САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

1. Окружность ω, построенная на боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает боковую сторону BC повторно в точке D. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку CD касается окружности ω.

2. Положительные числа a_1, a_2, …, a_{100} таковы, что

$$a_1 \cdot (a_2^2 + 1) = a_2 \cdot (a_3^2 + 1) = a_3 \cdot (a_4^2 + 1) = \ldots = a_{100} \cdot (a_1^2 + 1).$$

Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди них?

3. За круглым столом сидят n детей, а на столе стоит коробка, полная конфет «Белочка». Вначале каждый из детей берёт из коробки не менее одной и не более n конфет. После этого каждый одну свою конфету-белочку оставляет себе, а остальные взятые из коробки конфеты раздаёт по одной следующим после него по часовой стрелке детям. Сколько у детей есть способов взять конфеты, чтобы в результате у всех оказалось поровну конфет? (Два способа считаются различными, если хотя бы один ребёнок берёт в этих способах разное число конфет.)

4. Пусть a и $b > 1$ — натуральные числа, $a + b = 2029$. Из числа $100 \cdot 2026^2$ вычитают его остаток при делении на a, из полученного числа вычитают его остаток при делении на b, из результата вычитают его остаток при делении на 2026. Затем снова вычитают остаток при делении на a и т. д. по циклу. После какого наименьшего количества вычитаний могло получиться число 0?

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Лягушка покрасила точки координатной прямой в два цвета. Кузнечик, увидев раскраску, записал на бумажке рациональное число $a > 0$, положил бумажку в конверт и отдал лягушке. Лягушка отвернулась, и кузнечик стал прыгать по числовой прямой, начиная с точки 0:

$$0 \to a \to 2a \to 3a \to 4a \to \ldots$$

После каждого прыжка кузнечик сообщает лягушке цвет точки, в которой он приземлился. Могла ли лягушка придумать такую раскраску, чтобы в какой-нибудь момент она смогла бы угадать число a (и убедиться в своей правоте, вскрыв конверт)?

6. Окружность с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке A_1. Вневписанная окружность треугольника ABC с центром в точке J касается стороны BC в точке A_2. Описанные окружности трегольников AIA_1и AJA_2 повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $BC \parallel XY$.

7. В Средиземье проживают эльфы, гномы и хоббиты. При этом имеется a_1 способов выбрать знакомых друг с другом эльфа и гнома, a_2 способов выбрать знакомых эльфа и хоббита, и a_3 способов выбрать знакомых гнома и хоббита. Докажите, что количество способов выбрать попарно друг с другом знакомых эльфа, гнома и хоббита не превосходит $\sqrt{a_1 a_2 a_3}$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Дан квадрат со стороной 1. При каком наибольшем a верно, что для любых двух точек P и Q на периметре квадрата, для которых $PQ < a$, найдётся равносторонний треугольник PQR, где точка R расположена внутри квадрата?

2. Назовём уравнение *арифметическим*, если оно имеет ровно 4 решения, образующих арифметическую прогрессию. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что уравнение

$$f\big(f(x)\big) = f\big(8f(x)\big)$$

— арифметическое. Докажите, что хотя бы одно из уравнений

$$f\big(f(x)\big) = f\big(-82f(x)\big) \quad \text{или} \quad f\big(f(x)\big) = f\big(-2f(x)\big)$$

тоже арифметическое.

3. За круглым столом сидят n детей, а на столе стоит коробка, полная конфет «Белочка». Вначале каждый из детей берёт из коробки не менее одной и не более n конфет. После этого каждый одну свою конфету-белочку оставляет себе, а остальные взятые из коробки конфеты раздаёт по одной следующим после него по часовой стрелке детям. Сколько у детей есть способов взять конфеты, чтобы в результате у всех оказалось поровну конфет? (Два способа считаются различными, если хотя бы один ребёнок берёт в этих способах разное число конфет.)

4. Число x представлено как чисто периодическая десятичная дробь с наименьшим периодом длины A. То же число x, записанное как двоичная дробь, имеет наименьший период длины B, а как пятеричная — длины C. Докажите, что

$$\big(\text{НОК}(A, B, C)\big)^2 \cdot \text{НОД}(A, B, C) = ABC.$$

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. На медиане AD треугольника ABC отмечена точка E, а на продолжении стороны AC за точку C — точка F, причем $\angle ABF = 90^\circ$ и $\angle DEF = \angle CBF$. Докажите, что ED — биссектриса угла BEF.

6. Карабас разложил на половине полей доски 20×20 по одной монете. Лиса $\mathcal{A}$ и кот $\mathcal{B}$ сидят рядом, у $\mathcal{A}$ завязаны глаза. За один ход $\mathcal{A}$ называет номер строки, затем $\mathcal{B}$ называет поле в этой строке. Если там лежит монета, Карабас тут же вручает ее $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в качестве выигрыша, а если нет — забирает все выигранные ими к этому моменту монеты. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполняют ходы, пока доска не опустеет. $\mathcal{B}$ не имеет права называть одно и то же поле два раза (но $\mathcal{A}$ может называть одну и ту же строку несколько раз). $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ знали эти правила и могли заранее договориться о своих действиях. Каков их максимально возможный гарантированный выигрыш?

7. Верно ли, что для любого натурального N найдутся натуральные числа a, b такие, что

$$\text{НОД}(a^4 + 15, b^4 + 15) > (a - b)^4 > N?$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Набор клеток на прямоугольной доске назовем *гистограммой*, если вместе с любой клеткой в нем содержатся все клетки того же столбца, лежащие ниже нее. Докажите, что если в гистограмме количества клеток в любых двух соседних столбцах либо равны, либо отличаются в 12 раз, а общее количество всех клеток гистограммы делится на 11, то эту гистограмму можно разрезать на прямоугольники 1×11 (прямоугольники можно поворачивать).

2. Известно, что $x \cdot 2^y = y \cdot 2^x = 1$. Докажите, что $x = y$.

3. На доске выписаны слева направо последние ненулевые цифры чисел $1^1, 2^2, 3^3$, $\ldots$ Докажите, что эта последовательность не является периодической ни с какого места.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AD и CD выбраны точки P и Q, причем $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}\angle PBQ$. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y так, что $DX \parallel BQ$ и $DY \parallel BP$. Докажите, что если четырёхугольник $APQC$ вписанный, то и четырёхугольник $AXYC$ вписанный.

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дано n-элементное множество X, где $n > 1$. Набор его подмножеств называется *порождающим*, если с помощью пересечений и объединений из них можно получить любое подмножество множества X. На доске написаны два множества: $\varnothing$ и X. Два игрока по очереди выписывают на доску подмножества множества X (все множества на доске должны быть различными). Игрок, после хода которого подмножества на доске образуют порождающий набор, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его соперник?

6. На плоскости проведено $n > 1$ прямых общего положения, разделяющих плоскость на несколько областей (некоторые из них неограниченны). Каждая из этих прямых разбита остальными прямыми на n промежутков (отрезков и лучей). Докажите, что на всех таких промежутках можно расставить числа из множества $\{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$ так, чтобы сумма чисел на границе любой области была равна нулю.

7. Верно ли, что для любого натурального N найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$\text{НОД}(a^4 + 15, b^4 + 15) > (a - b)^5 > N?$$