t$ их вклад в перемещения равен нулю.