



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
16 НОЯБРЯ 2024 Г. I ТУР 11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Каждое из 170 натуральных чисел равно сумме чисел, обратных к 169 остальным. Найдите эти числа. (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота BH , биссектриса BL и медиана BM (точки A, H, L, M, C расположены на прямой именно в таком порядке). Оказалось, что $MH = 1$ и радиус описанной окружности треугольника равен 2. Найдите угол $\angle ALB$.

3. На доске написано чётное количество различных вещественных чисел. Дима, Витя и Саша разбили числа на пары (каждый по-своему, разные мальчики не могли выбрать одну и ту же пару), после чего перемножили числа в парах. Каждое из полученных произведений оказалось равно 2023, 2024 или 2025. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

4. Сумма целых чисел a и b не равна 1. Известно, что число $n^2 - 2an - b$ не делится на $a + b - 1$ ни при каком целом n . Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 - 2bx - a$ не имеет целых корней.

5. Куб со стороной $2^{1\,000\,000}$ разбит на единичные кубики. В каждом кубике написана цифра 0, 1 или 2. Назовем строку из цифр 0, 1 и 2 *хорошей*, если ее можно получить, начав с некоторого кубика и переходя на каждом шагу к соседнему (по грани) кубику. Например, строка 0102 хорошая, если можно из кубика с цифрой 0 попасть в кубик с цифрой 1, из него — в кубик с нулем (возможно, начальный), а из него — в кубик с двойкой.

Оказалось, что любая строка длины не более 10 000 — хорошая. Один из кубиков удалили, из-за чего некоторые строки перестали быть хорошими. Докажите, что осталось не менее $2 \cdot 6^{1012} - 2^{2024}$ хороших строк длины 2024.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
16 НОЯБРЯ 2024 Г. I ТУР 11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Каждое из 290 натуральных чисел равно сумме чисел, обратных к 289 остальным. Найдите эти числа. (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CD , биссектриса CE и медиана CF (точки B, D, E, F, A расположены на прямой именно в таком порядке). Оказалось, что $DF = \sqrt{2}$ и радиус описанной окружности треугольника равен 2. Найдите угол $\angle AEC$.

3. На доске написано чётное количество различных вещественных чисел. Вика, Катя и Наташа разбили эти числа на пары (каждая своим способом, разные девочки не могли выбрать одну и ту же пару), после чего сложили числа в парах. Каждая из полученных сумм оказалась равна 2024, 2025 или 2026. Докажите, что как минимум одна из девочек ошиблась.

4. Сумма целых чисел a и b не равна -1 . Известно, что квадратный трехчлен $x^2 + 2ax + b$ имеет целый корень. Докажите, что при некотором целом n число $n^2 + 2bn + a$ делится на $a + b + 1$.

5. Куб со стороной $2^{100\,000}$ разбит на единичные кубики. В каждом кубике написана буква А, Б или В. Назовем слово из букв А, Б и В *интересным*, если можно получить это слово, начав с некоторого кубика и переходя на каждом шагу к соседнему (по грани) кубику. Например, слово АБАВ интересное, если можно из кубика с буквой А попасть в кубик с буквой Б, из него — в кубик с буквой А (возможно, начальный), а из него — в кубик с буквой В.

Оказалось, что любое слово из не более чем 10 000 букв А, Б и В — интересное. Один из кубиков удалили, из-за чего некоторые слова перестали быть интересными. Докажите, что осталось не менее $2 \cdot 6^{1013} - 2^{2026}$ интересных слов из 2026 букв.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru