# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## I ТУР. 6 КЛАСС.

**1.** У Саши в гербарии четыре вида листьев — красные кленовые, жёлтые кленовые, жёлтые березовые и жёлтые липовые. Жёлтых листьев у Саши столько же, сколько кленовых, а березовых — столько же, сколько липовых, но на 5 меньше, чем красных. Сколько у Саши липовых листьев?

**2.** В клетчатой доске $9 \times 9$ просверлили 8 дырок во всех восьми узлах, лежащих на диагонали, соединяющей левый нижний и правый верхний угол. Затем доску распилили по линиям сетки на 11 деталей, причем каждая деталь имеет форму прямоугольника и не содержит дырок внутри (все дырки оказались на границах деталей). Обязательно ли найдутся две детали равной площади?

**3.** По кругу написаны цифры: 8, 4, 2, 1, 0, 5, 6 (именно в таком порядке по часовой стрелке). Тая записывает многозначное число, выписывая цифры по одной, двигаясь по часовой стрелке, начиная с цифры 8. Выписав несколько цифр, она останавливается. Например, у неё может получиться число 842, или число 842105684, или число 84210568421056842105. Могло ли у Таи получиться простое число?

**4.** В парадной жилого дома сто квартир. На первом этаже расположены квартиры с номерами 1, 2, 3, 4, на втором — 5, 6, 7, 8 и т. д. Назовём две квартиры *соседними*, если они находятся на одном этаже или если их номера отличаются на 4 (в этом случае одна располагается над другой).

В каждой квартире живёт один человек, при этом у каждого жильца в соседних квартирах есть хотя бы два его однофамильца. Какое наибольшее число разных фамилий может быть у жителей парадной?

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## I ТУР. 7 КЛАСС.

**1.** Можно ли разрезать квадрат $10 \times 10$ по клеточкам на 88 прямоугольников так, чтобы из каких-то пяти из них удалось составить прямоугольник $3 \times 6$? (Прямоугольники при этом можно поворачивать.) Не забудьте обосновать ответ.

**2.** Филле, Рулле и Оскар взяли из ящика несколько конфет (в ящике ещё остались конфеты), причём у Оскара оказалось конфет больше, чем у Филле и Рулле вместе. Тогда Филле взял половину конфет, оставшихся в ящике. А Рулле забрал треть конфет Оскара. И оказалось, что у Оскара конфет стало в три раза меньше, чем у Филле и Рулле вместе. Докажите, что изначально эти трое взяли не более 60% находившихся в ящике конфет.

**3.** Петя разделил число $N$ с остатком на 31, 32, 33, 34 и получил остатки 1, 4, 7, 10 в некотором порядке. Вася разделил то же самое число $N$ на 85, 86, 87, 88 и получил остатки 1, 2, 5, 8 в некотором порядке. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**4.** На круговом шоссе расположено 15 столбов. Антон посчитал длины всех кратчайших путей между ними (по шоссе) и обнаружил, что все они различны и каждое из них составляет целое число километров. Докажите, что длина шоссе

а) не меньше 210 км;

б) больше 210 км.

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## I ТУР. 8 КЛАСС.

**1.** Можно ли разрезать квадрат $10 \times 10$ по клеточкам на 88 прямоугольников так, чтобы из каких-то пяти из них удалось составить прямоугольник $3 \times 6$? (Прямоугольники при этом можно поворачивать.)

**2.** На доске написаны три положительных числа. Произведение первого и второго числа отличается от среднего арифметического их квадратов на $1/2$. Произведение второго и третьего числа отличается от среднего арифметического их квадратов на 2. На сколько может отличаться произведение первого и третьего числа от среднего арифметического их квадратов? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

**3.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников $ABD$ и $BCD$ равны. Известно, что $\angle ADB = 90^\circ$. Точка $M$ — середина стороны $BC$. Докажите, что $MC + CD \geq AM$.

**4.** Натуральное число $m$ называется *особым*, если существует такой набор из 80 последовательных натуральных чисел, что среди них есть число $m$, а каждое из остальных чисел этого набора взаимно просто с $m$. Какой наибольший НОД может быть у двух различных особых чисел, не превосходящих 1900?

**5.** Пусть $S$ — бесконечная строка из цифр. Для натурального $k$ обозначим через $S_k$ бесконечную строку, получаемую из исходной строки выписыванием её $k$-й, $2k$-й, $3k$-й, $4k$-й, ... цифр. Известно, что при любых натуральных $n > m > 7$ строки $S_n$ и $S_m$ не совпадают. Может ли оказаться, что при некотором $n > 7$ строка $S_n$ совпадает со строкой $S_7$?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

---

**1.** В ряд выписывают числа: 4, 11, 13, 15, 17, ... Каждое число, начиная с четвертого, равно наименьшей из всех возможных сумм двух уже написанных (различных) чисел, которая ещё не встречается в этом ряду. Какое число окажется на 2025-м месте в этом ряду? Не забудьте обосновать ответ.

**2.** Красный и синий баки заполняются водой — каждый своим шлангом. Шланги были включены одновременно, а когда красный бак заполнился на одну пятую, шланги поменяли местами. После этого оба бака заполнились одновременно. Объём синего бака 100 л. Какой наибольший объём мог иметь красный бак? (Скорость вытекания воды из каждого шланга постоянна, эти две скорости не обязательно равны.)

**3.** Натуральное число $k$ называется *особым*, если существует такой набор из пятидесяти последовательных натуральных чисел, что среди них есть число $k$, а каждое из остальных чисел этого набора взаимно просто с $k$. Какой максимальный НОД может быть у двух различных особых чисел, не превосходящих 2000?

**4.** Федя выбирает такие натуральные числа $n$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 25n$. Дима хочет разместить в таблице с 100 строками и $n$ столбцами $n$ связных клетчатых фигурок так, чтобы фигурки не имели общих клеток и при всех $i$, $1 \leq i \leq n$, выполнялось свойство:

*$i$-я фигурка состоит из $a_i$ клеток*
*и содержит хотя бы одну клетку $i$-го столбца.*

Может ли Федя выбрать такие числа, чтобы Диме не удалось выполнить своё желание? (Фигурка называется *связной*, если от любой ее клетки до любой другой можно дойти, переходя из клетки в соседнюю по стороне и не выходя за пределы фигурки.)

**5.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BD$. На стороне $AB$ отмечена точка $E$. Известно, что $\angle ABD = 2\angle CBD$, $\angle BED = 2\angle ACB$ и $\angle BDC = 117°$. Описанная окружность треугольника $ACE$ пересекает отрезок $BC$ в точке $F$. Точка $M$ — середина отрезка $EF$. Найдите $\angle BDM$.

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## I ТУР. 10 КЛАСС.

**1.** Даны десять ненулевых вещественных чисел $x_1$, $x_2$, ..., $x_{10}$ из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Известно, что

$$\operatorname{tg}(x_1) \cdot (x_1 - x_2) = \operatorname{tg}(x_2) \cdot (x_2 - x_3) = \ldots = \operatorname{tg}(x_{10}) \cdot (x_{10} - x_1) = 2025.$$

Найдите $\operatorname{ctg}(x_1) + \operatorname{ctg}(x_2) + \ldots + \operatorname{ctg}(x_{10})$.

**2.** Красный и синий баки заполняются водой — каждый своим шлангом. Шланги были включены одновременно, а когда красный бак заполнился на одну пятую, шланги поменяли местами. После этого оба бака заполнились одновременно. Объем синего бака 100 л. Какой наибольший объем мог иметь красный бак? (Скорость вытекания воды из каждого шланга постоянна, эти две скорости не обязательно равны.)

**3.** Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle B = 80^\circ$, $\angle C = 38^\circ$. Известно, что окружность $\omega$, проходящая через точки $B$ и $C$ и центр описанной окружности треугольника $ABC$, касается прямой $CD$. Из точки $D$ к окружности $\omega$ проведена вторая касательная $DE$. Найдите угол $AEC$.

**4.** В городе есть несколько клубов. Два клуба назовём похожими, если у них есть общий член. Оказалось, что у каждого клуба ровно два похожих, а каждый житель состоит или в одном клубе, или в двух похожих. У мэра есть два списка. В первом записаны численности всех клубов. Во втором для каждых двух похожих клубов написано количество людей, состоящих одновременно в них обоих. Оказалось, что для любого числа из первого списка во втором списке найдется в два раза меньшее число. Докажите, что есть два клуба, в которых поровну членов.

**5.** У каждого из чисел $\frac{1}{2023}, \frac{2}{2023}, \ldots, \frac{2022}{2023}$ нашли седьмую цифру после запятой в десятичной записи. Какая цифра — 6 или 7 — встретилась больше раз, и на сколько?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.

---

**1.** Бригада из десяти землекопов должна копать котлован. Все они копают с одинаковой постоянной скоростью. Землекоп Чиклин пришел на работу к 9:00 — к началу рабочего дня. Остальные землекопы подходили по одному — каждый опоздал на какое-то время, но в итоге все пришли. Землекопы одновременно закончили работать в 18:00. Из-за опозданий они успели сделать лишь ту работу, которая по плану должна была завершиться в 15:00. (Перерывов в работе не было и не планировалось.) Докажите, что между приходом какого-то землекопа и приходом следующего прошло не менее 40 минут.

**2.** Точки $M$, $K$ и $N$ — середины ребер $AB$, $BC$ и $CD$ параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (не обязательно прямоугольного). Известно, что $A'N = B'M$. Докажите, что $AC \perp B'K$.

**3.** Назовем натуральное число $a$ *интересным*, если существует такой набор из $2 \cdot (100!)^{50} - 105$ последовательных натуральных чисел, что среди них есть число $a$, а каждое из остальных чисел этого набора взаимно просто с $a$. Докажите, что любое интересное число, меньшее $(100!)^{100}$, является простым. (Через 100! обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.)

**4.** В городе есть несколько клубов. Два клуба назовём *похожими*, если у них есть общий член. Оказалось, что у каждого клуба ровно два похожих, а каждый житель состоит или в одном клубе, или в двух похожих. У мэра есть два списка. В первом записаны численности всех клубов. Во втором для каждых двух похожих клубов написано количество людей, состоящих одновременно в них обоих. Оказалось, что для любого числа из первого списка во втором списке найдется в два раза меньшее число. Докажите, что есть два клуба, в которых поровну членов.

**5.** Федя выбирает такие натуральные числа $n$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 2n$. Дима хочет разместить в таблице с 2025 строками и $n$ столбцами $n$ связных клетчатых фигурок так, чтобы фигурки не имели общих клеток и при всех $i$, $1 \leq i \leq n$, выполнялось свойство:

*$i$-я фигурка состоит из $a_i$ клеток*
*и содержит хотя бы одну клетку $i$-го столбца.*

Может ли Федя выбрать такие числа, чтобы Диме не удалось выполнить своё желание? (Фигурка называется *связной*, если от любой ее клетки до любой другой можно дойти, переходя из клетки в соседнюю по стороне и не выходя за пределы фигурки.)