САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 9 класс.

1. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо неравенство $2x^9+9x^8 \leq 9x^{10}+2$.

2. Докажите, что существует такой набор из 100 попарно различных натуральных чисел, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел в одной из групп делится на сумму чисел в другой группе.

3. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle CAB = \angle FBA$, $\angle ECD = \angle BDC$, $\angle AEF = \angle DFE$, $\angle EAC = \angle FBD$, $\angle ACE = \angle BDF$, $\angle CEA = \angle DFB$. Докажите, что шестиугольник, который образуется при пересечении отрезков AC, BD, CE, DF, EA и FB, является описанным.

4. На столе лежат 30 куч спичек: по 100, 101, 102, ..., 129 спичек. Дима и Саша играют в такую игру: ход состоит в том, что можно взять из любой кучи одну спичку, либо объединить в одну кучу две непустые кучи, количества спичек в которых одной четности. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если начинает Дима? (*К. Кохась*)

Награждение победителей олимпиады состоится 24 апреля в 17.00 в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр. 39)

. . . .

Олимпиада 2003 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. BM — медиана остроугольного треугольника ABC. Касательная в точке A к окружности, описанной около треугольника ABM, и касательная в точке C, к окружности, описанной около треугольника BCM, пересекаются в точке D. Докажите, что точка K, симметричная точке D относительно прямой AC, лежит на прямой BM.

6. Дима и Саша расставляют всеми возможными способами числа от 1 до 64 на шахматной доске. Для каждой расстановки Дима вычисляет произведение чисел в каждой строке, а затем складывает полученные 8 произведений. А Саша вычисляет произведение чисел в каждой из 15 диагоналей, параллельных диагонали $h1$–$a8$ (в частности, первая и пятнадцатая диагонали состоят лишь из одного числа), а затем складывает свои 15 произведений. Докажите, что хотя бы для половины из всех возможных расстановок Димина сумма будет больше Сашиной.

7. Найдите все такие квадратные трехчлены $f(x) = x^2+px+q$ с неотрицательными целыми коэффициентами, что если для некоторых натуральных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ взаимно просты, то a и b также взаимно просты. (*Ф. Петров, А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Костя умножал в столбик два 50-значных числа. Он написал эти числа одно под другим, затем для каждой пары цифр одинакового разряда подсчитал их произведение и выписал полученные 50 произведений в строчку без пробелов в соответствующем порядке. Докажите, что полученное Костей число не равно произведению исходных 50-значных чисел. (*К. Кохась*)

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC + \angle ABD = 90°$. На диагонали BD отмечена точка E такая, что $BE = AD$. Из нее на сторону AB опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $CD + EF < AC$. (*А. Пастор*)

3. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной 2003. Параллельно его сторонам проведены прямые, разбивающие его на 2003^2 правильных треугольничков со стороной 1. Федя и Саша ходят по очереди. Каждый своим ходом обводит фломастером замкнутую ломаную, проходящую по сторонам единичных треугольничков и являющуюся границей выпуклого многоугольника. При этом различные ломаные не должны иметь общих точек. Начинает Федя, проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

(*Д. Карпов, А. Пастор по мотивам задачи Ф. Бахарева*)

4. Дано $n \geq 4$ натуральных чисел. Известно, что сумма квадратов любых $n-2$ из этих чисел делится на произведение двух оставшихся чисел. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы два одинаковых. (*С. Иванов*)

Награждение победителей олимпиады состоится 24 апреля в 17.00 в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр. 39)

. . . .

Олимпиада 2003 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. В стране 1000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что один из концов любой дороги является городом, из которого выходит не более 10 дорог. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

(*Несколько членов Жюри под руководством С. Иванова*)

6. Дана окружность ω и точка P вне нее. Проходящая через P прямая ℓ пересекает ω в точках A и B. На отрезке AB отмечена точка C такая, что $PA \cdot PB = PC^2$. Точки M и N — середины двух дуг, на которые хорда AB разбивает окружность ω. Докажите, что величина $\angle MCN$ не зависит от выбора прямой ℓ. (*Д. Джукич*)

7. Дано простое число p и натуральное число $n \geq p$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольный набор натуральных чисел, а f_k — количество k-элементных подмножеств этого набора, сумма чисел в которых делится на p. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k f_k \,\vdots\, p$. (Мы считаем, что $f_0 = 1$.) (*А. Бадзян*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Докажите, что при положительном x выполняется неравенство

$$4x^{17} + 17x^{15} \leq 17x^{19} + 4\,.$$

2. В пиквикском клубе состояло 100 джентльменов. Мистер Пиквик подсчитал, сколько друзей имеет каждый из оставшихся 99 джентльменов среди этих 99 и записал полученные 99 чисел на карточку в некотором порядке. Аналогичные карточки составили и остальные джентльмены. Все 100 карточек сохранились в архиве до наших дней. Докажите, что можно составить сто первую карточку, на которой написано 100 чисел — количества друзей у каждого из джентльменов.

(*Частный случай известной проблемы Теории Графов*)

3. На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника нашлась такая точка L, что $\angle LBC = \angle LCA = \angle LAB$. Докажите, что длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. (*Ф. Бахарев*)

4. Обозначим число 1000! буквой N. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до N по окружности в таком порядке, чтобы при обходе по часовой стрелке каждое следующее число получалось из предыдущего такой операцией: к числу прибавляют либо 17, либо 28, после чего из результата, возможно, вычитают N? (*С. Иванов*)

Награждение победителей олимпиады состоится 24 апреля в 17.00 в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр. 39)

. . . .

Олимпиада 2003 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что если для натуральных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ взаимно просты, то a и b также взаимно просты. Докажите, что либо $f(0) = 0$, либо существует такое натуральное число $d > 1$, что $f(n) \vdots d$ при всех натуральных n. (*Ф. Петров, А. Храбров*)

6. $ABCD$ — трапеция ($BC \| AD$), H — ортоцентр треугольника ABD, M — середина AD. Оказалось, что HC перпендикулярно BM. X — такая точка на отрезке AB, что $HX = HB$. CX пересекает BD в точке Y. Докажите, что A, X, Y, D лежат на одной окружности. (*Ф. Бахарев*)

7. Существует ли в трехмерном пространстве конечное множество прямых, проходящих через одну точку, в котором каждая прямая перпендикулярна как минимум ста другим прямым из этого множества? (*Ф. Петров*)