САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

4 декабря 2021 г. I тур 11 класс 1 вариант

1. Дима едет по прямому шоссе из пункта А в пункт Б. Из пункта Б по направлению к Диме тянется пробка, длина которой увеличивается со скоростью v км/ч. Скорость движения машины в пробке равна 10 км/ч, а вне пробки — 60 км/ч. Навигатор в машине в каждый момент времени показывает, сколько времени осталось Диме ехать до пункта Б, исходя из длины пробки в этот момент. В некоторый момент (еще не доехав до пробки) Дима обнаружил, что навигатор показывает то же время, что и несколько минут назад. Найдите v.

2. Сергей выписал числа от 500 до 1499 в строчку в некотором порядке. Под каждым числом, кроме самого левого, он написал НОД этого числа и его левого соседа, получив вторую строчку из 999 чисел. Далее он по тому же правилу получил из неё третью строчку из 998 чисел, из неё — четвертую из 997 чисел и т. д. Остановился он, когда впервые все числа в очередной строчке оказались равны единице. Какое наибольшее количество строчек он мог выписать к этому моменту?

3. В правильном 20-угольнике отмечены четыре последовательные вершины A, B, C и D. Внутри него выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle BEC = 2\angle CED$. Найдите угол AEB.

4. Даны различные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ степени 3. Оказалось, что многочлены $f(f(x))$ и $(g(x))^3$ равны, а также равны многочлены $f(g(x))$ и $(f(x))^3$. При этом $f(0) = 1$. Найдите все такие пары многочленов f, g.

5. Экзамен состоит из $N \geqslant 3000$ вопросов. Каждый из 31 ученика выучил ровно 3000 из них, причем любой вопрос знает хотя бы 29 учеников. Перед экзаменом учитель открыто выложил все карточки с вопросами по кругу. Он велел ученикам указать один из вопросов, и объяснил, что он выдаст этот вопрос первому по алфавиту ученику, следующий по часовой стрелке вопрос — второму ученику, следующий — третьему и т. д. (каждому ученику по одному вопросу). Однако, ученики не смогли указать такую карточку, чтобы каждый из них получил известный ему вопрос. При каком наименьшем N такое могло произойти?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

4 декабря 2021 г. I тур 11 класс 2 вариант

1. Сергей едет по прямому шоссе из пункта А в пункт Б. Из пункта Б по направлению к Сергею тянется пробка, длина которой увеличивается со скоростью 14 км/час. Скорость движения машины в пробке равна v км/ч, а вне пробки — 84 км/ч. Навигатор в машине в каждый момент времени показывает, сколько времени осталось Сергею ехать до пункта Б, исходя из длины пробки в этот момент. В некоторый момент (еще не доехав до пробки) Сергей обнаружил, что навигатор показывает то же время, что и несколько минут назад. Найдите v.

2. Дима выписал числа от 1 до 2000 в строчку в некотором порядке. Под каждым числом, кроме самого правого, он написал НОД этого числа и его правого соседа, получив вторую строчку из 1999 чисел. Далее он по тому же правилу получил из неё третью строчку из 1998 чисел, из неё — четвертую из 1997 чисел и т. д. Остановился он, когда впервые все числа в очередной строчке оказались равны единице. Какое наибольшее количество строчек он мог выписать к этому моменту?

3. В правильном 30-угольнике отмечены четыре последовательные вершины P, Q, R и S. Внутри него выбрана точка T так, что $PT = TS$ и $\angle QTR = 2\angle PTQ$. Найдите угол RTS.

4. Даны различные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ степени 3. Оказалось, что многочлены $g(g(x))$ и $-(f(x))^3$ равны, а также равны многочлены $g(f(x))$ и $-(g(x))^3$. При этом $g(0) = 8$. Найдите все такие пары многочленов f, g.

5. За игровым столом супер-игры «Что? Где? Когда?» по кругу лежат $N \geqslant 4000$ карточек с вопросами. Каждый из 21 знатока знает ответ ровно на 4000 из них, причем на любой вопрос знает ответ хотя бы 19 знатоков. Знатоки видят все вопросы. Ведущий попросил игроков указать одну из карточек; на вопрос с этой карточки должен ответить первый знаток, на следующий по часовой стрелке вопрос — второй знаток, на следующий — третий и т. д. (каждый знаток отвечает на один вопрос). Однако, игроки не смогли указать такую карточку, чтобы каждый из них получил известный ему вопрос. При каком наименьшем N такое могло произойти?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru