

Нестационарные упругие волны

Сергей Николаевич Гаврилов

<http://www.pdmi.ras.ru/~serge/lectures/2024.pdf>

Общая характеристика курса

Будем рассматривать и решать нестационарные задачи для уравнений в частных производных, описывающие нестационарные процессы в механических системах с распределенными параметрами — много математики (матфизики).

Постановка задачи:

- Уравнения движения ((не)линейные PDE): $\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t)$.
- Начальные условия.
- Условия излучения или (и) граничные условия.

Нестационарность:

- Влияние начальных условий на движение.
- Задачи, где правая часть уравнения (нагрузка) зависит от времени негармоническим образом.
- Задачи для систем с переменными по времени свойствами.

Цель курса:

- Научиться решать нестационарные задачи ...
- ...для того, чтобы изучать принципиально нестационарные явления Природы.
- ...которые очень часто являются интуитивно не очевидными или даже контр-очевидными.

- 09–11.2024 Одномерные задачи (PDE с двумя независимыми переменными: координата x и время t).
- 12.2024 Двух- и трехмерные задачи (PDE с 3-4 независимыми переменными: 2-3 координаты x_i и время t).
- Экзамен по теоретическим материалам всего курса.

- Волновое уравнение:

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = f.$$

- Телеграфное уравнение:

$$\Delta u - 2\gamma\dot{u} - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$

- Уравнение Клейна-Гордона:

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$

- Уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2u = f.$$

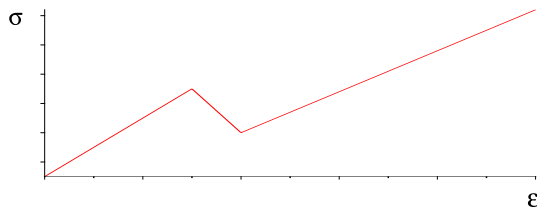
- Уравнения линейной изотропной эластодинамики Навье:

$$\mu\Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}.$$

...

Блиц-опрос

- 1 Выписать общее решение $u(x, t)$ одномерного однородного волнового уравнения $u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$.
- 2 Какова размерность $\delta(t)$ (дельта-функции Дирака), если t — время?
- 3 Выписать решение $u(t)$ уравнения $\ddot{u} + u = f(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.
- 4 Имеется тело, в котором зависимость напряжения от деформации имеет вид как на рисунке ниже. Что вы можете сказать про такое тело?



- 5 Чему равно преобразование Фурье от константы?
- 6 Знаете ли вы, в чём отличие интегралов Римана и Лебега?

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Метод характеристик

- Для матфизики типичной является ситуация, когда получить какие-либо утверждения или даже сформулировать определения для (системы) PDE общего вида — весьма сложная задача.
- Поэтому, рассмотрим метод характеристик на конкретных примерах ...
- ...попутно обсудив понятие гиперболичности.
- Ограничимся случаем двух независимых переменных.



С.К. Годунов

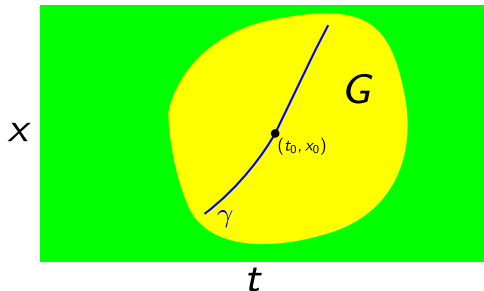
Уравнения математической физики.

М., Наука, 1979.

Постановка задачи об определении характеристик для линейного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами

$$a(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad \text{или} \quad a(t, x) \dot{u} + b(t, x) u' = f(t, x)$$

- \square известно, что рассматриваемое уравнение имеет решение в некоторой области G . Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую γ .
- \square известны значения u вдоль кривой γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — требуется восстановить u в некоторой окрестности γ .
- Характеристики — кривые γ , такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти $\dot{u}, u' \implies$

$$\begin{cases} a\dot{u} + bu' = f \\ dt\dot{u} + dxu' = du \end{cases} \implies \begin{vmatrix} a & b \\ dt & dx \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые γ в плоскости (t, x) , вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a & b \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0$ — характеристические кривые (характеристики) уравнения (1).

Т.е. на характеристиках $\frac{dx}{dt}\Big|_{\gamma} = \frac{b}{a}$ или $\frac{dt}{dx}\Big|_{\gamma} = \frac{a}{b}$.

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} a & b \\ dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} a & b & f \\ dt & dx & du \end{bmatrix},$$

т.е. $\frac{du}{dx}\Big|_{\gamma} = \frac{f}{b}$ или $\frac{du}{dt}\Big|_{\gamma} = \frac{f}{a}$ — соотношение на характеристике.

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x). \end{aligned} \quad (2)$$

Характеристики, очевидно, представляют собой параметрически заданные системой (2) кривые $(t(s), x(s))$.

Соотношение на характеристике:

$$\frac{du}{ds} = f(t, x). \quad (3)$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x). \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение на характеристике:

$$\frac{du}{ds} = f(t, x). \quad (3)$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

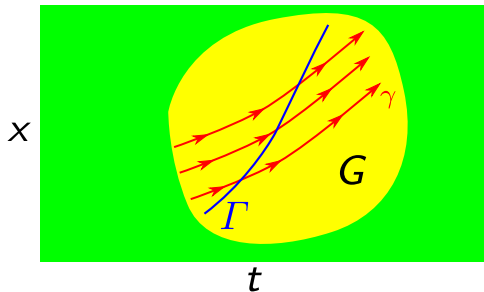
Задача

Найти характеристики и общее решение линейного однородного уравнения первого порядка

$$\dot{u} + cu' = 0.$$

Линейное уравнение первого порядка: выводы

- Если начальные условия заданы на кривой Γ , через каждую точку s которой проходит одна и только одна характеристика γ (не касаясь данной кривой), то соответствующая задача Коши имеет единственное решение.
- Если начальные условия заданы на характеристике γ , то соответствующая задача Коши может не иметь решения, а может иметь неединственное решение (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике γ).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.



Квазилинейное уравнение первого порядка

$$a(t, x, u)\dot{u} + b(t, x, u)u' = f(t, x, u) \quad (4)$$

Рассмотрим характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x, u), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x, u), \\ \frac{du}{ds} &= f(t, x, u). \end{aligned} \quad (5)$$

Для квазилинейного PDE (4) первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (5).

- Характеристики зависят от начального условия.
- Кривая, являющаяся характеристикой для одного НУ, для другого характеристикой, вообще говоря, не является.
- При решении задачи Коши характеристики строятся инкрементально вместе с решением.

Система N линейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{A}(t, x)\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}(t, x)\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{f}}(t, x) \quad (6)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} — матрицы $N \times N$; $\det \mathbf{A} \neq 0$; \mathbf{u} , $\tilde{\mathbf{f}}$ — столбцы.

Домножая (6) на \mathbf{A}^{-1} слева, получим

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x),$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}.$$

Система N линейных уравнений первого порядка: характеристическое уравнение

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Можем найти $\mathbf{u} \implies$ можем найти $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}' = \mathbf{f} \\ dt\dot{\mathbf{u}} + dx\mathbf{u}' = d\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N (-1)^N \begin{vmatrix} \mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{dx}{dt}\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N (-1)^N \det\left(\mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I}\right)$$

Т.е. на характеристиках $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\gamma} = k_i(x, t)$, где k_i — собственные числа \mathbf{C} .

Система N линейных уравнений первого порядка: соотношения на характеристиках

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Можем найти \mathbf{u} \implies можем найти $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}' = \mathbf{f} \\ dt\dot{\mathbf{u}} + dx\mathbf{u}' = d\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

Т.е. на характеристиках $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\gamma} = k_i(x, t)$, где k_i — собственные числа \mathbf{C} .

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{f} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} & d\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

— соотношения на характеристиках.

Система N линейных уравнений первого порядка: гиперболичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt \mathbf{I} & dx \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$, — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$, где k_i — собственные числа \mathbf{C} .

Определение

Если все собственные числа матрицы \mathbf{C} вещественны и не являются кратными ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. имеется ровно N семейств характеристик), то система называется гиперболической в области.

Волны — решения гиперболических уравнений.

Контрольный вопрос

Что можно сказать о гиперболичности линейного уравнения 1 порядка?

Система N линейных уравнений первого порядка: эллиптичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt \mathbf{I} & dx \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$, — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$, где k_i — собственные числа \mathbf{C} .

Определение

Если характеристическое уравнение системы не имеет вещественных решений ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. характеристик нет), то система называется эллиптической в области.

Гиперболическая система N линейных уравнений первого порядка: выводы

- Начальные условия и краевые условия (в смешанной задаче) не следует задавать на характеристиках — это может приводить к несуществованию или неединственности решения (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.

Линейное уравнение второго порядка

Вопрос о нахождении характеристик и классификации уравнений второго порядка для двух независимых переменных может быть решен сведением уравнения к системе 2 уравнений первого порядка.

Рассмотрим его на примере простейшего гиперболического уравнения — одномерного однородного волнового уравнения, для которого метод характеристик чрезвычайно эффективен и нагляден.

Одномерное однородное волновое уравнение

Механические системы, которые описывает одномерное волновое уравнение:

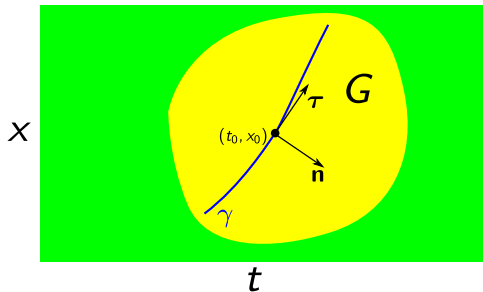
- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

Постановка задачи об определении характеристик для одномерного однородного волнового уравнения

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- \square известно, что уравнение имеет решение в некоторой области G . Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую γ .
- \square известны значения u и нормальной производной $\mathbf{n} \cdot \nabla u$ вдоль кривой γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — определить u в некоторой окрестности γ .
- Характеристики — кривые γ , такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Одномерное волновое уравнение: характеристики, гиперболичность

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти \ddot{u}, u'', \dot{u}'

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

Имеется 2 семейства характеристик: волновое уравнение — гиперболическое.

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти \ddot{u}, u'', \dot{u}'

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ dx & 0 & dt & du' \\ 0 & dt & dx & d\dot{u} \end{bmatrix} \iff dt d\dot{u} = dx du'$$

$$\iff_{dx=\pm cdt} d\dot{u} = \pm c du' \iff \begin{cases} u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const}, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const}. \end{cases}$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Одномерное волновое уравнение: общее решение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти \ddot{u}, u'', \dot{u}'

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках PDE (8) упрощается, рассмотрим его в новых переменных $u(t, x) = u(\phi_+, \phi_-)$:

$$\dot{u} = u_{\phi_+} \phi_{+t} + u_{\phi_-} \phi_{-t} = c(u_{\phi_+} - u_{\phi_-}), \quad u' = u_{\phi_+} \phi_{+x} + u_{\phi_-} \phi_{-x} = u_{\phi_+} + u_{\phi_-},$$

$$\ddot{u} = c^2(u_{\phi_+\phi_+} - 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}), \quad u'' = u_{\phi_+\phi_+} + 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}.$$

Подставляя в PDE (8) и интегрируя, получим решение Даламбера:

$$u_{\phi_+\phi_-} = 0 \iff u = \Psi_-(x - ct) + \Psi_+(x + ct).$$

Здесь Ψ_{\pm} — произвольные функции (формы волн или просто волны), ϕ_{\pm} — фазы, c — фазовая скорость волны (скорость движения точки $x = X(t)$ с постоянной фазой):

$$X(t) \pm ct = \text{const} \implies \dot{X} = \mp c.$$

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти $u \implies$ можем найти \dot{u}, u'', \dot{u}'

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ dx & 0 & dt & du' \\ 0 & dt & dx & d\dot{u} \end{bmatrix} \iff dt d\dot{u} = dx du'$$

$$\begin{aligned} \iff dx = \pm c dt \quad d\dot{u} = \pm c du' \iff \begin{cases} u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+. \end{cases} \end{aligned}$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Альтернативный подход для волнового уравнения: факторизация дифференциального оператора

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \left(\frac{\partial}{\partial x} + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \iff \begin{cases} u = u_- + u_+, \\ u'_- + c^{-1}\dot{u}_- = 0, \\ u'_+ - c^{-1}\dot{u}_+ = 0. \end{cases}$$

Т.е., общее решение u волнового уравнения — сумма общих решений u_- и u_+ односторонних волновых уравнений, для которых характеристическая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \pm c^{-1}, \\ \frac{dx}{ds} &= 1. \end{aligned}$$

Характеристики односторонних волновых уравнений — кривые, удовлетворяющие ODE

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \iff x \mp ct = \text{const}:$$

$$x - ct = \text{const},$$

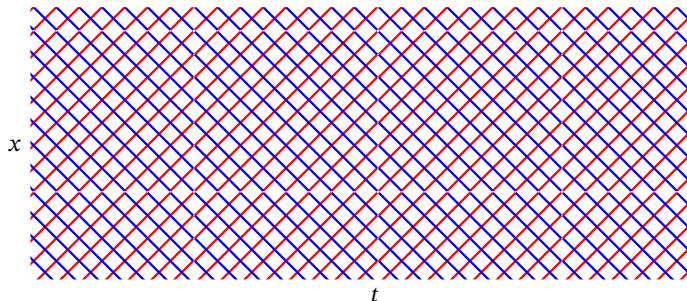
$$x + ct = \text{const}.$$

Соотношения на характеристиках:

$$du|_{x \mp ct = \text{const}} = 0 \implies \begin{cases} u_- = \Psi_-(x - ct), \\ u_+ = \Psi_+(x + ct). \end{cases}$$

Одномерное волновое уравнение: метод характеристик

- Рассматриваем поведение решения в плоскости (t, x) .
- Через каждую точку плоскости проходят две характеристики, на которых фазы $\phi_- = x - ct$ и $\phi_+ = x + ct$ постоянны.
- В каждую точку возмущение приходит по характеристикам в виде двух волн $\Psi_-(\phi_-)$ и $\Psi_+(\phi_+)$ (бегущих “направо” и “налево” соответственно) неизменные вдоль характеристик.
- В каждой точки решение равно сумме волн: $u = \Psi_-(\phi_-) + \Psi_+(\phi_+)$.
- Вдоль характеристик решение (сумма волн) удовлетворяет соотношению на характеристике ($u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-$, $u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+$).



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах



- 1 На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$

$$\dot{u}(\pm 1, t) = \pm 1$$

(растяжение стержня кинематическим нагружением).

- 2 На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения

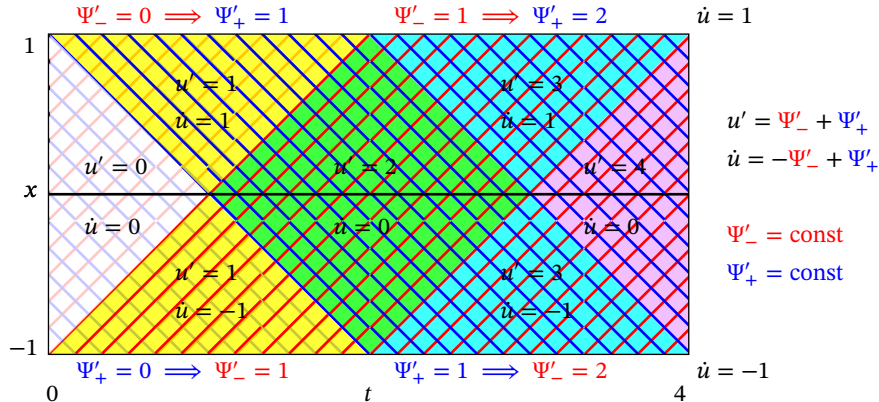
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$

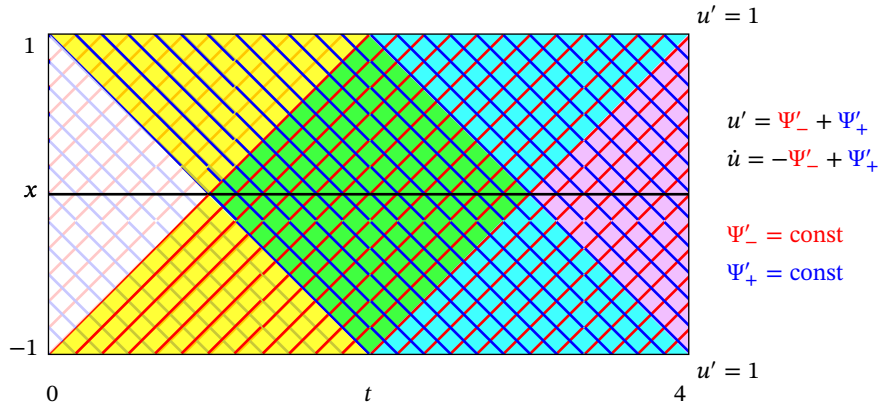
$$u'(\pm 1, t) = 1$$

(растяжение стержня силовым нагружением).

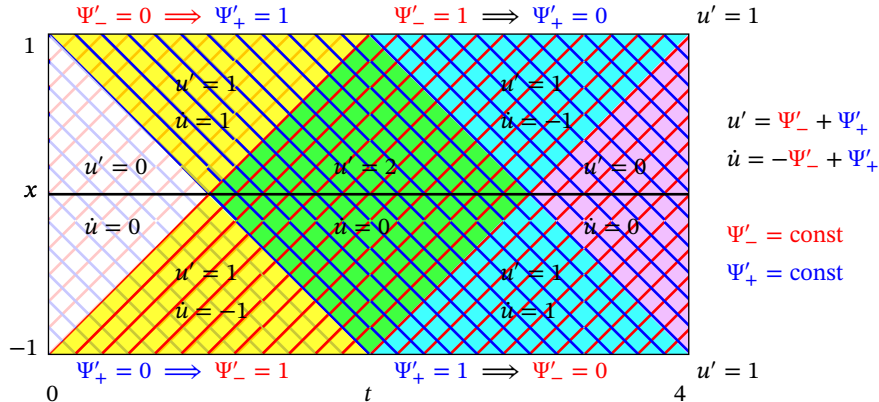
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое напряжение

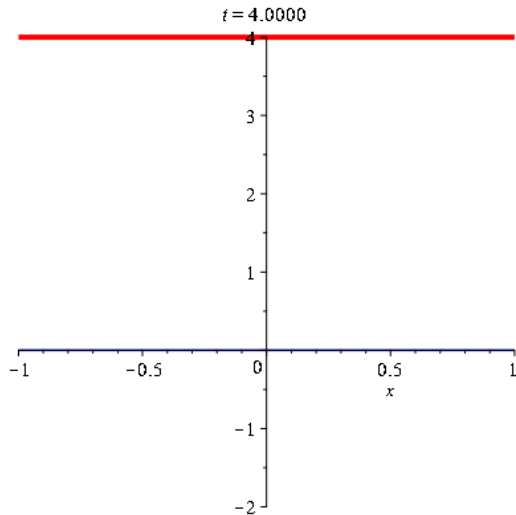


Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое напряжение



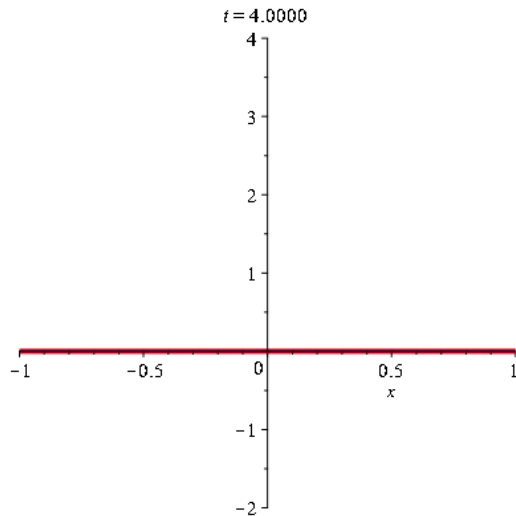
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение

Деформация, скорость.



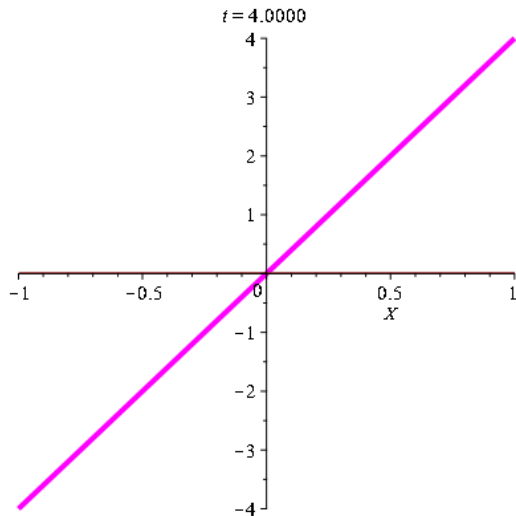
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое напряжение

Деформация, скорость.



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Кинематическое и силовое нагружение.



Парадокс исчезновения волнового процесса

- На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$

$$u'(\pm 1, t) = H(4 - t)$$

(растяжение стержня силовым нагружением).



Е.Е. Павловская, Ю.В. Петров.

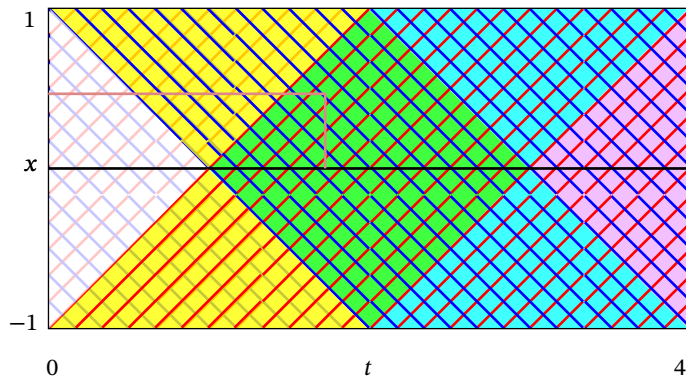
О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости

Известия РАН, МТТ, №4, 2002, с. 39–45.

Растяжение конечного стержня, нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Как определить перемещения?

$$u = \int u' dx = \int \dot{u} dt$$



Найти характеристики и условия на характеристиках для

- ① системы уравнений Коши-Римана

$$u_x - v_y = 0,$$

$$u_y + v_x = 0;$$

- ② уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

- ③ уравнения Клейна-Гордона

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} - ku = 0.$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа**
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)



В.С. Владимиров.

Уравнения математической физики.

М., Наука, ...



А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин

Элементы теории функций и функционального анализа.

М., Наука, ...

Локально-интегрируемые функции

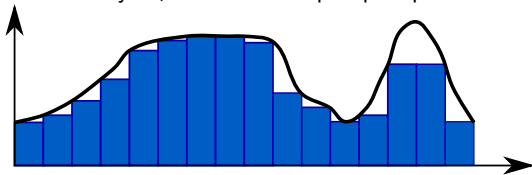
- Одним из важнейших понятий в классической матфизике является понятие локально интегрируемой функции.
- Требование локальной интегрируемости связано с необходимостью иметь возможность вычислить, сколько физической величины (например, объема, массы, количества движения, энергии и т.д.) находится в заданной ограниченной области из \mathbb{R}^n .
- В современной матфизике интегрируемость функции понимается в смысле Лебега ...
- ...поскольку классический интеграл Римана оказался малоприменимым для потребностей матфизики.
- Причина в том, что многие встречающиеся в приложениях функции оказываются неинтегрируемыми (например, любая неограниченная функция неинтегрируема по Риману).

Теория меры и интеграла Лебега

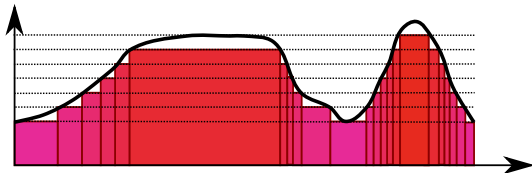
- Интеграл Лебега — это обобщение интеграла Римана на более широкий класс функций.
- Все функции, определённые на конечном отрезке числовой прямой и интегрируемые по Риману, являются также интегрируемыми по Лебегу, причём в этом случае оба интеграла равны. Однако существует большой класс функций, определённых на отрезке и интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых по Риману. Также интеграл Лебега может иметь смысл для функций, заданных на произвольных абстрактных множествах.
- Мера Лебега — понятие, обобщающее понятия длины, площади, объёма и т.д. (меры Жордана в \mathbb{R}^n) как для абстрактных множеств, так и для подмножеств \mathbb{R}^n , неизмеримых по Жордану.

Теория интегрирования Лебега

- Сначала строится теория меры Лебега (которая определена на измеримых множествах), а потом — теория интегрирования, применимая к измеримым функциям.
- Идея построения интеграла Лебега состоит в том, что вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают её область значений, а затем суммируют с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов.



$$\sum_{k=1}^N F(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$



$$\sum_{k=1}^N y_k \mu\{x \in X : y_k < F(x) \leq y_{k+1}\}$$

- Современная теория вероятностей является теорией меры и интеграла Лебега в специальном случае, когда мера универсального множества равна единице.

Альтернативный подход

- Интеграл Лебега в \mathbb{R}^n вводится как обобщение понятия интеграла Римана.
- Мера Лебега в \mathbb{R}^n вводится как интеграл от характеристической функции множества.

Такой подход позволяет быстро ввести необходимые для матфизики понятия.



[В.С. Владимиров.](#)

Уравнения математической физики.

[М., Наука, ...](#)

Интеграл Лебега: множества меры нуль

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль $\iff \forall \epsilon > 0$ оно может быть покрыто не более чем счетной системой шаров суммарного объема $< \epsilon$.

Из этого определения вытекает, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль и объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль. Например, всякое счетное множество и всякая кусочно-гладкая поверхность имеют меру нуль.

Определение

Некоторое свойство выполняется почти везде в области $G \in \mathbb{R}^n$, если множество точек области G , которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

Интеграл Лебега: измеримые функции и множества

Далее считаем, что все функции заданы во всем пространстве \mathbb{R}^n и почти везде конечны.

Определение

Функция называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

f, g — измеримы $\implies f + g, fg, \max(f, g)$ etc измеримы.

Определение

Множество $A \in \mathbb{R}^n$ называется измеримым, если его характеристическая функция $\chi_A(\mathbf{x})$ измерима.

Неизмеримые функции (и множества) устроены весьма неправильно, и ни одна из них не построена в явном виде; можно только теоретически доказать их существование, используя так называемую аксиому выбора. Это говорит о том, что все функции и множества, которые нам могут встретиться, будут измеримы. **Поэтому в дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые множества измеримы, а функции измеримы и почти везде конечны.**

Пример неизмеримого множества — множество Витали.

Пример неизмеримого множества — множество Витали

Рассмотрим отношение эквивалентности \sim на отрезке $[0, 1]$: $x \sim y$ если разница $x - y$ рациональна. Это отношение эквивалентности разбивает интервал $[0, 1]$ на классы эквивалентности, каждый из которых имеет счётную мощность, но их количество имеет мощность континуума. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной точке.

Аксиома выбора

Для всякого семейства непустых множеств существует функция, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества.

Тогда полученное множество E представителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть E счётное число раз на все рациональные числа из интервала $[-1, 1]$, то объединение будет содержать весь отрезок $[0, 1]$, но при этом оно будет содержаться в отрезке $[-1, 2]$. При этом «сдвинутые копии» множества E не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения \sim и E .

□ E — измеримо (предполагаем что, мера конгруэнтных множеств одинакова):

- Мера E ноль. Тогда мера $[0, 1]$ ноль (счётное объединение множеств меры ноль).
- Мера E — положительна. Тогда мера $[-1, 2]$ бесконечна (счётное объединение множеств одинаковой ненулевой меры).

Интеграл Лебега от неотрицательной функции по \mathbb{R}^n

Определение

Функция $\phi(\mathbf{x})$ называется финитной, если $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $|\mathbf{x}| > R$ для некоторого R .

Определение

Пусть неотрицательная измеримая функция $f(\mathbf{x})$ совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности финитных кусочно-непрерывных функций $f_k(\mathbf{x})$ с ограниченной последовательностью интегралов (Римана) $\int f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Предел неубывающей ограниченной последовательности этих интегралов называется интегралом Лебега функции f . Функция f в этом случае называется интегрируемой по Лебегу или суммируемой.

Здесь вообще говоря нужно доказать корректность (независимость от f_k).

Теорема

Функция $f(\mathbf{x}) \geq 0$ равна нулю почти везде $\iff \int f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$.

Интеграл Лебега от вещественной функции по \mathbb{R}^n

□ f — вещественная:

$$f_+ = \max(f, 0),$$

$$f_- = \max(-f, 0);$$

$$f = f_+ - f_-,$$

$$|f| = f_+ + f_-.$$

Определение

Вещественная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой) $f \in \mathcal{L}$, если неотрицательные f_+ , f_- интегрируемы.

Число

$$\int f \, dx \equiv \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл Лебега от комплекснозначной функции

Определение

Комплекснозначная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ интегрируемы.

Число

$$\int f \, d\mathbf{x} \equiv \int \operatorname{Re} f \, d\mathbf{x} + i \int \operatorname{Im} f \, d\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл по измеримому множеству

Определение

Функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A , $f \in \mathcal{L}(A)$, если $f\chi_A \in \mathcal{L}$.

Число

$$\int_A f \, dx \equiv \int f\chi_A \, dx$$

называется интегралом Лебега функции f по множеству A .

Число

$$\int_A dx \equiv \int \chi_A \, dx$$

называется мерой Лебега множества A .

Теорема Лебега

Теорема

Пусть последовательность (измеримых) функций f_k сходится почти везде к функции f . Если существует интегрируемая функция g такая, что $|f_k| \leq g$ почти везде, то f — интегрируема и

$$\lim \int f_k dx = \int f dx.$$

Отсюда в частности следует, что всякая интегрируемая функция интегрируема по любому измеримому множеству A .

Связь с интегралом Римана

Теорема

Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы по Риману (возможно, в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и их интегралы в обоих смыслах совпадают.

Пример ограниченной интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману функции: функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально,} \\ 1, & x \text{ рационально.} \end{cases}$$

(доказать по определению!)

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману в \mathbb{R}^1

Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет меру нуль.

Локально интегрируемые функции

Определение

Ограниченная область G' называется подобластью, строго лежащей в области G , если $\bar{G}' \subset G$, при этом пишут $G' \Subset G$.

Определение

Функция f называется локально интегрируемой по Лебегу в области G , $f \in \mathcal{L}_{loc}(G)$, если $f \in \mathcal{L}(G')$ для всех измеримых $G' \Subset G$.

Контрольный вопрос

Является ли локально интегрируемой функция $f(t) = 1/t$, $t \in \mathbb{R}$?

Теорема Фубини

Теорема

Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданная на \mathbb{R}^{n+m} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ измерима и существует повторный интеграл Лебега

$$\int \left(\int |f| \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} < \infty,$$

то $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Обратно, если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, то интегралы Лебега

$$\int f \, d\mathbf{x}, \quad \int f \, d\mathbf{y}$$

существуют почти везде, интегрируемы по Лебегу, и справедливы равенства

$$\int \left(\int f \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int f \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int \left(\int f \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях**
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)



В.С. Владимиров.

Уравнения математической физики.

М., Наука, ...



И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев.

Обобщенные функции и действия над ними.

М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

Локально интегрируемые функции как линейные функционалы

□ ϕ — гладкая финитная функция: $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $|\mathbf{x}| > R$.

Из [теоремы Лебега](#) следует, что любой локально интегрируемой функции на \mathbb{R}^n можно сопоставить линейный функционал, порождаемый локально интегрируемой в \mathbb{R}^n функцией f , действующей по правилу $(f, \phi) = \int f \phi \, dx$.

δ -функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ :

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_V \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

δ -функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ :

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = \mathbf{0}; \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \text{ области } \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3.$$

Хотим, чтобы было так:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Поточечный предел не годится!

δ -функция Дирака как линейный функционал

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим слабый предел f_ϵ , т.е. для любой достаточно гладкой функции ϕ найдём предел при $\epsilon \rightarrow 0$ величины $\int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$: Вычисляя, находим:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}).$$

Слабым пределом является функционал $\delta(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x})$, сопоставляющий каждой непрерывной в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ функции $\phi(\mathbf{x})$ число $\phi(\mathbf{0})$: её значение в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — дельта-функция Дирака. Тогда имеем:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) \chi_{\mathcal{V}} d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Обобщенные функции: идея

- В связи с тем, например, что решения гиперболических уравнений могут быть разрывными, для решения соответствующих задач математической физики недостаточно локально-интегрируемых функций, а нужны еще так называемые сингулярные функции (например, дельта-функция Дирака).
- При решении конкретных задач сингулярные функции встречаются, как правило, только на начальном или промежуточных этапах. В окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком “интеграла” в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией.
- Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно понимать как с ней работать.
- Множество всех регулярных (локально интегрируемых функций) и сингулярных функций является множеством обобщенных функций.

Основные и обобщенные функции — определение

- Обобщенные функции (distributions) — линейные непрерывные функционалы на пространстве достаточно “хороших” функций (основных, test functions).
- Чем более жёсткие требования налагаются на основные функции, тем богаче выбор соответствующих обобщенных функций.
- Далее рассматриваем пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных (тождественно равных нулю за пределами некоторого шара) бесконечно дифференцируемых функций: $\mathcal{D} \subset C^\infty$.
- Последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится, если они равны нулю за пределами некоторого шара и в нём они C^∞ -сходятся.
- Пример основной функции, отличной от нуля, — “шапочка”: $C \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |\mathbf{x}|^2}\right) H(\epsilon - |\mathbf{x}|)$ (H — функция Хевисайда).

Определение

Обобщенные функции — элементы линейного пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ линейных непрерывных функционалов на \mathcal{D} .

Основные и обобщенные функции — свойства

- Обобщенная функция f есть функционал на \mathcal{D} , т.е. каждой $\phi \in \mathcal{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, ϕ) .
- Обобщенная функция f есть линейный функционал на \mathcal{D} , т.е.

$$(f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1(f, \phi_1) + \alpha_2(f, \phi_2).$$

- Обобщенная функция f есть непрерывный функционал на \mathcal{D} , т.е.

$$\varphi_k \rightarrow 0 \implies (f, \varphi_k) \rightarrow 0.$$

- Линейные функционалы на \mathcal{D} не обязаны быть непрерывными. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на \mathcal{D} ; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Сходимость в \mathcal{D}' и полнота \mathcal{D}'

Теорема

Пусть последовательность $f_k \in \mathcal{D}'$ такова, что для каждой $\phi \in \mathcal{D}$ числовая последовательность (f_k, ϕ) сходится при $k \rightarrow \infty$. Тогда функционал f на \mathcal{D} , определенный равенством

$$(f, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \phi)$$

также является линейным и непрерывным.

Носитель основной функции

Определение

Носителем $\text{supp } \phi$ непрерывной функции называется замыкание множества тех точек, где $\phi \neq 0$.

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области \mathcal{G} , обозначим через $\mathcal{D}(\mathcal{G})$; таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}$.

Нулевое множество обобщенной функции

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль ($f = 0$) обобщенной функции в области.

Определение

Обобщенная функция f обращается в нуль в области \mathcal{G} , если $(f, \phi) = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Теорема

Обобщенная функция f обращается в нуль в некоторой окрестности каждой точки области \mathcal{G} $\iff f$ обращается в нуль в области \mathcal{G} .

Определение

Объединение всех окрестностей, где $f = 0$, образует открытое множество \mathcal{O}_f которое называется нулевым множеством обобщенной функции f и представляет собой наибольшее открытое множество, где $f = 0$.

Носитель обобщенной функции

Определение

Носителем $\text{supp } f$ называется $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$.

Определение

Если $\text{supp } f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется финитной.

Регулярные обобщенные функции

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в \mathbb{R}^n функцией $f: (f, \phi) = \int f \phi \, dx$.

Теорема (лемма дю Буа-Реймона)

Для того чтобы локально интегрируемая в \mathcal{G} функция $f(x)$ обращалась в нуль в области \mathcal{G} в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в \mathcal{G} .

Доказательство.

Достаточность очевидна, необходимость доказывается разложением по локальной тригонометрической системе для шара, содержащегося в окрестности выбранной точки области □

Всякая локально интегрируемая функция определяет регулярную обобщенную функцию. Из теоремы следует, что если регулярные обобщенные функции равны в смысле обобщенных функций, то они равны почти везде как локально-интегрируемые. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею обобщенную функцию.

Сингулярные обобщенные функции

Сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией.

Примеры.

- Дельта-функция Дирака $\delta(\mathbf{x})$;
- $\text{VP} \frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$: $\left(\text{VP} \frac{1}{t}, \phi\right) = \text{VP} \int \frac{\phi(t)}{t} dt$ — интеграл в смысле главного значения.

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

\square f — локально интегрируемая, $t = A\tau + b$, $A \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства \mathbb{R}^1 на себя. Тогда:

$$\begin{aligned} (f(A\tau + b), \phi) &= \int_{\mathbb{R}} f(A\tau + b)\phi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{|A|} \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(A^{-1}(t - b)) dt = \frac{1}{|A|} (f, \phi(A^{-1}(t - b))) \end{aligned}$$

\square $f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$(f(At + b), \phi) \equiv \frac{1}{|A|} (f, \phi(A^{-1}(t - b)))$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\square f$ — локально интегрируемая, $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства \mathbb{R}^n на себя. Тогда:

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}), \phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \\ &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b})) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} (f, \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}))) \end{aligned}$$

$\square f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$(f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}), \phi) \equiv \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} (f, \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b})))$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: частные случаи

- $(f(c\mathbf{x}), \phi) = \frac{1}{|c|^n} (f, \phi(c^{-1}\mathbf{x}))$
- $(f(\mathbf{x} + \mathbf{b}), \phi) = (f, \phi(\mathbf{x} - \mathbf{b}))$
- $(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \phi) = (\delta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)) = \phi(\mathbf{x}_0)$
- $\delta(c\mathbf{x}) = \frac{1}{|c|^n} \delta(\mathbf{x})$
- $[\delta(t)] = \text{секунда}^{-1}$, если t — время.

Умножение обобщенных функций

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую: $\square a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:

Определение

$$(af, \phi) \equiv (f, a\phi).$$

Примеры.

- $a(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{0})\delta(\mathbf{x})$
- $t \text{VP} \frac{1}{t} = 1$:

$$\left(t \text{VP} \frac{1}{t}, \phi\right) = \left(\text{VP} \frac{1}{t}, t\phi\right) = \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{t\phi(t)}{t} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = (1, \phi).$$

Умножение обобщенных функций

Операция произведения не допускает распространения на любые обобщённые функции так, чтобы она была ассоциативной, коммутативной и чтобы сужение этой операции на множество непрерывных функций совпадало с обычным произведением:

$$0 = 0 \text{ VP } \frac{1}{t} = (t\delta(t)) \text{ VP } \frac{1}{t} = (\delta(t)t) \text{ VP } \frac{1}{t} = \delta(t) \left(t \text{ VP } \frac{1}{t} \right) = \delta(t)$$

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}} Df(t)\phi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t)D\phi(t) dt$$

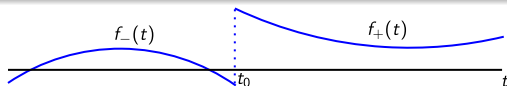
Определение

$$(Df, \phi) = -(f, D\phi)$$

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$$f(t) = \begin{cases} f_-(t), & t < t_0, \\ f_+(t), & t > t_0; \end{cases} \quad f_-(t_0) \neq f_+(t_0), \quad f_{\pm} \in C^1. \text{ Вычислить } f'.$$



$$\{f'\} \equiv \begin{cases} f'_-(t), & t < t_0, \\ f'_+(t), & t > t_0; \end{cases} \quad \text{— классическая производная } f(t), \quad [f] \equiv f_+(t_0) - f_-(t_0) \quad \text{— величина скачка.}$$

$$\begin{aligned} (f', \phi) &= -(f, \phi') = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi'(t) dt = - \left(\int_{-\infty}^{t_0} + \int_{t_0}^{\infty} \right) f(t) \phi'(t) dt = \\ &= (f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)) \phi(t_0) + \int_{\mathbb{R}} \{f'\}(t) \phi(t) dt = \\ &= ([f] \delta(t - t_0) + \{f'\}, \phi). \end{aligned}$$

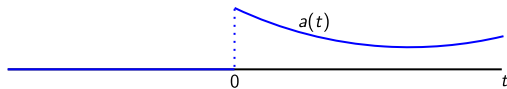
Следствие

$$H' = \delta.$$

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$f(t) = a(t)H(t)$, $a \in C^1$ Вычислить f' .



Свойства $\delta'(t)$

Задача

Доказать равенство: $a(t)\delta'(t) = -a'(0)\delta(t) + a(0)\delta'(t)$, $a \in C^1$.

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})D^\alpha\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Определение

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\phi)$$

Здесь используются обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— мульти-индекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha\phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\dots\partial^{\alpha_n}x_n}$$

— частная производная ϕ порядка $|\alpha|$.

Свойства обобщенных производных

- Если обобщенная функция гладкая, то ее обобщенная производная совпадает с классической производной (прямое следствие определения обобщенной производной)
- Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема (поскольку основные функции бесконечно дифференцируемы)
- Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (поскольку это так для основных функций)

Дифференцирование произведения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую

Утверждение

Для произведения af , где $a \in C^\infty$, $f \in \mathcal{D}'$, справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения. Например, в одномерном случае

$$(af)' = a'f + af'.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((af)', \phi) &= -(af, \phi') = -(f, a\phi') = -(f, (a\phi)' - a'\phi) = \\ &= -(f, (a\phi)') + (f, a'\phi) = (f', a\phi) + (a'f, \phi) = (a'f + af', \phi) \end{aligned}$$

□

Наводящие соображения:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\tau) \phi(\tau) d\tau = \phi(0)$$

□ $\tau = f(t)$ — монотонная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный простой корень при $t = t_0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(f(t)) \phi(f(t)) |f'(t)| dt = \phi(0)$$

□ $\psi(t) = \phi(f(t)) |f'(t)|$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(f(t)) \psi(t) dt = \phi(0) = \frac{\psi(t_0)}{|f'(t_0)|}.$$

$\delta(f(t))$

Определение

\square t_i — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i) = 0$, $f'(t_i) \neq 0$. Тогда

$$(\delta(f(t)), \phi) = \sum_i \frac{\phi(t_i)}{|f'(t_i)|},$$

т.е.

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i).$$

Это определение является естественным обобщением на нелинейный случай [формулы для линейной замены переменных](#) в обобщенных функциях.

Пример

$$\delta(\sin t) = \sum_i \delta(t - \pi i).$$

$\delta^{(n)}(f(t))$

Наводящие соображения:

$$\begin{aligned} \delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i) &\implies \delta'(f(t))f'(t) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \frac{d\delta(t - t_i)}{dt} \\ \implies \delta'(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \frac{1}{f'(t)} \frac{d\delta(t - t_i)}{dt} &\implies \delta'(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \left(\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right) \delta(t - t_i). \end{aligned}$$

Определение

□ t_i — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i) = 0$, $f'(t_i) \neq 0$. Тогда

$$\delta^{(n)}(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \left(\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \delta(t - t_i). \quad (9)$$

Контрольный вопрос

Можно ли заменить в формуле (9) оператор $\left(\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)$ на $\left(\frac{1}{f'(t_i)} \frac{d}{dt} \right)$?

Структура пространства обобщенных функций \mathcal{D}'

Теорема

Любая обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторых непрерывных функций.

Формулы Сохоцкого

Утверждение

$$\frac{1}{t \pm i0} = \mp i\pi\delta(t) + \text{VP} \frac{1}{t}$$

Доказательство.

□ $\phi(t) \equiv 0$ при $|t| > R$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{\phi(t)}{t \pm i\epsilon} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t \mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \phi(t) dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t \mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \phi(0) dt + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t \mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} (\phi(t) - \phi(0)) dt = \\ &= \mp 2i\phi(0) \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{R}{\epsilon} + \int_{-R}^R \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt = \\ &= \mp i\pi\phi(0) + \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt - \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(0)}{t} dt = \mp i\pi\phi(0) + \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt \end{aligned}$$

□

Задачи

- 1 $\square f(t) = a(t)H(t)$, $a \in C^2$. Вычислить f'' .
- 2 Вычислить обобщенные производные порядка 1, 2, 3 функций $f_1(t) = |t| \sin t$, $f_2(t) = |t| \cos t$.
- 3 Вычислить обобщенную производную $f^{(n)}$ порядка n функции $f(t) = \text{sign}(\sin t)$.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций**
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Прямое произведение обобщенных функций

□ $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ — локально интегрируемые функции в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно. Функция $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ также будет локально интегрируемой в \mathbb{R}^{m+n} . Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции ϕ по формулам

$$\begin{aligned}
 (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi) &\equiv \iint f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \\
 &= \int f(\mathbf{x}) \int g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi)) = \\
 &= (g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}), \phi) = \iint g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \\
 &= \int g(\mathbf{y}) \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = (g(\mathbf{y}), (f(\mathbf{x}), \phi))
 \end{aligned}$$

Прямое произведение обобщенных функций

Определение

Прямым произведением обобщенных функций $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ соответственно называется обобщенная функция $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, действующая по правилу $(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$.

Теорема (корректность определения)

Функционал, определяемый формулой $(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$, линейный и непрерывный.

Свойства прямого произведения обобщенных функций

- Коммутативность

$$f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x})$$

(для $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N u_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y})$ очевидна, в общем случае следует из того, что множество таких функций всюду плотно в \mathcal{D})

- Ассоциативность

$$(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) \cdot h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \cdot (g(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{z}))$$

- Умножение прямого произведения. $\exists a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:

$$a(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) = (a(\mathbf{x})f(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{y})$$

- Дифференцирование прямого произведения

$$D_{\mathbf{x}}^\alpha (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) = (D_{\mathbf{x}}^\alpha f(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{y})$$

Прямое произведение: пример

Обобщенная функция $f(x) \cdot 1(y)$, которая не зависит от y :

$$(f(x) \cdot 1(y), \phi) = \int_{\mathbb{R}} (f(x), \phi(x, y)) dy.$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}$.

Свёртка регулярных обобщенных функций

Определение

□ $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ — локально интегрируемые функции в \mathbb{R}^n такие, что функция $\int |g(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y}$ также локально интегрируема. Свёрткой $f * g$ называется функция

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = (g * f)(\mathbf{x})$$

Она стандартным образом определяет (регулярную) обобщенную функцию:

$$\begin{aligned} (f * g, \phi) &= \int (f * g)(\xi)\phi(\xi) d\xi = \\ &= \int \left(\int g(\mathbf{y})f(\xi - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \phi(\xi) d\xi = \\ &= \int g(\mathbf{y}) \left(\int f(\xi - \mathbf{y})\phi(\xi) d\xi \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int g(\mathbf{y}) \left(\int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int \int g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Свёртка (в классическом смысле) существует не всегда!

Некоторые достаточные условия существования свёртки:

- Одна из функций финитна;
- Обе функции обращаются в нуль при $x < 0$ ($n = 1$);
- Обе функции интегрируемы в \mathbb{R}^n .

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

$$(f * g, \phi) = (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})),$$

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

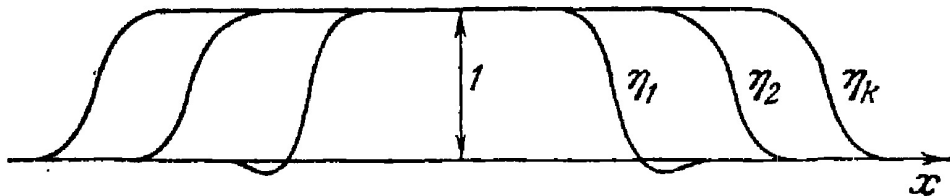
$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad \forall \eta_k,$$

где $\eta_k \rightarrow 1$ (сходится к единице) в \mathcal{D} :

- \forall замкнутого и ограниченного множества \mathcal{K} найдется N : $\eta_k = 1$ при $k \geq N$, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$;
- η_k равномерно ограничены со всеми своими производными: $|D^\alpha \eta_k| < C_\alpha$.

Для обобщённых функций:

$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad \forall \eta_k$$



Свёртка обобщённых функций: определение и свойства

Определение

Пусть пара обобщенных функций $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такова, что их прямое произведение $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ допускает продолжение на функции вида $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, а именно $\forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \eta_k \rightarrow 1 \exists$ предел числовой последовательности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})),$$

не зависящий от выбора η_k . Свёрткой $f * g$ называется функционал

$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})).$$

Свойства:

- Линейность;
- Коммутативность (следствие коммутативности прямого произведения).

Свёртка с δ

Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции f с δ -функцией существует и равна f :

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Доказательство.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x})(\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}), \eta_k(\mathbf{x}, 0)\phi(\mathbf{x})) = (f, \phi)$$



Дифференцирование свёртки

Теорема

Если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $(D^\alpha f) * g$ и $f * (D^\alpha g)$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$$

Доказательство.

Достаточно доказать $\forall D_j$:

$$\begin{aligned} \square \forall \eta_k \rightarrow 1 &\implies \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} \rightarrow 1 \implies (D_j(f * g), \phi) = -(f * g, D_j \phi) = \\ &= -\lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{\partial x_j} \right) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \frac{\partial (\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))}{\partial x_j} - \frac{\partial (\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}{\partial x_j} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \left(\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) + (f * g, \phi) - (f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ &= (D_j f * g, \phi) \end{aligned}$$

Второе равенство $f * D_j g = D_j(f * g)$ следует из первого и коммутативности свертки. □

Дифференцирование свёртки

- Существование сверток $(D^\alpha f) * g$ и $f * D^\alpha g$ ($|\alpha| \geq 1$) не достаточно для существования свёртки $f * g$ и справедливости равенства $(D^\alpha f) * g = f * D^\alpha g$. **Контрольный вопрос: почему?**
- Например: $H' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $H * 1' = H * 0 = 0$. **Контрольный вопрос: что можно сказать про свёртку $H * 1$?**
- Операция свёртки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(H * \delta') * 1 = H' * 1 = 1,$$

$$H * (\delta' * 1) = H * 0 = 0.$$

Свёртка с $\delta^{(n)}$

Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции с $\delta^{(n)}$ существует и равна $f^{(n)}$:

$$f * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * f = f^{(n)}.$$

Доказательство.

Применяем теорему о дифференцировании свёртки к тождеству

$$f * \delta = \delta * f = f.$$



Достаточные условия существования свёртки обобщённых функций

- Одна из функций финитна
- $n = 1$: Обе функции обращаются в нуль при $t < 0$ (в этом случае можно доказать ассоциативность операции свертки).

Задачи

- 1 Вычислить свёртки: $H(t) * \delta'(t)$, $H(t) * H(t)$, $H(t) * H(-t)$.
- 2 Упростить выражение $\sin t \cdot \delta\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right)$.
- 3 Вычислить $|\sin t|'' + |\sin t|$.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE**
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)



И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев.

Обобщенные функции и действия над ними.

М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.



В.С. Владимиров.

Обобщенные функции в математической физике.

М., Наука, 1976.

Обобщенное решение линейных ODE/PDE с постоянными коэффициентами

$$\square \quad L(D)u(\mathbf{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad f \in \mathcal{D}'$$

— линейное ODE/PDE порядка n с постоянными коэффициентами.

Определение

Обобщенным решением в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т.е. для любой $\phi \in \mathcal{D}$:

$$(L(D)u, \phi) = (f, \phi)$$

\Leftrightarrow

$$\left(u, \sum_{|\alpha|=0}^n (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \phi) \right) = (f, \phi)$$

Всякое классическое решение является и обобщенным решением. Всякое гладкое обобщенное решение является классическим решением.

Лемма

$\phi_0 \in \mathcal{D}$ может быть представлена как $\phi_0 = \dot{\phi}_1$, $\phi_1 \in \mathcal{D} \iff \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0$.

Доказательство.

$\square \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0$: $\phi_1(t) = \int_{-\infty}^t \phi_0(\tau) d\tau \in \mathcal{D}$

$\square \phi_0 = \dot{\phi}_1$: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = \phi_1(t)|_{-\infty}^{\infty} = 0$. □

ODE $\dot{u} = 0$

Теорема

Общее решение уравнения $\dot{u} = 0$ в классе обобщенных функций — $u = C = \text{const}$.

Доказательство.

$\dot{u} = 0 \iff (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = 0$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$$\square \phi_1 \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) dt = 1.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + \phi_0(t), \text{ где } \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0 \implies$$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} C \phi(t) dt$$



Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Определение

Первообразной (или неопределенным интегралом) от обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{D}'$

$$u = \int f dt$$

называется решение ОДУ

$$\dot{u} = f(t).$$

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Теорема

Любая обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{D}'$ имеет единственную с точностью до аддитивной постоянной первообразную.

Доказательство.

$\dot{u} = f \iff \forall \phi \quad (u, \dot{\phi}) = (u, -\dot{\phi}) = (f, \phi)$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$$\square \phi_1 \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) dt = 1.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + \phi_0(t), \text{ где } \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0, \implies$$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + (u, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C \phi(t) dt - \left(f, \int_{-\infty}^t \phi_0(\tau) d\tau \right).$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f \\ \dot{u}_2 = f \end{cases} \implies (u_1 - u_2)' = 0 \implies u_1 - u_2 = \text{const}$$



Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Определение

Фундаментальным решением $\Phi(t)$ (функцией Грина, функцией влияния) оператора $L\left(\frac{d}{dt}\right)$ (или ODE $L\left(\frac{d}{dt}\right)u = f$) называется обобщенное решение ODE

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t).$$

Фундаментальное решение очевидно не единственно. Если $\Phi_1(t)$ — фундаментальное решение, то $\Phi_1 + \Phi_0$, где

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi_0 = 0$$

также является фундаментальным решением.

При рассмотрении задач Коши для ODE и гиперболических / параболических PDE нас будут интересовать фундаментальные решения, обладающие свойством $\Phi|_{t < 0} \equiv 0$.

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

□ $n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = U(0)\delta(t) + \dot{U}(t)H(t),$$

$$\ddot{\Phi}(t) = U(0)\dot{\delta}(t) + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

⇒ $L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. □

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

□ $n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = \underline{U(0)\delta(t)} + \dot{U}(t)H(t),$$

$$\ddot{\Phi}(t) = \underline{U(0)\dot{\delta}(t)} + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

$\implies L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. □

Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Пример 1

Фундаментальным решением оператора $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$ является функция

$$\Phi(t) = H(t) \frac{\sin at}{a}.$$

Пример 2

Фундаментальным решением оператора $\frac{d}{dt} + a$ является функция

$$\Phi(t) = H(t) \exp(-at).$$

Обобщенное решение неоднородного линейного ODE с постоянными коэффициентами

Теорема

Пусть $f \in \mathcal{D}'$ такова, что свертка $\Phi * f$ существует в \mathcal{D}' . Тогда решение уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u = f(t)$$

существует в \mathcal{D}' и дается формулой $u = \Phi * f$.

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из \mathcal{D}' для которых существует свертка с Φ .

Доказательство.

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)(\Phi * f) = \left(L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi\right) * f = \delta * f = f.$$

Для доказательства единственности этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение $L\left(\frac{d}{dt}\right)\hat{u} = 0$ имеет только нулевое решение. Это так:

$$\hat{u} = \hat{u} * \delta = \hat{u} * L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = L\left(\frac{d}{dt}\right)\hat{u} * \Phi = 0.$$



Обобщенная задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: идея

Задача

$u(t) = u_*(t)H(t)$, $u_* \in C^2$. Вычислить \dot{u} , \ddot{u} .

$$\dot{u} = u_*(0)\delta(t) + \dot{u}_*(t)H(t),$$

$$\ddot{u} = u_*(0)\dot{\delta}(t) + \dot{u}_*(0)\delta(t) + \ddot{u}_*(t)H(t).$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\ddot{u}_* + \omega^2 u_* = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dot{u}_*(0) = u_1.$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_* + \omega^2 u_* &= f_*(t), \\ u_*(0) &= u_0, \quad \dot{u}_*(0) = u_1. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega^2 u &= f(t), \\ f(t) &= f_*(t)H(t) + u_0 \dot{\delta}(t) + u_1 \delta(t), \\ u|_{t < 0} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_* .

Решение задачи Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: интеграл Дюамеля

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t) + u_0 \dot{\delta}(t) + u_1 \delta(t), \quad f_*|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами существует (поскольку при $n = 1$ существует свёртка любых двух обобщенных функций, тождественно равных нулю при $t < 0$), единственно и выражается формулой:

$$u = \Phi * f.$$

В частности, в случае гладкой функции f_* решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) f_*(\tau) d\tau + u_0 \cos \omega t + u_1 \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

Задача Коши для линейного ODE с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$u_*^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_*^{(k)} \equiv L\left(\frac{d}{dt}\right)u_*(t) = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dots, \quad u_*^{(n-1)}(0) = u_{n-1}.$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t)H(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0,$$

$$c_{n-1} = u_0, \quad c_{n-2} = a_{n-1}u_0 + u_1, \quad \dots, \quad c_0 = a_1u_0 + \dots + a_{n-1}u_{n-2} + u_{n-1}.$$

- 1 Сформулировать обобщенную задачу Коши, соответствующую классической задаче Коши для уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\eta\dot{u} + \omega^2 u &= f(t), \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \end{aligned}$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи**
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

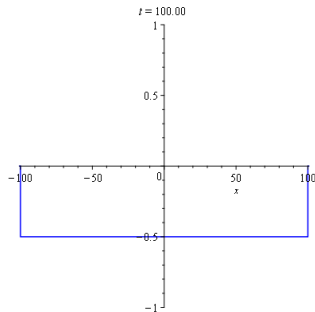
Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$.



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0$:

$$\dot{\Psi}_1 = \dots,$$

$$\Psi'_1 = \dots.$$



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$.

Доказательство.

 $t > 0$:

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\left(\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right),$$

$$\Psi_1' = -\frac{1}{2}\left(-\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0$:

$$\ddot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\left(\dot{\delta}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \dot{\delta}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right),$$

$$\Psi_1'' = -\frac{1}{2c}\left(\dot{\delta}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \dot{\delta}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t \rightarrow +0$:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) \rightarrow 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\left(\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \rightarrow -c^2\delta(x).$$



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство

$$\begin{aligned}
(\Psi_1'' - c^{-2}\ddot{\Psi}_1, \phi) &= (\Psi_1, \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = -\frac{c}{2}(H(ct - |x|), \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = \\
&= -\frac{c}{2} \iint (\phi'' - c^{-2}\ddot{\phi})H(ct - |x|) dx dt = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty \int_{-ct}^{ct} \phi'' dx dt + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \int_{|x|/c}^\infty \ddot{\phi} dt dx = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \dot{\phi}\left(x, \frac{|x|}{c}\right) dx = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2c} \int_0^\infty \dot{\phi}\left(x, \frac{|x|}{c}\right) dx - \frac{1}{2c} \int_0^\infty \dot{\phi}\left(-x, \frac{|x|}{c}\right) dx =
\end{aligned}$$

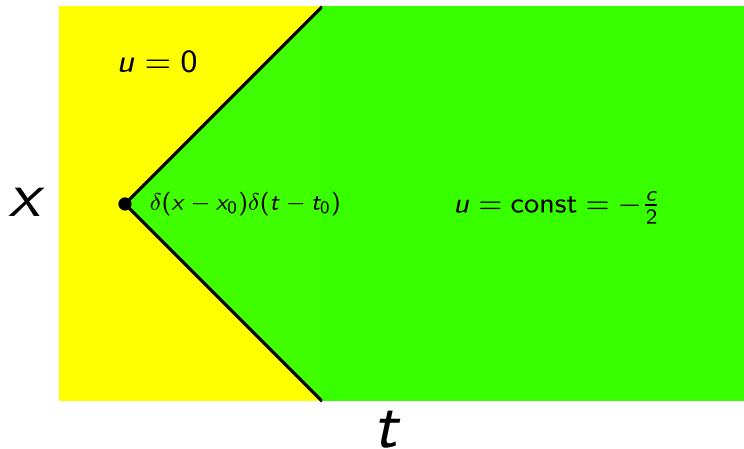
Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} \dot{\phi}\left(t, \frac{t}{c}\right) dt - \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} \dot{\phi}\left(-t, \frac{t}{c}\right) dt = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\phi}(ct, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\phi}(-ct, t) dt = \\
&\quad = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{d\phi(ct, t)}{dt} + \frac{d\phi(-ct, t)}{dt} \right) dt = \\
&\quad = \frac{1}{2} \phi(0, 0) + \frac{1}{2} \phi(0, 0) = (\delta, \phi)
\end{aligned}$$

□

Свойства фундаментального решения: область влияния — характеристический (световой) конус будущего



Классическая и обобщенная задача Коши

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Классическая и обобщенная задача Коши

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x, t) = u_*(x, t)H(t)$:

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = f(x, t),$$

$$f(x, t) = f_*(t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_* .

Обобщенная задача Коши

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x, t) = u_*(x, t)H(t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f(x, t),$$

$$f(x, t) = f_*(x, t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения существует, единственно и выражается в виде *запаздывающего потенциала*:

$$u = \Psi_1 * f.$$

(поскольку существует свёртка двух функций равных нулю в области $t < 0$, таких что при $t > 0$ одно из них имеет носитель внутри светового конуса).

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Задача

Получить формулу Даламбера

$$u = -\frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi, \tau) d\xi d\tau - \frac{c}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi - \frac{c^2}{2} (u_0(x+ct) + u_0(x-ct)).$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Решение

$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

$$f_* H(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau) f_*(\xi, \tau) H(t - \tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi = -\frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c} > 0 \iff |x - \xi| < c(t - \tau) \iff \begin{cases} x > \xi > x - c(t - \tau) \\ x < \xi < x + c(t - \tau) \end{cases}$$

$$\iff_{t-\tau>0} x - c(t - \tau) < \xi < x + c(t - \tau)$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Решение

$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

$$u_1(x) \delta(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) \delta(\tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi =$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) H\left(t - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\xi = -\frac{c}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi$$

$$t - \frac{|x - \xi|}{c} > 0 \iff |x - \xi| < ct \iff \begin{cases} x > \xi > x - ct \\ x < \xi < x + ct \end{cases}$$

$$\stackrel{t > 0}{\iff} x - ct < \xi < x + ct$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Решение

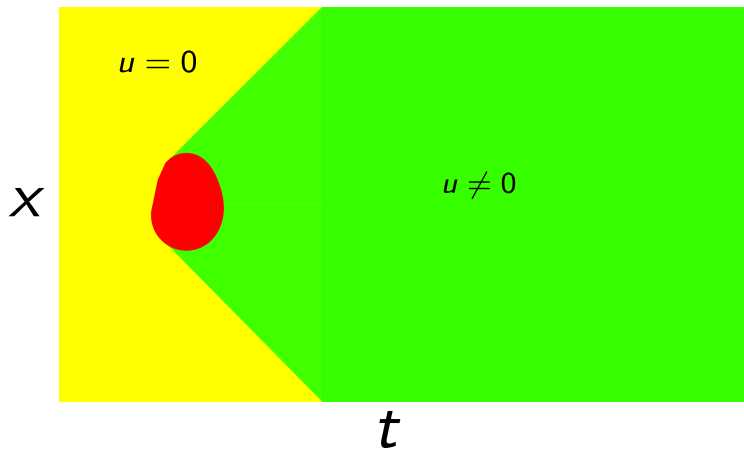
$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

$$u_0(x) \dot{\delta}(t) * \Psi_1 =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{c}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \dot{\delta}(\tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi = -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta\left(t - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\xi = \\ &= -\frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta(ct - |x - \xi|) d\xi = -\frac{c^2}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) \end{aligned}$$

$$|x - \xi| = ct \iff \begin{cases} x > \xi = x - ct \\ x < \xi = x + ct \end{cases} \stackrel{t > 0}{\iff} \begin{cases} \xi = x - ct \\ \xi = x + ct \end{cases}$$

Свойства запаздывающего потенциала: характеристический (световой) конус будущего



Одномерное волновое уравнение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.

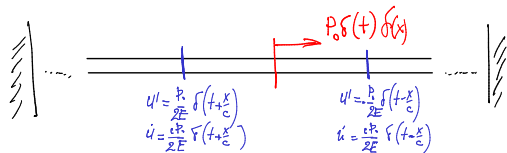
Решение Даламбера: $u = \overbrace{\Psi_+(x+ct)}^{\text{волна}} + \underbrace{\Psi_-(x-ct)}_{\text{фаза: } \phi_{\pm}}$,

Ψ_{\pm} — произвольные функции.

