XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

5. ***Звезда*** *состоит из 100 горючих шнуров OA_1, ..., OA_{100}, соединенных в единственной точке O. Время горения каждого шнура не зависит от того, с какого конца его поджигают, а скорость горения не обязана быть постоянной. Если поджечь звезду в точке A_1, она полностью сгорит за 201 секунду, если в точке A_2 — за 202 секунды, ..., если в точке A_{99} — за 299 секунд. За какое время звезда полностью сгорит, если ее поджечь в точке A_{100}?* (И. Рубанов)

Ответ. За 299 секунд.

Решение. Пусть OX и OY — фитили с самым большим (равным x) и вторым по длительности (равным y) временем горения соответственно. Очевидно, что если поджечь звезду в точке X или в точке Y, то время ее горения будет одним и тем же, равным $x+y$, и это наибольшее возможное время горения звезды. Это время должно быть среди чисел 201, 202, ..., 299, и оно — наибольшее из них, то есть равно 299.

6. *Существует ли такое натуральное число n, что неполные частные от деления n на все натуральные числа от 10 до 1000 включительно — это различные нечетные простые числа, а остатки — составные числа (не обязательно различные)? Напомним, что 0 не является составным числом.* (С. Берлов)

Ответ. Не существует.

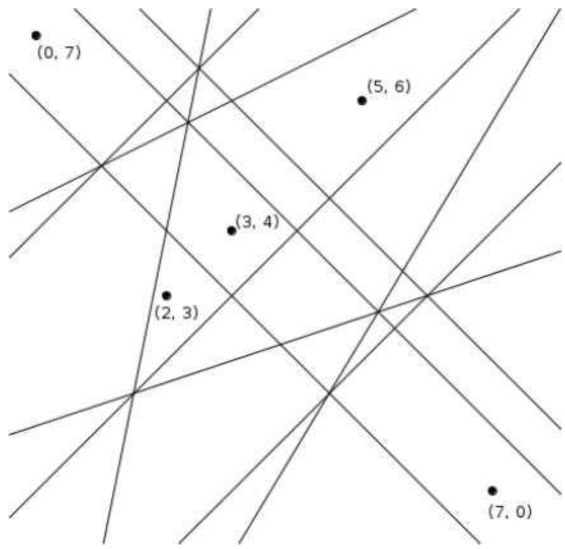
Первое решение. Будем делить с остатком число n на числа от 10 до 20. Этих чисел 11. Остатки от деления на них меньше 20, а среди таких чисел только 10 составных: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Значит, при делении на какие-то числа a и b получатся два одинаковых остатка, то есть $n = ap+r = bq+r$, где a и b не больше 20, а p и q — различные простые. Но тогда $ap = bq$, и b делится на p, а a — на q. То есть p и q тоже не больше 20. Но тогда $n < 20^2 = 400$ и при делении на числа, большие 400, будет давать неполное частное 0.

Второе решение. По условию все остатки — составные числа, меньшие 1000. Таких составных чисел меньше, чем 990, поэтому при делении на какие-то числа a и b получатся одинаковые остатки. Тогда $ap = bq$, где p и q — соответствующие неполные частные. Так как числа p и q — простые и различные, $a = pt$ и $b = qt$ для некоторого натурального t. Поэтому $a-b > q–p$. Неполные частные от деления на все числа от a до b лежат в отрезке $[p, q]$ и различны. Значит, они принимают все значения от p до q. Но между нечетными простыми числами p и q есть хотя бы одно четное число, которое по условию не может равняться такому неполному частному.

7. *У ювелира есть 100 золотых монет. Покупатель знает лишь, что веса этих монет равны 1, 2, ..., 100 г в каком-то порядке, а ювелир знает, какая сколько весит. Как ювелиру за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать покупателю, что известная ювелиру однограммовая монета действительно весит 1 г, но при этом не дать покупателю возможности определить вес никакой другой монеты?* (К. Кноп)

Решение. Суммарный вес 9 монет не превосходит 92+...+100 = 864. Суммарный вес 41 монеты не меньше, чем 1+...+41 = 861. Легко проверить, что, кроме указанного, наборов из 41 монеты с суммарным весом меньше, чем 864, есть еще только три: 1, ., 40, 42; 1, ., 40, 43 и 1, ., 39, 41, 42. При этом только два последних набора обладают тем свойством, что имеются два входящих в набор числа $a < b$ и одно число c, не входящее в набор, такие, что $a+c < b$, и для каждого набора такая тройка чисел только одна: 1+41 < 43 и 1+40 < 42.
Первым взвешиванием сравним монеты 1, ., 40, 43 с монетами 92, ., 100. Так как чаша с 9 монетами перевесила, на другой чаше может быть только один из четырех описанных выше наборов из 41 монеты. Вторым взвешиванием сравним монеты 43 и 41+1. Так как чаша с одной монетой перевесила, на другой чаше может быть только набор 1+41 или 1+40. При этом в обоих случаях монета 1 использовалась в первом взвешивании, а монета, лежащая на чаше с ней, нет. Поэтому покупатель сможет определить монету 1, а понять, взвешивалась с ней монета 40 или 41, не сможет. Очевидно, он не сможет определить и ни одну из других монет.