Фундаментальное решение:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

Бесконечный стержень под действием сосредоточенной продольной импульсной нагрузки



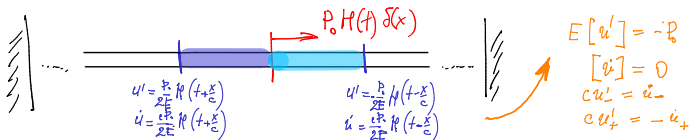
$$ES u'' - \rho \delta \dot{u} = - \rho P_0 \delta(x) \delta(t) \Rightarrow u'' - \frac{1}{c^2} \dot{u} = - \frac{P_0}{E} \delta(x) \delta(t)$$

$$\Rightarrow_{u|_{t=0}=0} u = \frac{P_0 c}{2E} \left(H(x) H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) H\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

$$\dot{u} = \frac{P_0}{2E} \left(-H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

$$\dot{u} = \frac{P_0 c}{2E} \left(H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



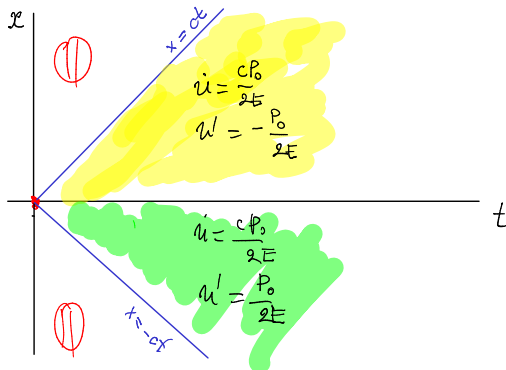
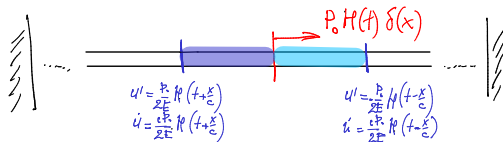
$$E \delta u'' - \rho \delta \dot{u}' = - \delta P_0 \delta(x) H(t) \implies u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -\frac{P_0}{E} \delta(x) H(t)$$

$$\begin{aligned} \implies u|_{H=0} &= \int_0^t \frac{P_0 c}{2E} (H(x) H(\tau - \frac{x}{c}) + H(-x) H(\tau + \frac{x}{c})) d\tau = \\ &= \frac{P_0 c}{2E} (H(x) \Theta(t - \frac{x}{c}) + H(-x) \Theta(t + \frac{x}{c})), \quad \Theta(t) = \int_0^t H(\tau) d\tau \end{aligned}$$

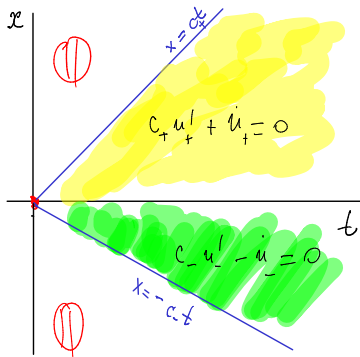
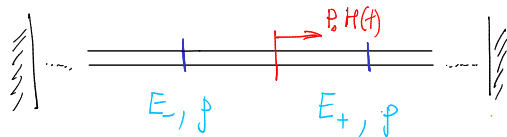
$$\dot{u} = \frac{P_0 c}{2E} (H(x) H(t - \frac{x}{c}) + H(-x) H(t + \frac{x}{c}))$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{P_0}{2E} \left\{ H(x) \left(\int_0^t H(\tau - \frac{x}{c}) d\tau \right)'_x + H(-x) \left(\int_0^t H(\tau + \frac{x}{c}) d\tau \right)'_x \right\} = \\ &= \frac{P_0}{2E} (-H(x) H(t - \frac{x}{c}) + H(-x) H(t + \frac{x}{c})) \end{aligned}$$

Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



Составной стержень



Баланс сил:

$$[Eu'] \equiv \rho [c^2 u'] = -P_0$$

Непрерывность:

$$[u] = 0$$

Составной стержень

$$\int_0^1 (c_+^2 u_+' - c_-^2 u_-') = -P_0$$

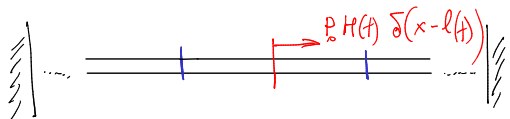
$$u_+ - u_- = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} c_+ u_+' + u_+ = 0 \\ c_- u_-' - u_- = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\oplus} c_+ u_+' + c_- u_-' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_+^2 u_+' + c_+ c_- u_-' = 0 \Rightarrow c_+ c_- u_-' + c_-^2 u_-' = \frac{P_0}{\int_0^1}$$

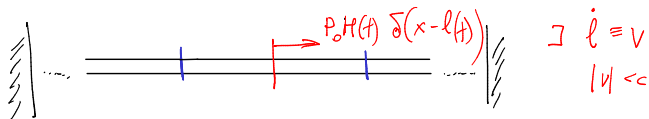
$$\Rightarrow u_{\pm}' = \mp \frac{P_0}{\int_0^1 c_{\pm} (c_+ + c_-)}$$

Подвижная нагрузка: условия Гюгонио



$$\begin{aligned}
 [u] &= 0 \\
 -P_0 &= E [u'] + \rho l [\dot{u}] \quad \Rightarrow \quad [u] + l [\dot{u}] = 0 \\
 -P_0 &= \rho_1 (c^2 - l'^2) [u']
 \end{aligned}$$

Подвижная нагрузка: докритический случай



$$[u] = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho l [\dot{u}] \Rightarrow$$

$$[\dot{u}] + l [u''] = 0$$

$$-P_0 = \rho_0 (c^2 - l'^2) [u']$$

$$c u'_+ + \dot{u}_+ = 0$$

$$c u'_- - \dot{u}_- = 0$$

$$\Rightarrow [\dot{u}] + c u'_+ + c u'_- = 0 \Rightarrow c u'_+ + c u'_- - l [u'] = 0$$

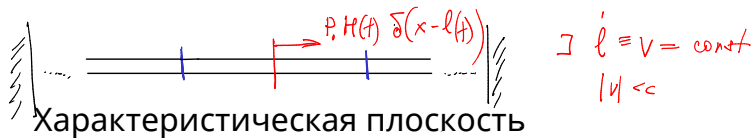
$$\Rightarrow (c - l) u'_+ + (c + l) u'_- = 0 \Rightarrow$$

$$(c - l)^2 u'_+ + (c^2 - l^2) u'_- = 0$$

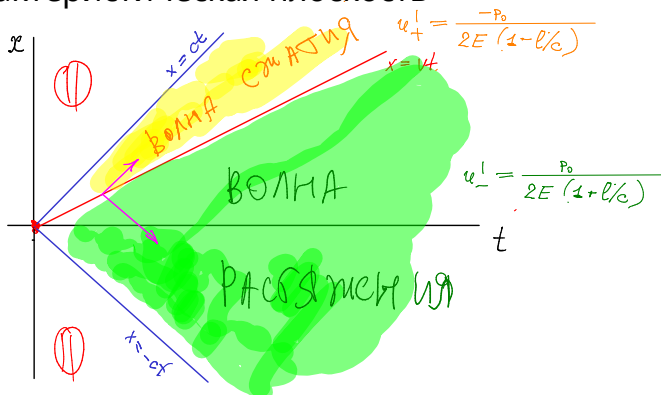
$$-P_0 = \rho_0 (c^2 - l'^2) u'_+ + \rho_0 (c - l)^2 u'_+ \Rightarrow$$

$$u'_\pm = \frac{\mp P_0}{2E (1 \mp l/c)}$$

Подвижная нагрузка: докритический случай

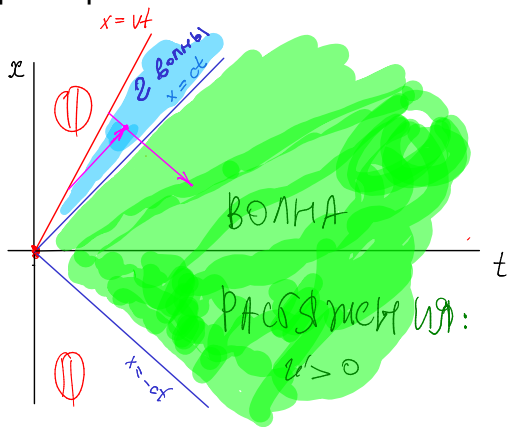


$\exists \dot{l} \equiv v = \text{const}$
 $|v| < c$

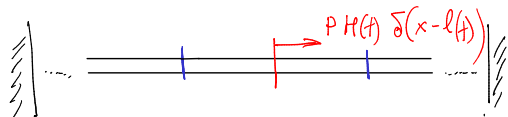


Подвижная нагрузка: закритический случай

Характеристическая плоскость



Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho l [\dot{u}]$$

В зоне сжатия:

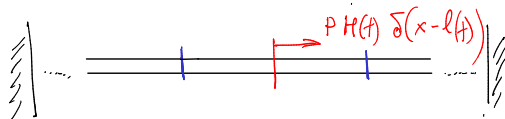
$$u'_- = \frac{-P_0}{E (e^{2/c^2} - 1)}$$

$$\dot{u}_- = \frac{P_0 l}{E (e^{2/c^2} - 1)}$$

$$u = u_z(x+ct) + u_p(x-ct)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{u}_- + l u'_- &= 0 \\ P_0 &= \rho (c^2 - l^2) u'_- \end{aligned}$$

Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0 \Rightarrow u_- + l u'_- = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho_0 l [\dot{u}] \Rightarrow P_0 = \rho_0 (c^2 - l^2) u'_-$$

В зоне растяжения: $u = u_L(x+ct) \rightarrow u' = u'_L, \dot{u} = cu'_L$

$$u'_- = u'_R + u'_L; \dot{u}_- = -cu'_R + cu'_L \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} u'_R + u'_L &= \frac{-P_0}{E(l^2/c^2 - 1)} \\ -cu'_R + cu'_L &= \frac{P_0 l}{cE(l^2/c^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u'_L = \frac{P_0}{2E(l^2/c^2 - 1)} \left(-1 + \frac{l}{c} \right) = \frac{P_0}{2E(1 + l/c)}$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

Получить выражения для деформаций u' в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке, движущейся по произвольному закону, как свертку фундаментального решения Ψ_1 с функцией нагрузки:

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

 \Rightarrow

$$u = \frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau)P(\tau)\delta(\xi - \ell(\tau))H(t - \tau)H(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}) d\tau d\xi =$$

$$= \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau)H(t - \tau - \frac{|x - \ell(\tau)|}{c}) d\tau$$

 \Rightarrow

$$u' = \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau) \frac{\partial}{\partial x} H(t - \tau - \frac{|x - \ell(\tau)|}{c}) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t P(\tau)H(x - \ell(\tau))\delta(t - \tau - \frac{x - \ell(\tau)}{c}) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t P(\tau)H(\ell(\tau) - x)\delta(t - \tau + \frac{x - \ell(\tau)}{c}) d\tau$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u' = -\frac{1}{2} \int_0^t P(\tau) H(x - \ell(\tau)) \delta\left(t - \tau - \frac{x - \ell(\tau)}{c}\right) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t P(\tau) H(\ell(\tau) - x) \delta\left(t - \tau + \frac{x - \ell(\tau)}{c}\right) d\tau = \sum_i u'_i$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i), \quad \text{где } f(t_i) = 0.$$

$$u' = \frac{1}{2} \left(- \sum_{t'_i \in \mathcal{J}_+} \frac{P(t'_i)}{\left|1 - \frac{\dot{\ell}(t'_i)}{c}\right|} + \sum_{t'_i \in \mathcal{J}_-} \frac{P(t'_i)}{\left|1 + \frac{\dot{\ell}(t'_i)}{c}\right|} \right)$$

u' представляет собой сумму вкладов от множества точек $\mathcal{J} = \{t'_i\}$ в промежутке интегрирования таких, что

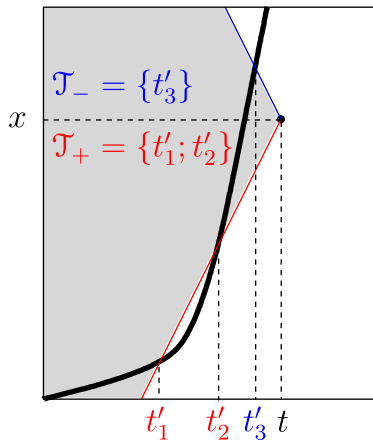
$$t - t'_i - \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = 0$$

При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{J}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$ и $\mathcal{J}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$.

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

- При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{T}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$ и $\mathcal{T}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$.
- Наличие точки t'_i такой, что $x - \ell(t'_i) = 0$, свидетельствует о том, что рассматриваемая точка $(t; x)$ находится под нагрузкой. В этом случае производная u' разрывна, и говорить имеет смысл лишь о пределах производной слева и справа.
- При фиксированных x и t множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+$ будет конечным, если принять ограничение: $\ell(t)$ — кусочно-монотонная функция, такая что $|\dot{\ell}| = c$ лишь в конечном числе точек.

$$t'_i + \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = t$$



Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

Выписать аналогичную формулу для скоростей \dot{u} .

Задача

Получить выражения для деформаций в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке постоянной интенсивности, движущейся с постоянной докритической и закритической скоростью, с помощью полученной выше формулы.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгоню, энтропийный критерий Дафермоса**
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

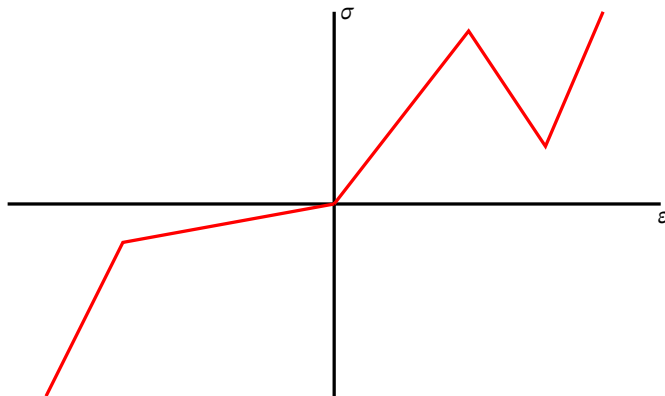
Пример механической системы, для которой характерно распространение фронтов разрывов деформаций: продольные движения стержня из полилинейного материала

Баланс количества движения: $T' - \rho_0 S \ddot{u} = f$.

Выражение для силы: $T = S\sigma$.

Определяющее уравнение для напряжения: $\sigma = \sigma_i + E_i u'$, $\varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_i$

Внутренняя энергия: $W = \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$.



Условия Гюгонио на разрыве

Непрерывность:

$$[u(\ell(t), t)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad [\dot{u} + \ell u'] = 0$$

Баланс количества движения:

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}]$$

Баланс энергии на разрыве

$$[\dot{u} + \dot{\ell}u'] = 0, \quad (1)$$

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \quad (2)$$

Вычислим диссипацию энергии на разрыве:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [\sigma \dot{u}] + \dot{\ell} [E] \stackrel{[\alpha\beta] \equiv \langle \alpha \rangle [\beta] + \langle \beta \rangle [\alpha]}{=} \\ &= \langle \sigma \rangle [\dot{u}] + [\sigma] \langle \dot{u} \rangle + \dot{\ell} [W] + \rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \langle \dot{u} \rangle = \\ &\stackrel{(1)}{=} -\dot{\ell} \langle \sigma \rangle [u'] + [\sigma] \langle \dot{u} \rangle + \dot{\ell} [W] + \rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \langle \dot{u} \rangle \stackrel{(2)}{=} -\dot{\ell} (-[W] + \langle \sigma \rangle [u']) = \\ &= -\mathcal{F} \dot{\ell} \geq 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}S$ — конфигурационная сила.

$$[\alpha] = \alpha(\ell + 0) - \alpha(\ell - 0), \quad \langle \alpha \rangle = (\alpha\ell(\ell + 0) + \alpha(\ell - 0))/2.$$

Энтропийный критерий Дафермоса

$$\mathcal{D} = -\mathcal{F}\dot{\ell} \geq 0,$$

$$\mathcal{F} = -[W] + \langle \sigma \rangle [u']$$

- Критерий позволяет отбирать термодинамически допустимые решения.
- В статике $[\sigma] = 0 \implies \langle \sigma \rangle = \sigma \implies \mathcal{F} = [\mathcal{E}]$. Здесь $\mathcal{E} = -W + \sigma u'$ — одномерный аналог тензора Эшелби.
- Для термомеханических систем, где определены температура и энтропия, критерий получается рассмотрением УДН на скачке с учетом баланса энергии и условий Гюгонио.



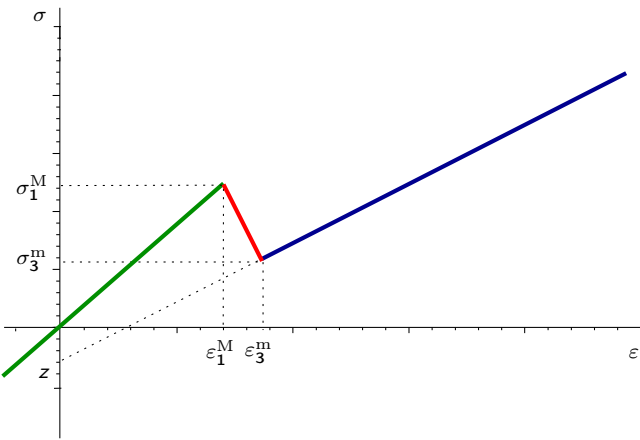
Dafermos C.M.

The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws
[Journal of Differential Equations. 1973. Vol. 14\(2\) P. 202–212.](#)

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала**
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

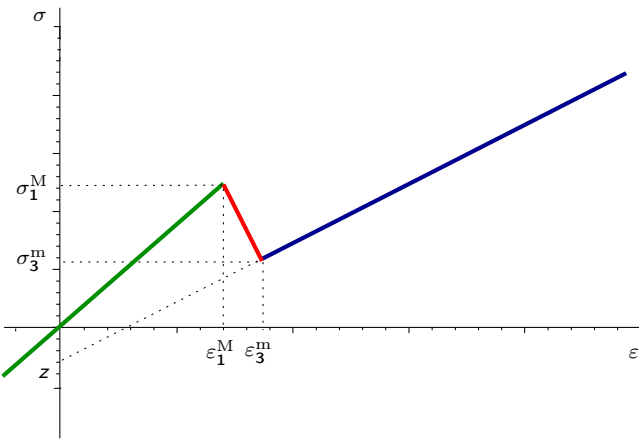
Трилинейная диаграмма растяжения-сжатия

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_1\varepsilon, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^M; \\ -E_2\varepsilon + \varepsilon_1^M(E_1 + E_2), & \varepsilon_1^M < \varepsilon \leq \varepsilon_3^m; \\ E_3\varepsilon + z, & \varepsilon > \varepsilon_3^m. \end{cases}$$



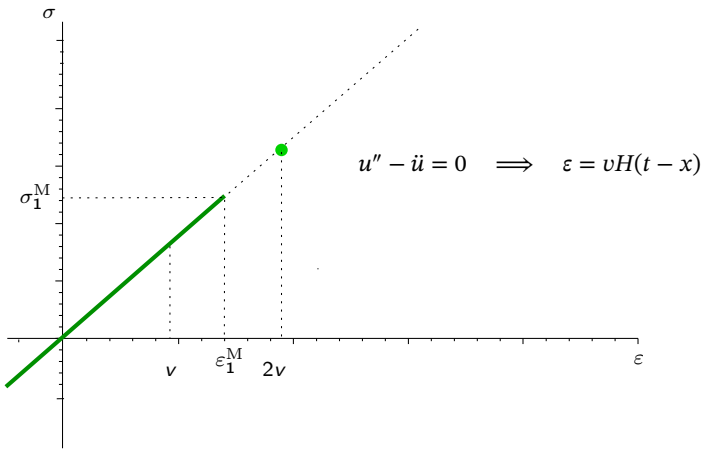
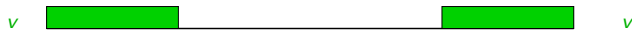
Формулировка в безразмерном виде

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^M; \\ -c_2^2 \varepsilon + \varepsilon_1^M (1 + c_2^2), & \varepsilon_1^M < \varepsilon \leq \varepsilon_3^m; \\ c_3^2 \varepsilon + z, & \varepsilon > \varepsilon_3^m. \end{cases}$$

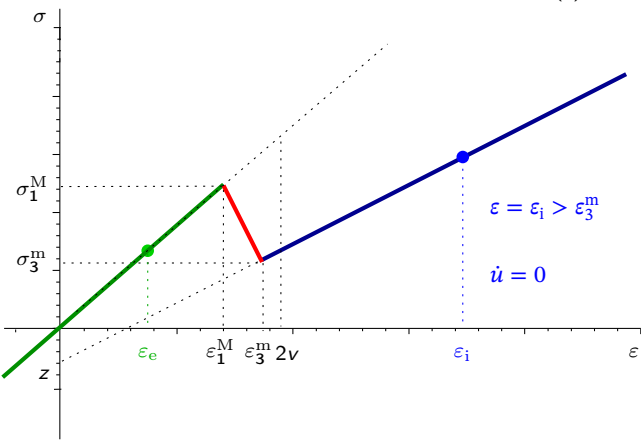
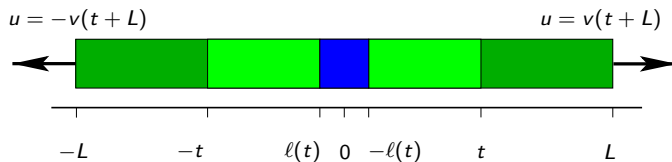


Решение до столкновения волн ($-L < t < 0$)

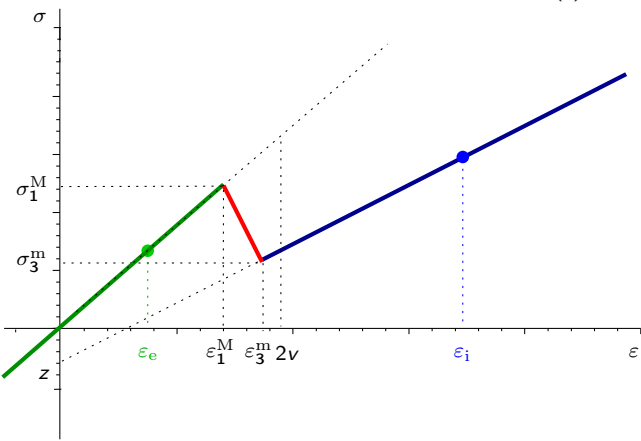
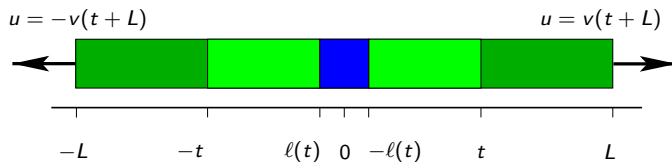
Распределение деформаций вдоль стержня:



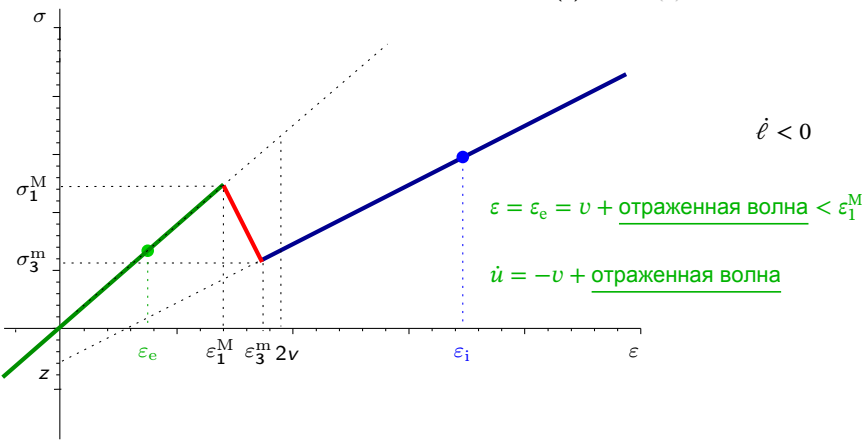
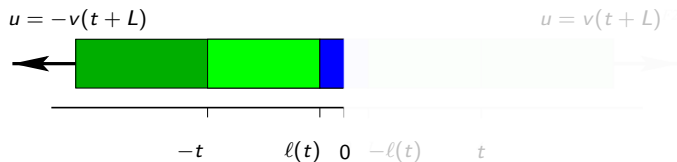
Решение после столкновения волн ($0 < t < L$)



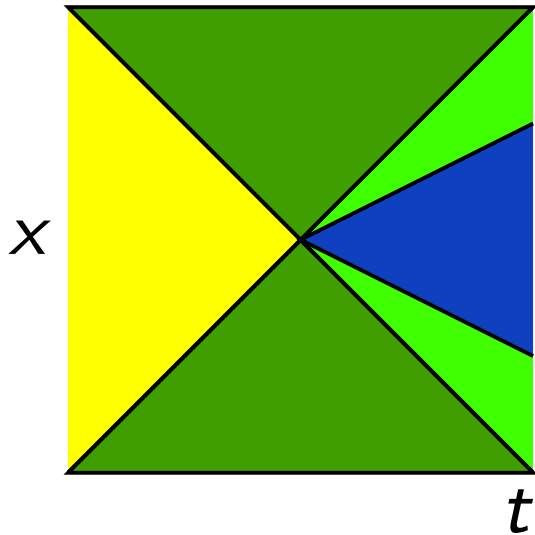
Решение после столкновения волн ($0 < t < L$)



Задача симметрична (рассматриваем $x < 0$)



Характеристическая плоскость



Деформации на фазовой границе

$$[\dot{u} + \dot{\ell}u'] = 0,$$

$$[\sigma] = -\dot{\ell}[\dot{u}]$$

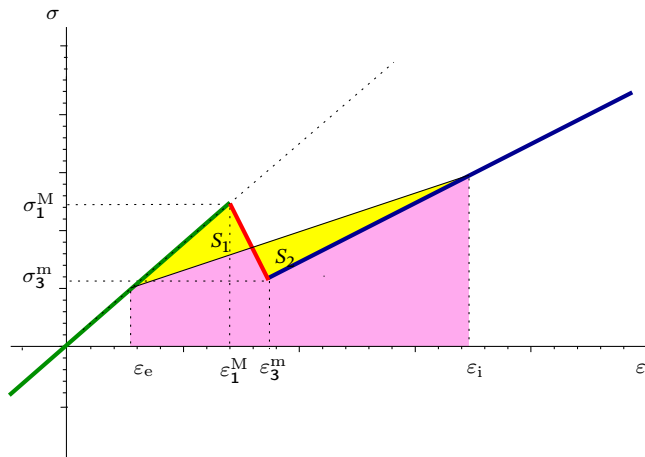
\Rightarrow

$$\varepsilon_e = \frac{2v(c_1^2 - \dot{\ell}^2) - \dot{\ell}z}{(1 + \dot{\ell})(-\dot{\ell} + c_1^2)},$$

$$\varepsilon_i = \frac{2v(1 - \dot{\ell}) - z}{-\dot{\ell} + c_1^2},$$

Энтропийный критерий Дафермоса

$$D = -\mathcal{F}\dot{\ell} \geq 0 \implies \mathcal{F} = \langle \sigma \rangle [u'] - [W] \geq 0$$



$\mathcal{F} = 0$ — критерий консервативности $\iff S_2 = S_1$ (правило Максвелла)

$S_2 > S_1$ — критерий диссипативности (для данной задачи!)

Термодинамическое граничное условие на фазовой границе

- Решения задач (даже статических) для материалов с невыпуклой энергией деформации, вообще говоря, неединственно.
- В данном случае выражение для деформаций на фазовой границе содержат неизвестный параметр — скорость фазовой границы $\dot{\ell}$.
- Скорость фазовой границы $\dot{\ell}$ можно определить, задав определяющее уравнение

$$\mathcal{F} = -\mathcal{F}_0(\gamma, \dot{\ell}) \operatorname{sign} \dot{\ell},$$

Здесь $\mathcal{F}_0(\gamma, \dot{\ell}) \geq 0$ — заданная функция, γ — некоторая материальная константа (или их набор).

Автоподобность задачи

- Несложно доказать от противного, что задача автоподобна ($\dot{\ell} = \text{const}$, ε и \dot{u} зависят только от x/t), поэтому в любом движении $\mathcal{F}_0 = F = \text{const}$.
- Поэтому, без ограничения общности, вместо задачи с заданным $\mathcal{F}_0(\gamma, \dot{\ell})$, будем рассматривать однопараметрическое семейство задач с различными $F \geq 0$.
- Если в результате необходимо найти решение, которое соответствует заданной функции $\mathcal{F}_0(\gamma, V)$, то необходимо разрешить уравнение

$$\mathcal{F}_0(\gamma, \dot{\ell}) = F$$

по отношению к γ .

Алгебраическое уравнение для скорости ФГ

$$\mathcal{F}_0 = F \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c_1^2 - 1) \frac{2v(1 - \dot{\ell}) - z}{-\dot{\ell} + c_1^2} \cdot \frac{2v(c_1^2 - \dot{\ell}^2) - \dot{\ell}z}{(1 + \dot{\ell})(-\dot{\ell} + c_1^2)} + z \left(\frac{2v(1 - \dot{\ell}) - z}{-\dot{\ell} + c_1^2} + \frac{2v(c_1^2 - \dot{\ell}^2) - \dot{\ell}z}{(1 + \dot{\ell})(-\dot{\ell} + c_1^2)} \right) + 2(\alpha + F) = 0$$

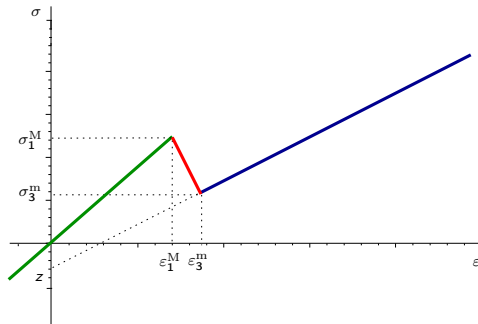
\Leftrightarrow кубическое уравнение для $\dot{\ell}$.

Ограничения в виде неравенств

Дано: $v < \varepsilon_1^M$, $2v > \varepsilon_1^M$.

Разыскивается область существования решения кубического уравнения для $\dot{\ell}$, которое удовлетворяет ограничениям в форме неравенств

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\dot{\ell}) &> \varepsilon_3^m, & \varepsilon_e(\dot{\ell}) &< \varepsilon_1^M, \\ \varepsilon_e(\dot{\ell}) &> -1, \\ \dot{\ell} &< 0, & \dot{\ell} &> -1, & -\dot{\ell} &< c_3. \end{aligned}$$

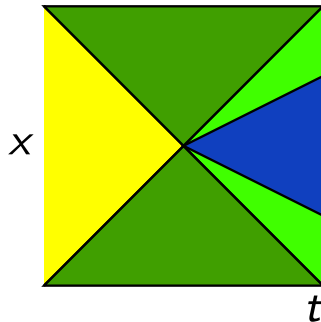


Ограничения в виде неравенств

Дано: $v < \varepsilon_1^M$, $2v > \varepsilon_1^M$.

Разыскивается область существования решения кубического уравнения для $\dot{\ell}$, которое удовлетворяет ограничениям в форме неравенств

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\dot{\ell}) &> \varepsilon_3^m, & \varepsilon_e(\dot{\ell}) &< \varepsilon_1^M, \\ \varepsilon_e(\dot{\ell}) &> -1, \\ \dot{\ell} &< 0, & \dot{\ell} &> -1, & -\dot{\ell} &< c_3. \end{aligned}$$

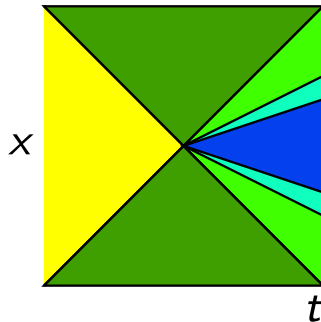


Ограничения в виде неравенств

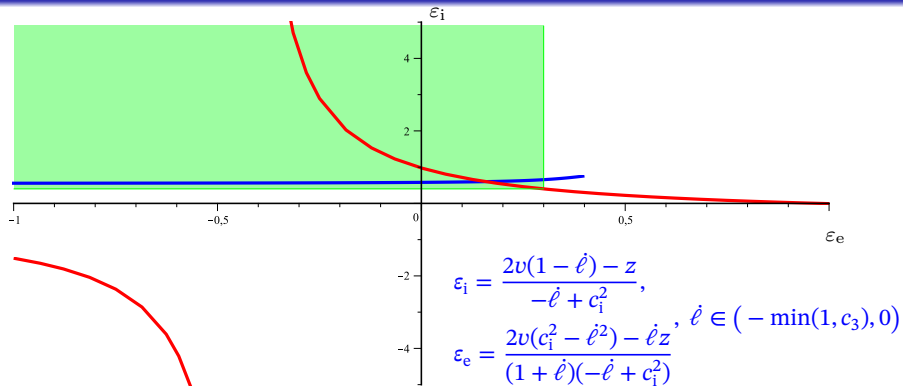
Дано: $v < \varepsilon_1^M$, $2v > \varepsilon_1^M$.

Разыскивается область существования решения кубического уравнения для $\dot{\ell}$, которое удовлетворяет ограничениям в форме неравенств

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\dot{\ell}) &> \varepsilon_3^m, & \varepsilon_e(\dot{\ell}) &< \varepsilon_1^M, \\ \varepsilon_e(\dot{\ell}) &> -1, \\ \dot{\ell} &< 0, & \dot{\ell} &> -1, & -\dot{\ell} &< c_3. \end{aligned}$$



Графическое решение задачи



$$\mathcal{F}_0 = F \iff \varepsilon_i = -\frac{z\varepsilon_e + 2(\alpha + F)}{(c_1^2 - 1)\varepsilon_e + z}.$$

Выражение для точного решения ($0 < t < L$, $x < 0$)

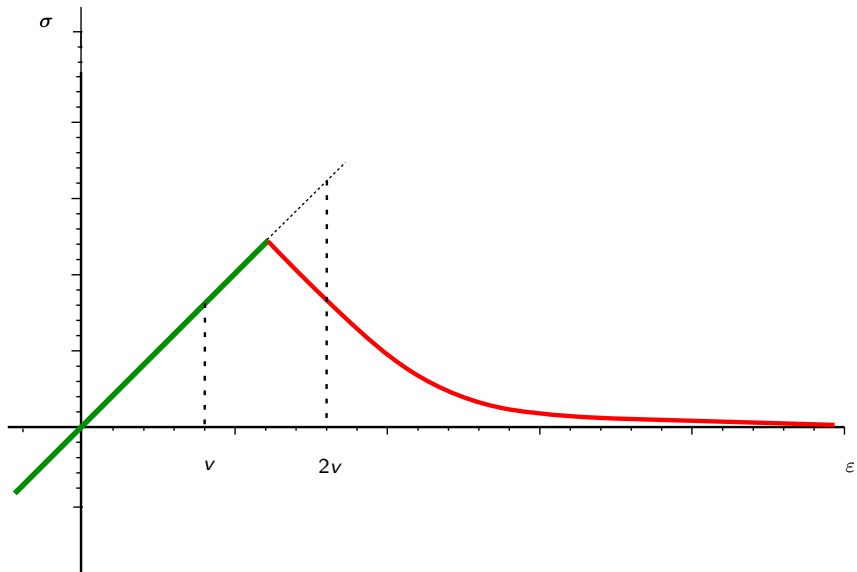
$$u = (v(x - t) + (\varepsilon_e(\dot{\ell}) - v)\theta(x + t))H(\dot{\ell}t - x) + \varepsilon_i(\dot{\ell})xH(x - \dot{\ell}t),$$

$$\varepsilon = (v + (\varepsilon_e(\dot{\ell}) - v)H(x + t))H(\dot{\ell}t - x) + \varepsilon_i(\dot{\ell})H(x - \dot{\ell}t),$$

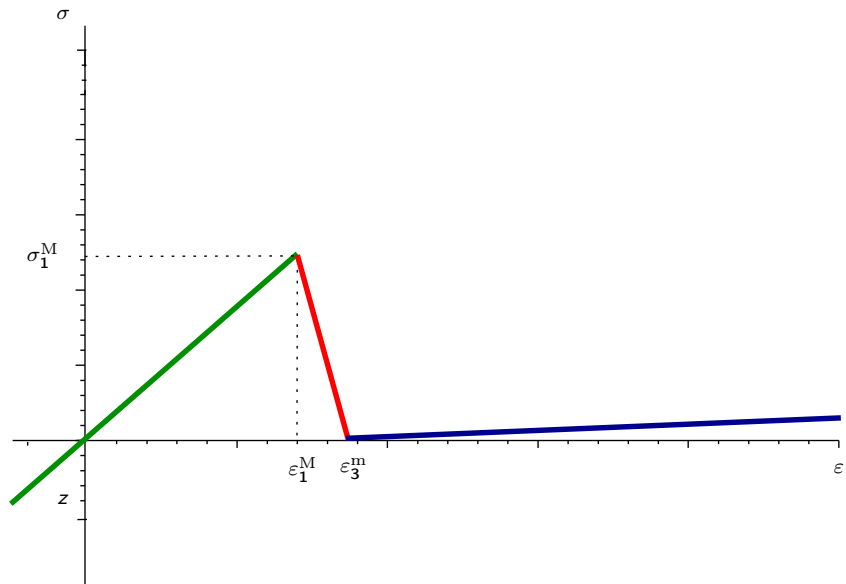
$$\dot{u} = (-v + (\varepsilon_e(\dot{\ell}) - v)H(x + t))H(\dot{\ell}t - x).$$

Here $\theta(t) \equiv tH(t)$.

Пример: стержень с деформационным разупрочнением



Пример: стержень с деформационным разупрочнением



Стержень с деформационным разупрочнением: асимптотическое решение


$$c_3 = \epsilon > 0 \implies$$

Решение, удовлетворяющее всем ограничениям существует и выражается формулами

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= -\epsilon \frac{v}{\sqrt{v^2 + \alpha_0/2}} + o(\epsilon), \\ \epsilon_i &= 2\epsilon^{-1} \sqrt{v^2 + \alpha_0/2} + O(1), \\ \epsilon_e &= \frac{\epsilon \alpha_0}{\sqrt{v^2 + \alpha_0/2}} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_0 = \frac{(\epsilon_3^m)^2}{2} c_2^2 - \frac{(\epsilon_1^M)^2}{2} (1 + c_2^2) + F \geq 0$.

Стержень с деформационным разупрочнением: литература

-  Z. Bažant and T. Belytschko. Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution. *J. Eng. Mech.*, **111(3)**, 381-389 (1985).
-  S.N. Gavrilov, E.V. Shishkina, A strain-softening bar revisited. *Z. Angew. Math. Mech.* (2015), 95(12): 1521–1529.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье**
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Пространство основных функций \mathcal{S}

Определение

Множество основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — все функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ убывающие при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|\mathbf{x}|^{-1}$.

Определение

Последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, \dots из \mathcal{S} сходится к функции $\phi \in \mathcal{S}$ ($\phi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x})$), если $\forall \alpha, \beta$

$$\mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi_k(\mathbf{x}) \rightrightarrows \mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi(\mathbf{x})$$

Здесь α, β — мультииндексы,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Пространство основных функций \mathcal{S}

- \mathcal{S} — линейное пространство.
- Из сходимости в \mathcal{D} следует сходимость в \mathcal{S} .
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.
- \mathcal{S} не совпадает с \mathcal{D} (e.g. $\exp(-x^2)$).
- Операции дифференцирования и линейной неособенной замены переменных непрерывны из \mathcal{S} в \mathcal{S} .
- Умножение на произвольную $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ может вывести за пределы \mathcal{S} (e.g. $\exp(x^2)$).
- $\square a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ растет не быстрее полинома:

$$|D^\alpha \phi(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|)^{m_\alpha}.$$

Операция умножения на такую $a(\mathbf{x})$ непрерывна из \mathcal{S} в \mathcal{S} .

Обобщенные функции медленного роста \mathcal{S}'

Определение

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций \mathcal{S} .

- Сходимость в \mathcal{S}' — слабая сходимость последовательности функционалов.
- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Обобщенные функции медленного роста \mathcal{S}' : примеры

□ $f(\mathbf{x})$ — локально интегрируемая функция полиномиального роста на бесконечности: $\exists m$

$$\int |f(\mathbf{x})|(1 + |\mathbf{x}|)^{-m} d\mathbf{x} < \infty.$$

Она определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста из \mathcal{S}' :

$$(f, \phi) = \int f \phi d\mathbf{x}.$$

Обобщенные функции медленного роста \mathcal{S}' : примеры

Не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая \mathcal{S}' , имеет полиномиальный рост. Например, функция

$$(\cos(\exp x))' = -\exp x \sin(\exp x)$$

не является функцией полиномиального роста, но тем не менее задает обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$((\cos(\exp x))', \phi) = - \int \cos(\exp x) \phi'(x) dx$$

Обобщенные функции медленного роста \mathcal{S}' : примеры

Если f — финитная обобщенная функция из \mathcal{D}' , то она единственным образом продолжается на \mathcal{S} как элемент из \mathcal{S}' по формуле

$$(f, \phi) = (f, \eta\phi),$$

где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ в окрестности носителя f .

Обобщенные функции медленного роста \mathcal{S}' : примеры

□ $f \in \mathcal{S}'$.

- $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$.
- $f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}) \in \mathcal{S}'$ если $\det A \neq 0$.
- $af \in \mathcal{S}'$, если $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ и растет не быстрее полинома.
- Естественным образом определяется прямое произведение: $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.
- Естественным образом определяется свёртка $f * g$. Она существует не всегда.

Преобразование Фурье основных функций из \mathcal{S}

$\square \phi \in \mathcal{S}$:

$$F[\phi](\boldsymbol{\omega}) = \int \phi(\mathbf{x}) \exp i(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

— преобразование Фурье функции ϕ .

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает \mathcal{S} на \mathcal{S} .

$$F^{-1}[\phi(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\phi(-\mathbf{x})]$$

— обратное преобразование Фурье функции ϕ :

$$\phi = F^{-1}[F[\phi]] = F[F^{-1}[\phi]].$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из \mathcal{S}'

Определение

 $\forall f \in \mathcal{S}', \phi \in \mathcal{S} :$

$$(F[f], \phi) = (f, F[\phi]),$$
$$F^{-1}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\mathbf{x})]$$

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает \mathcal{S}' на \mathcal{S}' , причем $\forall f \in \mathcal{S}'$

$$f = F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]].$$

Свойства преобразования Фурье

- Дифференцирование ПФ: $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$.
- ПФ производной: $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-i\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$.
- ПФ сдвига: $F[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\boldsymbol{\omega}) = \exp i(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) F[f](\boldsymbol{\omega})$
- Сдвиг ПФ: $F[f](\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0) = F[\exp i(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega})$
- ПФ подобия: $F[f(c\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|c|^n} F[f](c^{-1}\boldsymbol{\omega})$.
- ПФ прямого произведения: $F[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})] = F[f] \cdot F[g]$
- ПФ свертки: $F[f * g] = F[f]F[g]$, если свёртка существует.