8. *На плоскости отмечено* n *точек. Если провести серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему любые две отмеченные точки, то с одной стороны от него лежит одна отмеченная точка, а с другой стороны от него — n–1 отмеченная точка (на самом серединном перпендикуляре отмеченных точек нет). Каково наибольшее возможное значение* n*?*
(М. Иванов)



Ответ. 5. **Пример**. Точки (0,7), (2,3), (3,4), (5,6), (7,0) на координатной плоскости. Проверка не составляет труда (см. рисунок).

Оценка. **Первый способ**. Пусть AB — кратчайший отрезок между отмеченными точками. Рассмотрим любые две из оставшихся точек: C и D. Если провести серединный перпендикуляр к AC, то A и B окажутся от него по одну сторону, а C — по другую. Тогда D окажется в той же полуплоскости, что и A, откуда $AD < CD$. Аналогично доказываются неравенства $AC < CD$, $BD < CD$ и $BC < CD$. Следовательно, $ZCAD > 60°$ и $ACBD > 60°$. Далее, проведем серединный перпендикуляр к AB. Не умаляя общности, пусть все отмеченные точки, кроме A, находятся по одну сторону относительно этого перпендикуляра. Тогда проведем из A

лучи во все *n-2* отмеченные точки, кроме A и B, и упорядочим эти лучи по часовой стрелке. Получится n-3 угла. По доказанному выше, все эти углы больше 60°. Но все вместе они образуют угол, меньший развернутого, поскольку все проведенные лучи лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через A перпендикулярно AB. Поэтому $n-3 < 2$, а $n < 5$.

Второй способ. Допустим, отмечено не менее 6 точек.

Лемма 1. Для любого конечного набора точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, существует выпуклый многоугольник с вершинами в точках набора такой, что все остальные точки набора находятся внутри него или на его сторонах.

Доказательство. Проведем индукцию по количеству n точек в наборе. При $n = 3$ утверждение леммы очевидно. Пусть оно уже доказано для $n = k > 3$. При $n = k+1$ отбросим некоторую точку M набора так, чтобы оставшиеся k точек не лежали на одной прямой, и рассмотрим многоугольник Δ_0, удовлетворяющий для них условию леммы. Если точка M лежит внутри или на стороне многоугольника Δ_0, то все доказано. В противном случае найдется угол с вершиной в точке M такой, что его стороны проходят через вершины P и Q многоугольника Δ_0, и Δ_0 целиком лежит внутри него. Присоединив к Δ_0 треугольник MPQ, получим искомый многоугольник.

Соединим каждую пару отмеченных точек отрезком и поставим на каждом таком отрезке стрелку так, чтобы ее начало находилось с одной стороны от серединного перпендикуляра к отрезку, а все остальные отмеченные точки — с другой. На одной прямой может лежать не больше трех отмеченных точек: иначе по обе стороны от серединного перпендикуляра к двум средним из них будет лежать хотя бы по две отмеченных точки. Поэтому для нашего набора отмеченных точек существует многоугольник Δ, удовлетворяющий условиям леммы 1.

Лемма 2. У многоугольника Δ найдется вершина, в которой все стрелки — входящие.

Доказательство. Заметим, что три стрелки не могут образовывать цикл: если $A \to B \to C \to A$, то $AB < AC < BC < AB$ — противоречие. Значит, если $A \to B \to C$, то $A \to C$. Поэтому не может быть и цикла длины больше 3: последовательно «срезая» у него по одной вершине, в конце концов получим цикл длины 3. Пойдем по любой стрелке, из ее конца — по одной из входящих из нее стрелок и т. д. Мы не сможем прийти ни в одну из уже пройденных точек, так как тогда получится цикл, и потому, так как вершин у Д конечное число, в конце концов придем в точку, где нет исходящих стрелок.

Заметим, что внутри Δ и на его сторонах может лежать не больше одной отмеченной точки — иначе по обе стороны серединного перпендикуляра к отрезку с концами в этих точках будет, кроме них, хотя бы по одной вершине многоугольника Δ. Значит, у Δ не меньше пяти вершин. Возьмем вершину A, в которую входят стрелки из всех остальных. В любом треугольнике ABC, где B и C — вершины многоугольника Δ, $BC > AB$ и $BC > AC$. Значит, $\angle ABC > 60°$. Но тогда получается, что угол при вершине A выпуклого n-угольника Д, где $n > 5$, можно разбить на $n–2 > 3$ таких угла между соседними стрелками, и он окажется больше 180°.

Комментарий. Многоугольник, описанный в лемме 1, называется *выпуклой оболочкой* набора точек на плоскости. Лемма 2 — частный случай известного утверждения о полных ориентированных графах без ориентированных циклов