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-i\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-i\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\boldsymbol{\omega})^\alpha.$$

Преобразование Фурье функции Хевисайда

$$F[H(t) \exp(-at)] = \int_0^{\infty} \exp(-at + i\omega t) dt = \frac{i}{\omega + ia}$$

Так как $H(t) \exp(-at) \rightarrow H(t)$ в S' при $a \rightarrow +0$, в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем:

$$F[H] = \frac{i}{\omega + i0} = \pi\delta(\omega) + i \text{VP} \frac{1}{\omega}$$

Последнее равенство справедливо в силу формул Сохоцкого.

Таблицы преобразований Фурье обобщенных функций



Брычков Ю.А., Прудников А.П.

Интегральные преобразования обобщенных функций

Наука, 1977.

Задачи

- 1 Вычислить преобразование Фурье функции $H(R - |x|)$, $R = \text{const}$.
- 2 При помощи преобразования Фурье найти решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющее условию $u|_{t < 0} \equiv 0$.

Преобразование Фурье и фундаментальное решение волнового уравнения в \mathbb{R}^1

Имеем:

$$F[H(R - |x|)] = \int_{-R}^R \exp(i\omega x) dx = 2 \frac{\sin R\omega}{\omega}.$$

Преобразование Фурье и фундаментальное решение волнового уравнения в \mathbb{R}^1

Имеем:

$$F[H(R - |x|)] = \int_{-R}^R \exp(i\omega x) dx = 2 \frac{\sin R\omega}{\omega}.$$

Применяя ПФ по x к уравнению

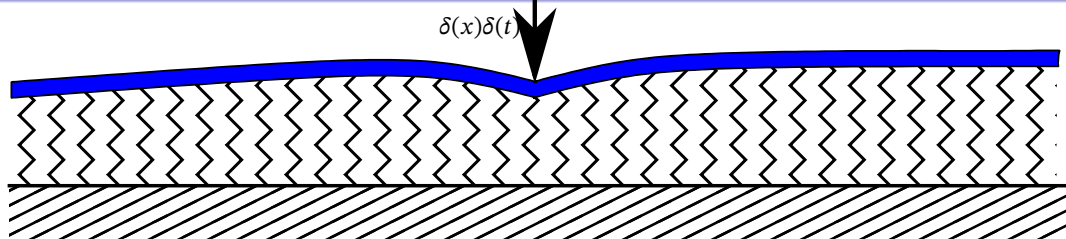
$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

находим:

$$-\omega^2 u_F - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_F = \delta(t) \implies \ddot{u}_F + c^2 \omega^2 u_F = -c^2 \delta(t) \implies$$

$$u_F = -c^2 H(t) \frac{\sin c\omega t}{c\omega} \implies u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|)$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.**
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Фундаментальное решение уравнения Клейна-Гордона в \mathbb{R}^1 

Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

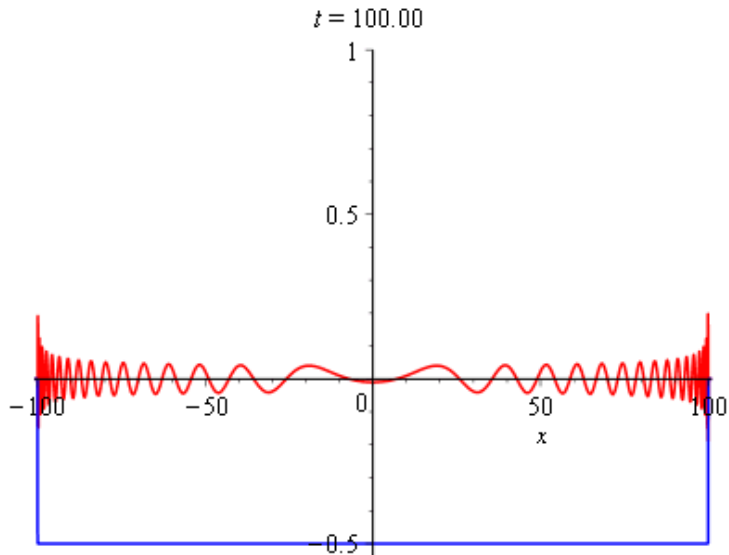
находим:

$$-(\omega^2 + k)u_F - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_F = \delta(t) \implies \ddot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = -c^2\delta(t) \implies$$

$$u_F = -c^2 H(t) \frac{\sin c\sqrt{\omega^2 + k}t}{c\sqrt{\omega^2 + k}} \implies u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|) J_0(\sqrt{k(c^2t^2 - x^2)})$$

В частном случае $k = 0$ получаем фундаментальное решение волнового уравнения.

Фундаментальные решения волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона в \mathbb{R}^1 ($k = 1, c = 1$)



Задача

Вычислить фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в \mathbb{R}^1 :

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

для случая малой диссипации $k_* = k - c^2\gamma^2 > 0$.

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в \mathbb{R}^1 : случай малой диссипации

Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 > 0$):

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = -c^2\delta(t) \implies$$

$$u_F = -c^2 H(t) \frac{\sin c\sqrt{\omega^2 + k_*}t}{c\sqrt{\omega^2 + k_*}} \exp(-c^2\gamma t) \implies$$

$$u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|) J_0(\sqrt{k_*(c^2t^2 - x^2)}) \exp(-c^2\gamma t)$$

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в \mathbb{R}^1 : случай большой диссипации

Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 < 0$):

$$u = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)I_0(\sqrt{|k_*|(c^2t^2 - x^2)})\exp(-c^2\gamma t)$$

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в \mathbb{R}^1 : особый случай

Применяя ПФ по x к уравнению

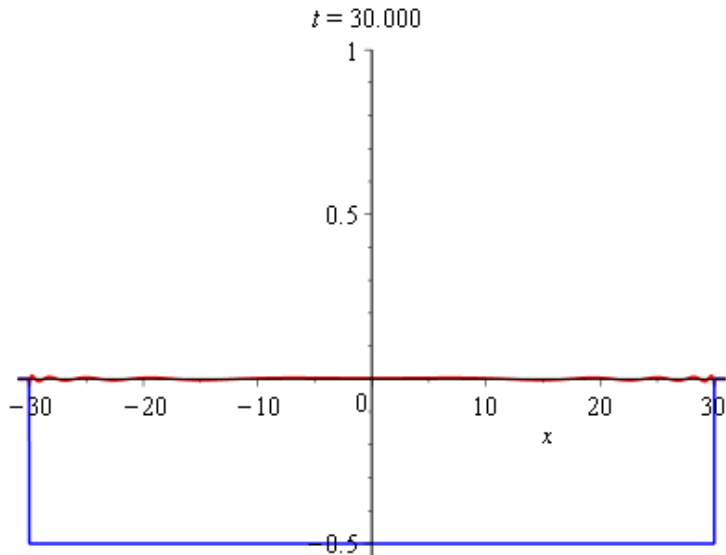
$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 = 0$):

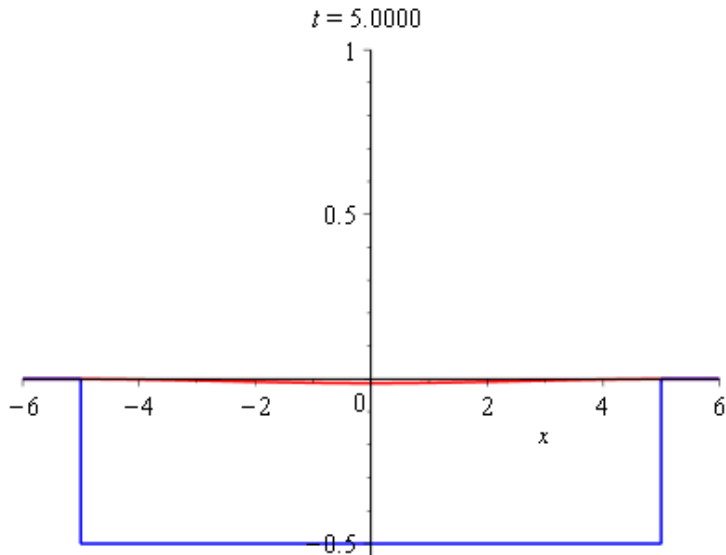
$$u = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)\exp(-c^2\gamma t)$$

В данном случае искажения в форму сигнала, вызванные наличием упругого основания, компенсируются искажениями вследствие диссипации.

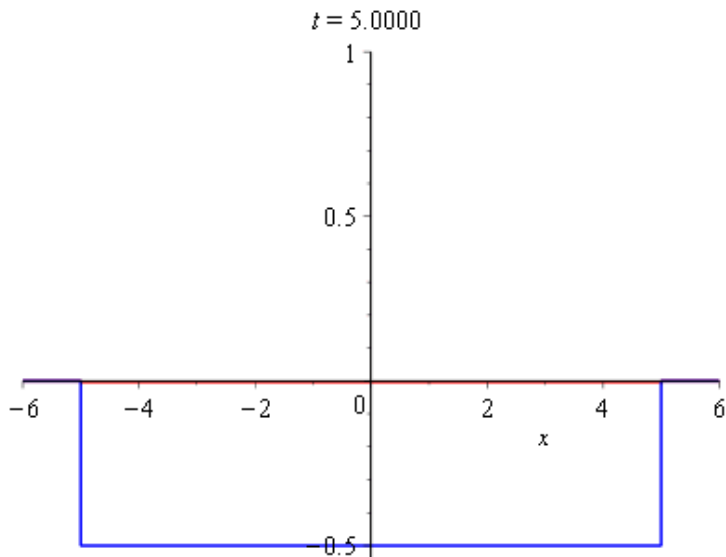
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в \mathbb{R}^1
($k = 1$, $c = 1$, $\gamma = 0.1$): случай малой диссипации



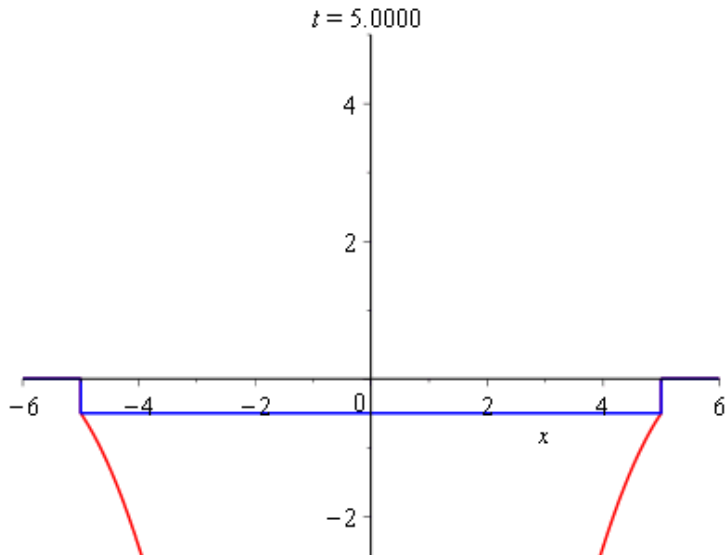
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в \mathbb{R}^1
($k = 1$, $c = 1$, $\gamma = 2$): случай большой диссипации



Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в \mathbb{R}^1
($k = 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$): особый случай

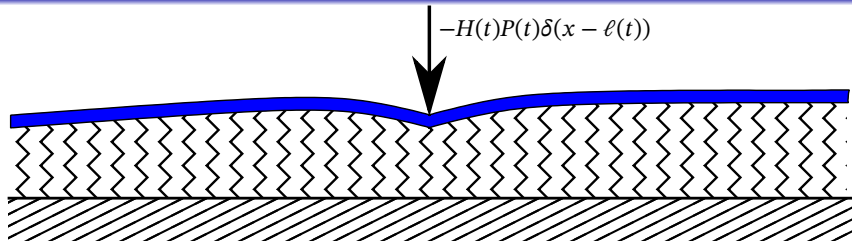


Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в \mathbb{R}^1
($k = -1$, $c = 1$, $\gamma = 0$): случай упругого основания отрицательной жесткости



- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона**
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании

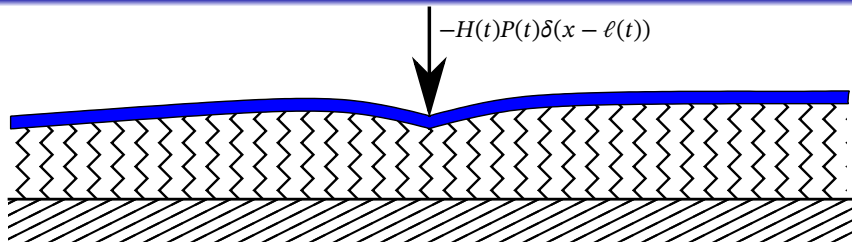


Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании



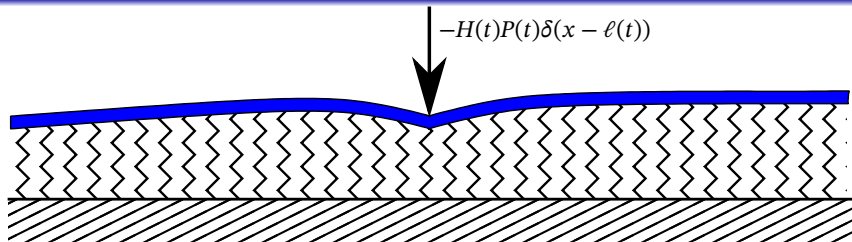
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

Делаем по аналогии со струной без упругого основания (см. слайд [131](#)).

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании



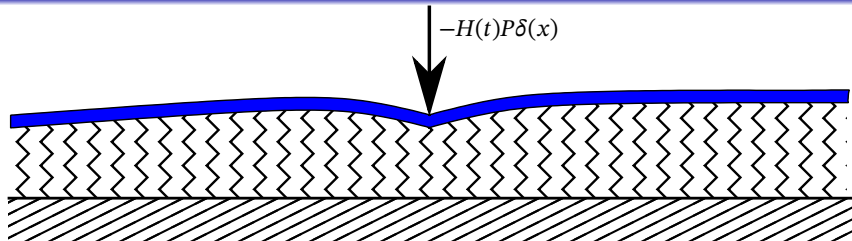
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

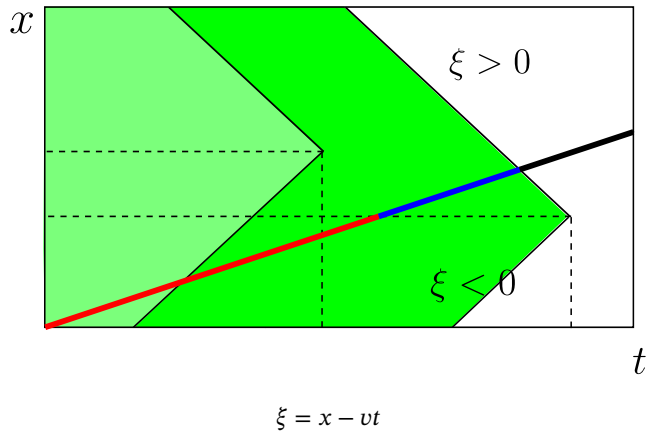
$$u = \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau)H(c(t - \tau) - |x - \ell(\tau)|)J_0\left(\sqrt{k(c^2(t - \tau)^2 - (x - \ell(\tau))^2)}\right) d\tau$$

Внезапно приложенная нагрузка постоянной амплитуды



$$\begin{aligned}
 u &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c(t-\tau) - |x|) J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - x^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c\tau - |x|) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - x^2)}\right) d\tau
 \end{aligned}$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью



Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Рассмотрим случай $\xi = x - vt < 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c(t-\tau) - |x - v\tau|) J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (x - v\tau)^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \left(\int_0^{t+\frac{\xi}{v}} H(c(t-\tau) - v(t-\tau) - \xi) \cdot + \int_{t+\frac{\xi}{v}}^t H(c(t-\tau) + v(t-\tau) + \xi) \cdot \right) \times \\
 &\quad \times J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (v(t-\tau) + \xi)^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \left(\int_{-\frac{\xi}{v}}^t H((c-v)\tau - \xi) \cdot + \int_0^{-\frac{\xi}{v}} H((c+v)\tau + \xi) \cdot \right) \times \\
 &\quad \times J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \int_{\frac{|\xi|}{c+v}}^t J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right) d\tau.
 \end{aligned}$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Делаем замену ($\xi = -|\xi|$, $\text{sign } \xi = -1$)

$$\zeta = c\left(\tau - \frac{|\xi|}{c - v \text{sign } \xi}\right),$$

получим

$$u = \frac{P}{2} \int_0^{c\left(t - \frac{|\xi|}{c - v \text{sign } \xi}\right)} J_0\left(\sqrt{k\zeta((1 - \beta^2)\zeta + 2\xi)}\right) d\zeta,$$

где $\beta = v/c$. Пусть $t \rightarrow \infty$, а ξ фиксировано. Тогда верхним пределом интегрирования будет $+\infty$, и после вычисления интеграла получим

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1 - \beta^2)}},$$

$$k_0 = \left| \frac{k}{1 - \beta^2} \right|.$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Для $\xi > 0$ имеем $x > vt > v\tau \forall \tau \leq t \implies H(v\tau - x) = 0$. Поэтому,

$$u = \frac{cP}{2} \int_0^t H((c-v)\tau - \xi) J_0 \left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)} \right) d\tau$$

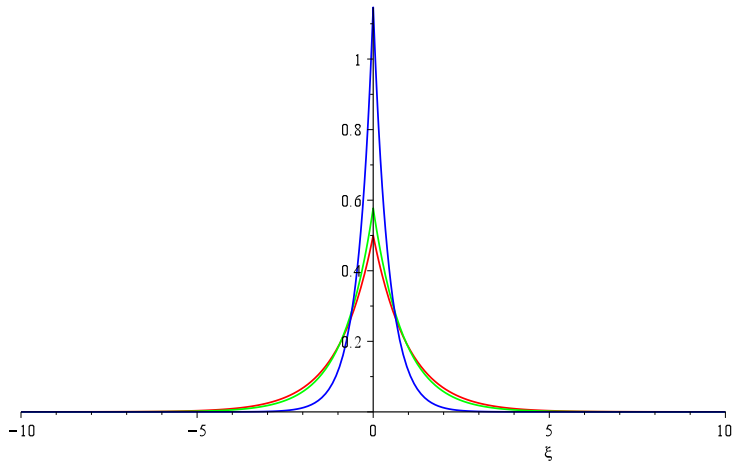
Определяя границы промежутка, где подынтегральная функция отлична от нуля, и применяя ту же замену переменной, приходим вновь к формуле

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$

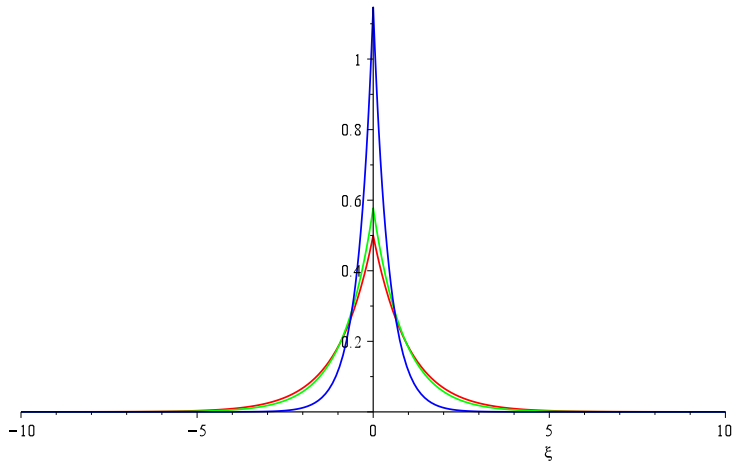
$$k_0 = \left| \frac{k}{1-\beta^2} \right|.$$

Стационарное решение в точке ξ в подвижной системе координат устанавливается за бесконечное время.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба
($v/c = 0$, $v/c = 0.5$, $v/c = 0.9$)



Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба
($v/c = 0$, $v/c = 0.5$, $v/c = 0.9$)



Контрольный вопрос: а что будет в этой же задаче для волнового уравнения?

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

- При ненулевой скорости нагрузки нестационарное решение несимметрично относительно нагрузки в движущейся с ней СК.
- При $t \rightarrow \infty$ устанавливается симметричное в подвижной СК стационарное решение.
- Стационарное решение устанавливается за бесконечное время.
- При скорости нагрузки, близкой к критическому значению c , прогиб под нагрузкой стремится к бесконечности.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*''} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*''} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Указания:

- 1 Переписать уравнение движения в новых независимых переменных $\xi = x - vt$, $\tau = t$.
- 2 В полученном уравнении пренебречь производными по времени τ .
- 3 Найти решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности и условиями Гюгонио на (неподвижном) скачке $\xi = 0$.

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью

$$\xi > 0: \quad u = 0.$$

$$\xi < 0:$$

$$u = \frac{cP}{2} H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_{\frac{|\xi|}{2c}}^t J_0\left(\sqrt{k(2c|\xi|\tau - \xi^2)}\right) d\tau.$$

Сделав замену

$$\zeta = \sqrt{\tau - \frac{|\xi|}{2c}},$$

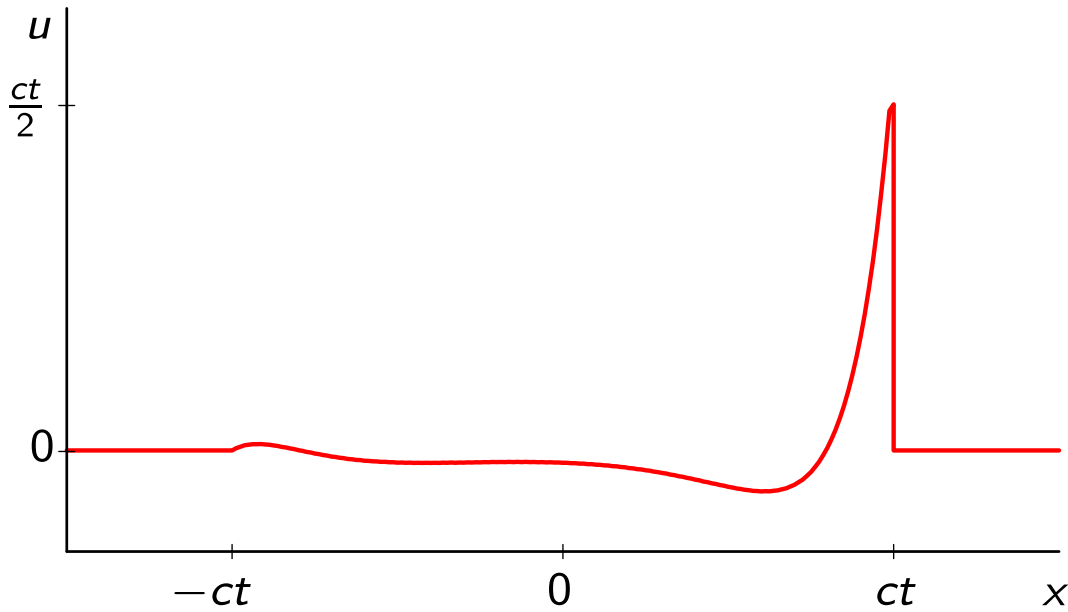
приводим интеграл к табличному:

$$\begin{aligned} u &= cPH\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_0^{\sqrt{t - \frac{|\xi|}{2c}}} \zeta J_0\left(\sqrt{2kc|\xi|\zeta}\right) d\zeta = \\ &= P\sqrt{\frac{ct - \frac{|\xi|}{2}}{2k|\xi|}} J_1\left(\sqrt{2k|\xi|(ct - \frac{|\xi|}{2})}\right) H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \end{aligned}$$

При $\xi \rightarrow -0$:

$$u = \frac{cPt}{2} + o(1).$$

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью



- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы**
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Необходимые определения

Интеграл Фурье:

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega, \quad t \rightarrow +\infty$$

- $\varphi(\omega)$ — фаза
- ω_* : $\varphi'(\omega_*) = 0$ — стационарные точки.
- ω_* : $\varphi'(\omega_*) \neq 0$; $f, \varphi \in C^\infty(\omega_* - \delta, \omega_* + \delta)$ — обыкновенные точки.
- Точки не являющиеся обыкновенными — критические.
- Вкладом от изолированной критической точки ω_* называется интеграл

$$\hat{J}(t, \omega_*) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \eta(\omega - \omega_*) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega,$$

Здесь $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta \equiv 1$ в некоторой окрестности ω_* , $\text{supp } \eta$ не содержит других критических точек.



Федорюк М.В. Метод перевала. М: Наука, 1977.

Лемма Римана-Лебега

Для интегрируемой f

$$\mathcal{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = o(1), \quad t \rightarrow +\infty$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок,

$$\varphi'(\omega) \neq 0, \quad x \in I,$$

и $f(\omega) \in C^{N+1}$, $\varphi(\omega) \in C^{N+2}$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{k=0}^N (it)^{-k-1} M^k \left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) \Big|_a^b + o(t^{-N-1}).$$

$$M = -\frac{1}{\varphi'(\omega)} \frac{d}{d\omega}$$

Главный член ($N = 0$) асимптотики имеет вид:

$$\mathcal{J}(t) = (it)^{-1} \left(\frac{f(b)}{\varphi'(b)} e^{i\varphi(b)t} - \frac{f(a)}{\varphi'(a)} e^{i\varphi(a)t} \right) + o(t^{-1}).$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Доказательство

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^b f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega = \frac{1}{it} \int_a^b \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} d(e^{it\varphi(\omega)}) = \frac{1}{it} \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} e^{it\varphi(\omega)} \Big|_a^b + \frac{1}{it} \mathcal{J}_1(t)$$

$$\mathcal{J}_1(t) = - \int_a^b e^{i\varphi(\omega)t} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) d\omega = o(1)$$

Асимптотика интеграла Френеля

Пример

Вычислить асимптотику интеграла Френеля $\Phi(t)$ при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &\equiv \int_t^\infty e^{i\omega^2} d\omega = \int_t^\infty \frac{1}{2i\omega} d(e^{i\omega^2}) = -\frac{1}{2it} e^{it^2} + \frac{1}{2i} \int_t^\infty \frac{e^{i\omega^2}}{\omega^2} d\omega = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} + \frac{1}{2i} \frac{1}{2i} \int_t^\infty \frac{d(e^{i\omega^2})}{\omega^3} = -\frac{1}{2it} e^{it^2} - \frac{1}{4} \int_t^\infty \frac{d(e^{i\omega^2})}{\omega^3} = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} - \frac{1}{4} \left(-\frac{e^{it^2}}{t^3} + 3 \int_t^\infty \frac{e^{i\omega^2}}{\omega^4} d\omega \right) = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} + O(t^{-3}).
 \end{aligned}$$

Вклад от стационарной точки: эталонный интеграл

Лемма

Пусть $f(\omega) \in C^\infty$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$:

$$\Phi(t) = \int_0^a f(\omega) e^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|t}} e^{\frac{i\pi \operatorname{sign} \alpha}{4}} f(0) + O(t^{-1}), \quad \alpha \neq 0.$$

Доказательство.

□ $\alpha > 0$, $f(\omega) = f(0) + \omega \left(\frac{f(\omega) - f(0)}{\omega} \right) = f(0) + \omega g(\omega)$. Делаем замену переменной $w = \omega \sqrt{\alpha t}$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f(0) \int_0^a e^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} d\omega = \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{\frac{iw^2}{2}} dw = \\ &= \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \left(\int_0^\infty - \int_{\sqrt{\alpha t}}^\infty \right) e^{\frac{iw^2}{2}} dw = \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right) \end{aligned}$$

$$|\Phi_1(t)| \leq \left| \frac{1}{i\alpha t} \int_0^a g(\omega) de^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} \right| \leq \frac{1}{\alpha t} \left(|g(0)| + |g(a)| + \int_0^a |g'(\omega)| d\omega \right) = O(t^{-1})$$

Вклад от стационарной точки: общий случай

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок, и выполнены условия:

1. $f(\omega) \in C^1$, $\varphi(\omega) \in C^1$.
2. Функция $\varphi(\omega)$ имеет при $\omega \in I$ единственную стационарную точку ω_* : $\varphi'(\omega_*) = 0$.
3. $\varphi''(\omega_*) \neq 0$ (т.е. ω_* — невырожденная стационарная точка).

Тогда при $t \rightarrow +\infty$ главный член асимптотики имеет вид

$$\mathcal{J}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_*)|t}} f(\omega_*) e^{i\varphi(\omega_*)t + \frac{i\pi}{4} \text{sign } \varphi''(\omega_*)} + O(t^{-1}).$$

Доказательство.

- Промежуток интегрирования разбивается на два точкой ω_* .
- В каждом из интегралов делается замена переменной $\omega = \psi(w)$: $\varphi(\omega) - \varphi(\omega_*) = w^2$.
- Применяем лемму к каждому из интегралов.



Принцип локализации

Лемма

Пусть $\varphi(\omega) \in C^\infty$, $f(\omega) \in \mathcal{D}$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega = O(t^{-\infty}).$$

Доказательство.

Интеграл фактически берется по конечному отрезку; применяем формулу для вкладов от границ промежутка интегрирования. □

Принцип локализации

Пусть $I = [a; b]$ — конечный отрезок, и пусть интеграл $\mathcal{J}(t)$ имеет конечное число изолированных критических точек $\omega_1, \dots, \omega_k \in I$. Тогда

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{j=1}^k \hat{\mathcal{J}}(t, \omega_j) + O(t^{-\infty}),$$

т.е. интеграл $\mathcal{J}(t)$ равен сумме вкладов от критических точек с точностью до $O(t^{-\infty})$.

Задача

Задача

Вычислить асимптотику при $t \rightarrow +\infty$ функции Бесселя целого порядка $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(t \sin \omega - n\omega) d\omega$$

Задача

Задача

Вычислить асимптотику при $t \rightarrow +\infty$ функции Бесселя целого порядка $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(t \sin \omega - n\omega) d\omega$$

$\varphi(\omega) = \sin \omega$, $f(\omega) = \exp(-in\omega)$.

Применяем формулу:

$$\mathcal{J}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_*)|t}} f(\omega_*) e^{i\varphi(\omega_*)t + \frac{i\pi}{4} \text{sign } \varphi''(\omega_*)} + O(t^{-1}).$$

Стационарные точки: $\sin \omega = 0$: $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_2 = \frac{3\pi}{2}$.

$\varphi(\omega_1) = 1$, $\varphi(\omega_2) = -1$.

$\varphi'' = -\sin \omega$, $\varphi''(\omega_1) = -1$, $\varphi''(\omega_2) = 1$.

$f(\omega_1) = \exp(-i\frac{\pi n}{2})$, $f(\omega_2) = \exp(-i\frac{3\pi n}{2}) = \exp(-i2\pi n) \exp(i\frac{\pi n}{2}) = \exp(i\frac{\pi n}{2})$.

В результате:

$$J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-1}).$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем [формулы Сохоцкого](#) $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Доказательство.

□ $\eta(\omega) \in \mathcal{D}$: $\eta \equiv 1$ при $|\omega| < \delta$, $f(\omega) = (f(\omega) - \eta(\omega)f(0)) + \eta(\omega)f(0)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\omega) - \eta(\omega)f(0)) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega + f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty}) + f(0) \left(\int_{\rightarrow \curvearrowright} \frac{\eta(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega \right) = \\ &= O(t^{-\infty}) + f(0) \left(\frac{i}{t} \right)^N \left(\int_{\rightarrow \curvearrowright} \frac{d^N}{d\omega^N} \left(\frac{\eta(\omega)}{\omega + i0} \right) e^{i\omega t} d\omega \right) \frac{|e^{i\omega t}| \leq 1}{\left| \frac{d^N}{d\omega^N} \left(\frac{\eta(\omega)}{\omega + i0} \right) \right| \leq C_N} = O(t^{-\infty}) \end{aligned}$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем [формулы Сохоцкого](#) $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Следствие

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

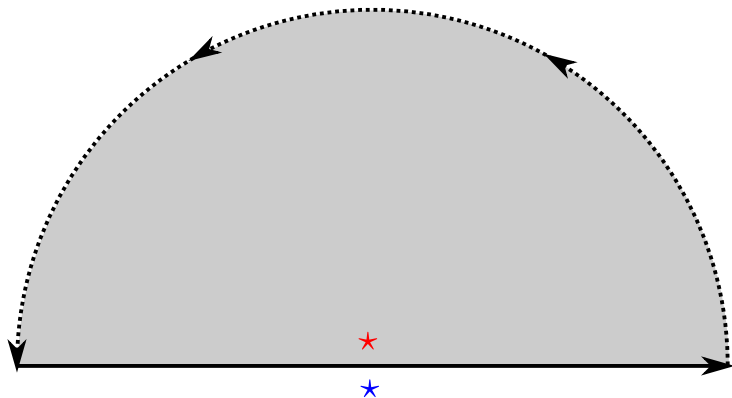
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости f :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0).$$

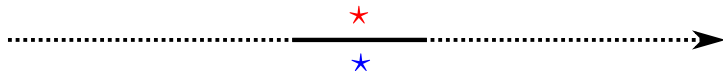


Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для функций вещественной переменной $f \in \mathcal{D}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty}).$$



Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Доказательство.

Аналогично



Вклад от полюса: эталонные интегралы

□ $f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

Следствие

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega = -i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = -2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

Вклад от полюса: общий случай

Теорема

Пусть $f(\omega) \in \mathcal{D}$, $\varphi(\omega) \in C^\infty$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega} d\omega = \pi i \alpha f(0) e^{i\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega + i\alpha 0} d\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega - i\alpha 0} d\omega = 2\pi i \alpha f(0) e^{i\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

где $\alpha = \text{sign } \varphi'(0)$.

Доказательство.

Заменой переменных $\omega = \psi(w) : \varphi(\omega) - \varphi(0) = w$ сводим интегралы к эталонным. □

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость**
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

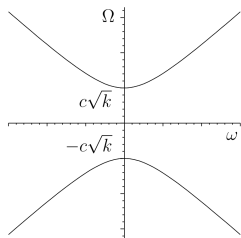
Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u = 0$$

$$\int u = u_0(\omega, \Omega) e^{-i\omega x} e^{-i\Omega t} \Rightarrow$$

Дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 - c^2 (\omega^2 + k) = 0$$



$$\Omega_{\omega} = c\sqrt{k} \quad \text{— частота отсечки}$$

$$\frac{\Omega}{\omega} \quad \text{— фазовая скорость}$$

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{c^2}{(\Omega/\omega)} = c \frac{\sqrt{\Omega^2 - \omega^2}}{\Omega} \quad \text{—}$$

— групповая скорость

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \sin \Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 2\gamma c^2\Omega_0 i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_- , C_+ :

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_- , C_+ :

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_- , C_+ :

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F*}|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\frac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F*}|_{t=0} \end{cases} \implies$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \rightarrow +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_- , C_+ :

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F_*}|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\frac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0} \end{cases} \implies C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0}$$

Стационарное решение

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Находим корни знаменателя:

$$c^2 \omega^2 = \Omega_0^2 - c^2 k - 0i \implies \omega = \omega_{\pm} \equiv \pm \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} \mp 0i$$

Разлагаем дробь на простейшие:

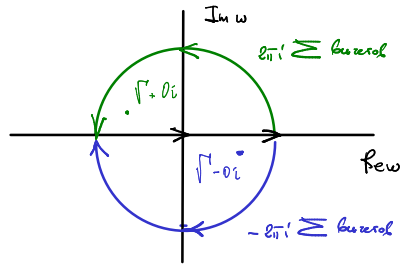
$$u_{F*} = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Применяем обратное преобразование Фурье по x :

$$u_* = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{4\pi\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x) d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x) d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Вычисляем интегралы через вычеты. Для $x > 0$ учитываем полюс в верхней полуплоскости, для $x < 0$

$$u_* = \frac{e^{i\Omega_0 t}}{2\pi} \frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\int \frac{e^{-i\omega x} d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int \frac{e^{-i\omega x} d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$



$x > 0:$ $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_0 t} e^{-i\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} x}$

$x < 0:$ $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_0 t} e^{i\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} x}$

Вместо этого Им:

$$u_* = -\frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} |x|\right)$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t),$$

$$C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k + 0i}} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k - 0i}} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega x) d\omega.$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t),$$

$$C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega Wt) d\omega.$$

Рассматривая при $t \rightarrow \infty$ **переходный процесс** на фронте, **движущимся от источника с произвольной скоростью W** , видим что основной вклад порядка $O(1)$ в финальный результат соответствуют тем же полюсам, что были рассмотрены при исследовании стационарного решения. Применяем **теорему о вкладе от полюса** в интеграл Фурье.

Вычисляем $C_-(\omega_{\pm}) = 0$, $C_+(\omega_{\pm}) = -u_{F_*}|_{t=0}$, $c\sqrt{\omega_{\pm}^2 + k} = \Omega_0$.

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + kt}) + o(1),$$

$$C_+ = -u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k + 0i}} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k - 0i}} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{F_*} \exp(-i\omega Wt) d\omega.$$

Для **интеграла Фурье** фаза равна:

$$\varphi(\omega) = c\sqrt{\omega^2 + k} - \omega W.$$

Вычисляем $\varphi'(\omega_{\pm})$ с учетом дисперсионного соотношения $\Omega^2 = c^2(\omega^2 + k)$:

$$\varphi'(\omega_{\pm}) = \pm c_g(\Omega_0) - W.$$

В соответствии с **теоремой** имеем:

$|W| < c_g$: оба вклада в переходный процесс — $o(1)$, решение равно стационарному;

$|W| > c_g$: вклад в переходный процесс равен стационарному решению с обратным знаком, решение равно $o(1)$;

$|W| = c_g$: стационарная точка соответствует полюсам, требуется дополнительное исследование

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Задача

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \sin \Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$, $x = Wt$, $c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t} \neq 0$

$$u = -\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} |x|\right) H\left(c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t}\right) + O(t^{-1/2})$$

Групповая скорость

Основной вывод

На больших временах скорость переднего фронта гармонического сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником, равна групповой скорости, соответствующей частоте колебаний источника.

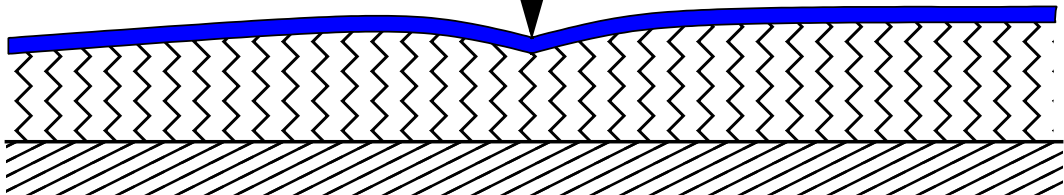
Важные идеи, использованные при решении задачи

- Асимптотическая оценка интеграла обратного преобразования Фурье.
- Принцип предельного поглощения.
- Рассмотрение решения на подвижном фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай**
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании

$$-H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$



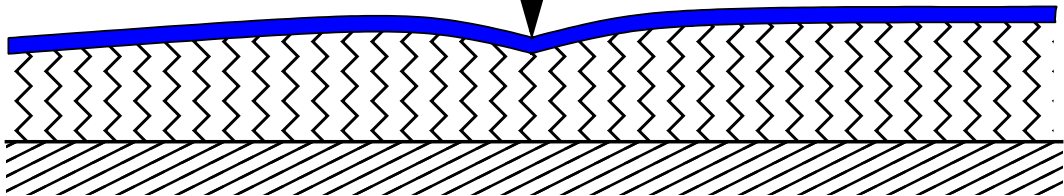
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании

$$-H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$



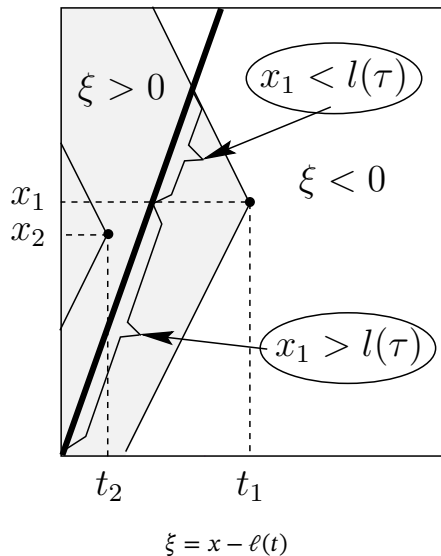
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

$$u = \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau)H(c(t - \tau) - |x - \ell(\tau)|)J_0\left(\sqrt{k(c^2(t - \tau)^2 - (x - \ell(\tau))^2)}\right) d\tau$$

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью



Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью

$$\xi > 0: \quad u = 0.$$

$$\xi < 0:$$

$$u = \frac{cP}{2} \int_{\frac{|\xi|}{c+v}}^{\min(t, \frac{|\xi|}{v-c})} J_0 \left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)} \right) d\tau.$$

Если $t \rightarrow \infty$, а ξ зафиксировано, то верхний предел равен $\frac{|\xi|}{v-c}$. Сделав последовательно замены переменной интегрирования

$$s = \tau \frac{v^2 - c^2}{|\xi|c} - \frac{v}{c}, \quad r = \sqrt{1 - s^2},$$

приводим интеграл к табличному:

$$u = \frac{P|\xi|}{\beta^2 - 1} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} J_0(\sqrt{k_0}|\xi|r) dr.$$

В итоге получаем:

$$u = -\frac{PH(-\xi)}{\sqrt{k(\beta^2 - 1)}} \sin \sqrt{k_0}\xi.$$

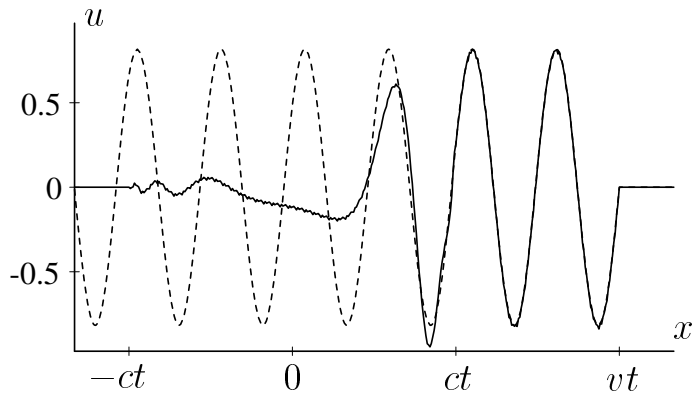
Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью

Предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*''} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt), \\ u^* = 0, \text{ если } x - vt > 0 \end{cases}$$

Стационарное решение в точке ξ ($\xi < 0$) подвижной системы координат устанавливается за конечное время $\frac{|\xi|}{v-c}$.

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью (график $-u$) для малых t



Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью (случай больших t)

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) u_{\xi\xi} + \frac{2v}{c^2} u_{\xi\tau} - 2\gamma u_\tau - \frac{1}{c^2} u_{\tau\tau} - ku + 2\gamma v u_\xi = -H(\tau)\delta(\xi)$$

Применяем преобразование Фурье по ξ ($\beta = v/c$):

$$u_{\tau\tau F} + 2(i\omega v + c^2\gamma)u_{\tau F} + c^2(k - (\beta^2 - 1)\omega^2 + 2i\gamma v\omega)u_F = c^2H(\tau).$$

Решая по τ , получим:

$$u_F = C^+ e^{i(-\omega\beta + \sqrt{\omega^2 + k})ct} + C^- e^{i(-\omega\beta - \sqrt{\omega^2 + k})ct} + u_F^* \equiv \\ \equiv \sum_{(\pm)} C^\pm e^{i(-\omega\beta \pm \sqrt{\omega^2 + k})ct} + u_F^* \equiv u_F^+ + u_F^- + u_F^*,$$

$$u_F^* = \frac{-1}{(\beta^2 - 1)\omega^2 - 2i\gamma v\omega - k},$$

$$C^\pm = -\frac{\sqrt{\omega^2 + k} \pm \omega\beta}{2\sqrt{\omega^2 + k}(k + 2i0\omega - (\beta^2 - 1)\omega^2)}$$

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью (случай больших t)

Стационарное решение:

$$u_F^* = \frac{-1}{(\beta^2 - 1)\omega^2 - 2i\gamma v\omega - k}$$

$$u^* = \frac{-1}{4\pi\sqrt{k(\beta^2 - 1)}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-i\omega\xi}}{\omega - i\varepsilon - \sqrt{k_0}} - \frac{e^{-i\omega\xi}}{\omega - i\varepsilon + \sqrt{k_0}} \right) d\omega.$$

Вычисляя интеграл как сумму вычетов, получаем:

Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью (случай больших t)

Стационарное решение:

$$u_F^* = \frac{-1}{(\beta^2 - 1)\omega^2 - 2i\gamma\nu\omega - k}.$$

$$u^* = \frac{-1}{4\pi\sqrt{k(\beta^2 - 1)}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-i\omega\xi}}{\omega - i\varepsilon - \sqrt{k_0}} - \frac{e^{-i\omega\xi}}{\omega - i\varepsilon + \sqrt{k_0}} \right) d\omega.$$

Вычисляя интеграл как сумму вычетов, получаем:

$$u^* = -\frac{H(-\xi)}{\sqrt{k(\beta^2 - 1)}} \sin \sqrt{k_0}\xi.$$

$$k_0 = \left| \frac{k}{1 - \beta^2} \right|.$$

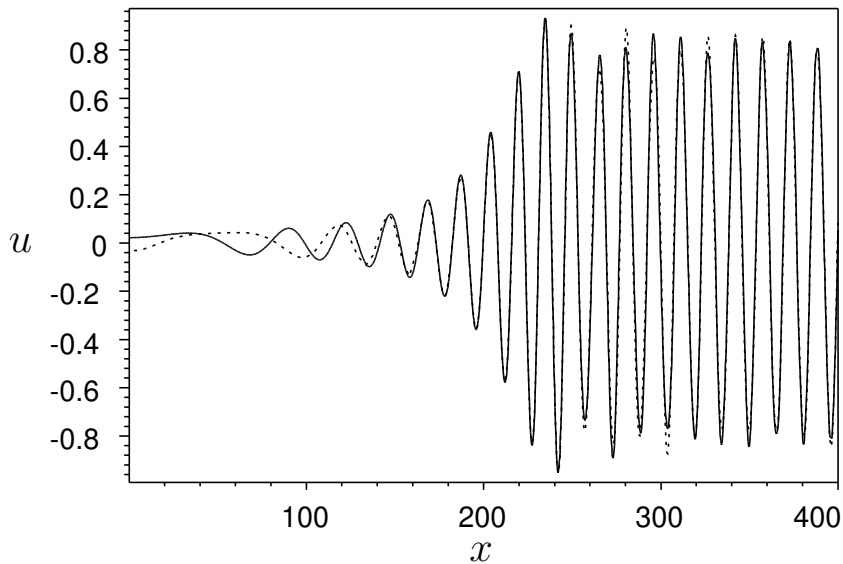
Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: движение с постоянной закритической скоростью (случай больших t)

Нестационарное решение ($\xi = (W - v)t$, $t \rightarrow \infty$):

$$u_F^+ + u_F^- = \frac{\sqrt{\omega^2 + k} \pm \omega\beta}{\sqrt{\omega^2 + k}(\omega^2 - i\omega 0 + k_0)} e^{i(\pm c\sqrt{\omega^2 + k} - \omega W)t} d\omega.$$

$$u = u^+ + u^- + u^* = -\frac{\sin \sqrt{k_0} \xi}{\sqrt{k(1 - \beta^2)}} H\left(\frac{x}{t} - \frac{c^2}{v}\right) H\left(v - \frac{x}{t}\right) + O(t^{-\frac{1}{2}}).$$

$$\Omega^2 - c^2(\omega^2 + k) = 0 \quad \implies \quad \frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{c^2}{\Omega/\omega}.$$

Нестационарное решение в случае $v = \text{const} > c$ для больших t 

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Движение фазовых границ в стержне из трилинейного материала
- 9 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 10 Струна на упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение.
- 11 Простейшие нестационарные задачи для уравнения Клейна-Гордона
- 12 Метод стационарной фазы
- 13 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 14 Подвижная нагрузка на струне на упругом основании: закритический случай
- 15 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1}t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x) d\omega \implies$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1}t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x) d\omega \implies u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|) J_0(\sqrt{k(c^2 t^2 - x^2)})$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1}t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega Wt) d\omega \implies$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x :

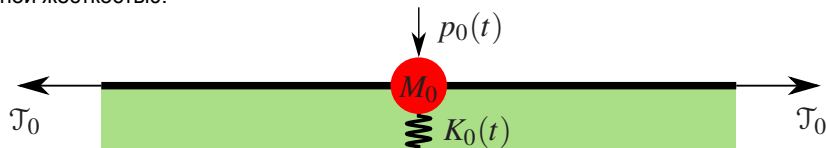
$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1} t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t) d\omega \implies u = O(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty$$

Необходимое условие локализации в линейных системах

Необходимое условие локализации в линейных системах — наличие пространственной неоднородности.

В механических системах такими неоднородностями могут быть инерционные включения и/или зоны с ослабленной жесткостью.



Вынужденные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = P \exp(-i\Omega t) \delta(x),$$

$$\square u = \hat{u}(x) \exp(-i\Omega t) :$$

$$\hat{u}'' - (1 - \Omega^2)\hat{u} = P \delta(x).$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Решение:

$$\hat{u} = -P \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < \Omega_*;$$

$$\hat{u} = P \frac{\exp(i \operatorname{sign} \Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}|x|)}{2i \operatorname{sign} \Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}, \quad |\Omega| > \Omega_*.$$

Здесь: $\Omega_* = 1$ — частота отсечки.

$|\Omega| > \Omega_*$: Синусоидальные бегущие волны

$|\Omega| < \Omega_*$: Локализованные решения, удовлетворяющие условиям конечности энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2 dx < \infty.$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

$$\begin{aligned}
 u'' - \ddot{u} - u &= -P(t) \delta(x), \\
 P(t) &= -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t), \\
 M &\geq 0, \quad K \leq 0.
 \end{aligned}$$

□ $u = \hat{u}(x) \exp(-i\Omega t)$:

$$\hat{u}'' - (1 - \Omega^2)\hat{u} = (K - M\Omega^2)\hat{u}(0) \delta(x).$$

Ищем решения с конечной энергией:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2 dx < \infty.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 + A^2(\Omega) = 0, \quad A^2(\Omega) = 1 - \Omega^2.$$

Решение:

$$\hat{u} = -(K - M\Omega^2) \hat{u}(0) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1 - \Omega^2} = M\Omega^2 - K$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

Задача

Найти выражения для частоты Ω_0 локализованной моды и необходимые и достаточные условия существования локализованной моды в частных случаях а) $K = 0$ б) $M = 0$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2 u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2) \hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$=$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2 u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2) \hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$= -i \sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-i0} p_f(\bar{\Omega}) \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega} \right) \exp(-i\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2 u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2) \hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$= -i \sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-i0} p_f(\bar{\Omega}) \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega} \right) \exp(-i\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \Omega_0^2} |p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \sin(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)) + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-i\Omega t)\delta(x), \quad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2 \operatorname{Re} (G_0(x, \Omega)) \exp(-i\Omega t),$$

$$G_0(x, \Omega) = \begin{cases} \frac{C}{2} \exp(i(\omega_+ x - \varphi/2)), & x > 0; \\ \frac{C}{2} \exp(i(\omega_- x + \varphi/2)), & x < 0; \end{cases}$$

где C , φ — вещественные константы, ω_{\pm} — волновые числа

$$\omega_{\pm} = \pm ai + a, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{1 - \Omega^2}.$$

$$\operatorname{Re}[i\omega \exp(\mp i\varphi/2)] = 0,$$

$$\operatorname{Re}[(i\omega)^2 \exp(\mp i\varphi/2)] = 0,$$

$$2C \operatorname{Re}[(i\omega)^3 \exp(\mp i\varphi/2)] = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-i\Omega t)\delta(x), \quad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2 \operatorname{Re} (G_0(x, \Omega)) \exp(-i\Omega t),$$

$$G_0(x, \Omega) = \begin{cases} \frac{C}{2} \exp(i(\omega_+ x - \varphi/2)), & x > 0; \\ \frac{C}{2} \exp(i(\omega_- x + \varphi/2)), & x < 0; \end{cases}$$

где C , φ — вещественные константы, ω_{\pm} — волновые числа

$$\omega_{\pm} = \pm ai + a, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{1 - \Omega^2}.$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$a^3 \left(-\sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2C}.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-i\Omega t)\delta(x), \quad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2 \operatorname{Re} (G_0(x, \Omega)) \exp(-i\Omega t),$$

$$G_0(x, \Omega) = \begin{cases} \frac{C}{2} \exp(i(\omega_+ x - \varphi/2)), & x > 0; \\ \frac{C}{2} \exp(i(\omega_- x + \varphi/2)), & x < 0; \end{cases}$$

где C , φ — вещественные константы, ω_{\pm} — волновые числа

$$\omega_{\pm} = \pm ai + a, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{1 - \Omega^2}.$$

$$C = \frac{1}{2(1 - \Omega^2)^{3/4}},$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-i\Omega t)\delta(x), \quad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2 \operatorname{Re} (G_0(x, \Omega)) \exp(-i\Omega t),$$

$$G_0(x, \Omega) = \begin{cases} \frac{C}{2} \exp(i(\omega_+ x - \varphi/2)), & x > 0; \\ \frac{C}{2} \exp(i(\omega_- x + \varphi/2)), & x < 0; \end{cases}$$

где C , φ — вещественные константы, ω_{\pm} — волновые числа

$$\omega_{\pm} = \pm ai + a, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{1 - \Omega^2}.$$

$$2 \operatorname{Re} G_0(x, \Omega) = \frac{1}{2} \frac{e^{-a|x|} \cos(a|x| - \pi/4)}{(1 - \Omega^2)^{3/4}}.$$

Локализованные колебания балки на упругом основании: спектральная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$

$$P(t) = -Kw(0, t).$$

Задача

Найти частотное уравнение, выражение для частоты Ω_0 локализованной моды, необходимые и достаточные условия существования локализованной моды.

Локализованные колебания балки на упругом основании: нестационарная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$

$$P(t) = -Kw(0, t) + p(t).$$

Задача

Найти выражение для незатухающих колебаний.

Параметрическое возмущение системы с единственной низкочастотной локализованной модой

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0, \quad t = O(\epsilon^{-1}).$$



Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Используем асимптотический анзац (аппроксимацию решения):

$$\begin{aligned} T &= \epsilon t, \\ u(t) &= W(T) \exp \varphi(t), \\ \dot{\varphi} &= -i \Omega_0(T), \\ W(T) &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(T). \end{aligned}$$

Переменные φ , T считаем независимыми.

$$\begin{aligned} (\dot{\cdot}) &= -i \Omega_0 \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_T, \\ (\ddot{\cdot}) &= -\Omega_0^2 \partial_{\varphi\varphi}^2 - 2\epsilon i \Omega_0 \partial_{\varphi T}^2 - \epsilon i \Omega_0' \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получаем уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0' + \Omega_0' W_0 = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0$$

Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0' T + \Omega_0' W_0 = 0.$$

$$\frac{dW_0}{W_0} = -\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \frac{d\Omega_0}{2\Omega_0}\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0, \tau) = \frac{2C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0\right) + O(\epsilon).$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})' + u = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})' + u = 0.$$

□ $\Omega_0^2 = 1/M$. Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0' + \left(\Omega_0' + \Omega_0 \frac{M'}{M} \right) W_0 = 0.$$

$$\frac{dW_0}{W_0} = -\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} - \frac{dM}{2M}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \left(\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} + \frac{dM}{2M}\right)\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0 M|}} = C_0 \sqrt{|\Omega_0|},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0, \tau) = 2C_0 \sqrt{|\Omega_0|} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0\right) + O(\epsilon).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t),$$

- $\epsilon = o(1)$,
- $t = O(\epsilon^{-1})$,
- $K(\epsilon t)$ такова, что локализованная мода $\exists \forall t$.

Будем предполагать, что

- Частотное уравнение

$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2(\epsilon t)} = M\Omega_0^2(\epsilon t) - K(\epsilon t)$$

выполняется $\forall t$;

- Дисперсионное соотношение

$$\omega^2(\epsilon t) - \Omega^2(\epsilon t) + 1 = \omega^2 + A^2(\Omega) = 0$$

при $x = \pm 0$ выполняется $\forall t$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Используем асимптотический анзац ($t > 0, x \leq 0$):

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= W(X, T) \exp \varphi(x, t), \\
 T &= \epsilon t, \quad X = \epsilon x, \\
 \varphi' &= i \omega(X, T), \quad \dot{\varphi} = -i \Omega(X, T), \\
 W(X, T) &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(X, T),
 \end{aligned}$$

причем

$$\Omega'_X + \omega'_T = 0.$$

Переменные φ, T, X считаем независимыми.

$$\begin{aligned}
 (\dot{\cdot}) &= -i \Omega \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_T, \\
 (\ddot{\cdot}) &= -\Omega^2 \partial_{\varphi\varphi}^2 - 2\epsilon i \Omega \partial_{\varphi T}^2 - \epsilon i \Omega'_T \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2), \\
 (\dot{\cdot})' &= i \omega \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_X, \\
 (\ddot{\cdot})'' &= -\omega^2 \partial_{\varphi\varphi}^2 + 2\epsilon i \omega \partial_{\varphi X}^2 + \epsilon i \omega'_X \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2).
 \end{aligned}$$

Условия при $x = 0$:

$$\Omega(\pm 0, T) = \Omega_0(T),$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t),$$

$$\implies [u'] = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Подставляя в выражение

$$[u'] = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t),$$

представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$M(2\Omega_0 W_0' + \Omega_0' W_0) = i[W_0' X].$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\delta(x), \quad x = \pm 0.$$

Подставляя представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$2\omega W'_{0X} + \omega'_X W_0 + 2\Omega_0 W'_{0T} + \Omega'_{0T} W_0 = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \omega &= i \operatorname{sign} x A(\Omega_0), \\ \omega'_X &= \omega'_\Omega \Omega'_X = -\omega'_\Omega \omega'_T. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$W'_{0X} = -\frac{2\Omega_0 W'_{0T} + (-\omega'_\Omega \omega'_T + \Omega'_{0T}) W_0}{2i \operatorname{sign} x A(\Omega_0, T)},$$

$$[W'_{0X}] = -\frac{\Lambda_2 W_0 + \Lambda_1 W'_{0T}}{iA(\Omega_0)},$$

$$\Lambda_1 \equiv 2\Omega_0,$$

$$\Lambda_2 \equiv A'_\Omega(\Omega_0)A'_T(\Omega_0) + \Omega'_{0T} = \frac{\Omega_0^2 \Omega'_{0T}}{1 - \Omega_0^2} + \Omega'_{0T}.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Приравнявая выражения для $[W_{0X}']$, получаем уравнение для $\bar{W}_0(T) \equiv W_0(0, T)$:

$$M(2\Omega_0 \bar{W}'_{0T} + \Omega'_{0T} \bar{W}_0) = -\frac{\Lambda_2 \bar{W}_0 + \Lambda_1 \bar{W}'_{0T}}{A(\Omega_0)}$$

или

$$\bar{W}'_{0T} + \left(\frac{\Omega'_{0T}}{2\Omega_0} + \frac{\Omega_0 \Omega'_{0T}}{2(1 - \Omega_0^2)(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \right) \bar{W}_0 = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \exp \left(- \int \frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} - \int \frac{\Omega_0 d\Omega_0}{2(1 - \Omega_0^2)(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \right)$$

Вычисляя интегралы, находим:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \frac{(1 - \Omega_0^2)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2} (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})^{1/2}}.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Комбинируя найденное решение с комплексно-сопряженным, находим

$$u(0, t) \sim C_0 \frac{(1 - \Omega_0^2)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2} (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})^{1/2}} \sin \left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0 \right).$$

Константы C_0 и D_0 должны быть определены приравнением найденного решения при $t = 0$ к решению задачи в нулевом приближении (при $\epsilon = 0$):

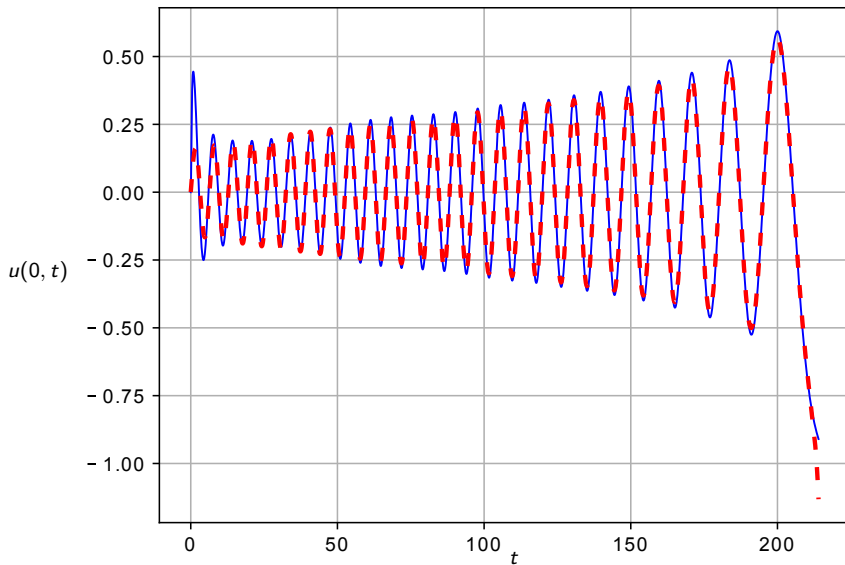
$$u(0, t) = \frac{\sqrt{1 - \Omega_0^2} |p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0 (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \sin(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)) + o(1).$$

Находим:

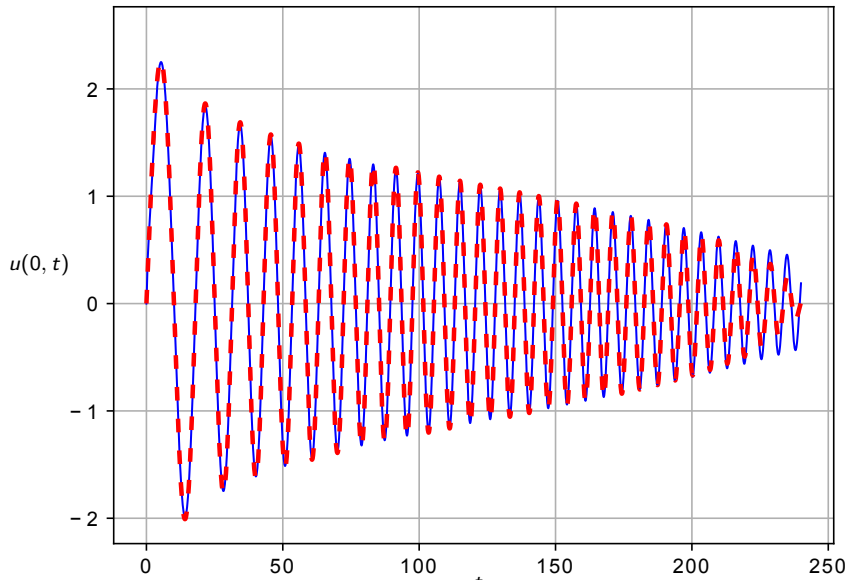
$$C_0 = \frac{(1 - \Omega_0^2(0))^{1/4} |p_F(\Omega_0(0))|}{\Omega_0^{1/2}(0) (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2(0)})^{1/2}},$$

$$D_0 = \arg p_F(\Omega_0(0)).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: ссылки

Впервые подход был предложен С.Н. Гавриловым



[С.Н. Гаврилов, Д.А. Индейцев.](#)

Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании — подвижное инерционное включение”

[Прикладная математика и механика, Т.66. №5, 2002. С. 864–873.](#)

Рассмотренная задача исследована в статье



[S.N. Gavrilov, E.V. Shishkina, Yu.A. Mochalova.](#)

An infinite-length system possessing a unique trapped mode versus a single degree of freedom system: a comparative study in the case of time-varying parameters.

[In book: Editors: Altenbach H. et al. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Springer, 2019.](#)