ЗАДАЧИ ПО КУРСУ

«Конечные поля и пересыпание песка»

С.В.Дужин, 20.04.2012

Числа в скобках после номера задачи обозначают количество баллов. На «отлично» нужно набрать 12 баллов, на «хорошо» 9, на «удовлетворительно» 6 баллов. Решения в письменном виде показывать лектору лично или посылать по электронной почте.

1 (1). Рассмотрим подмножества $M_k = \{x \in \mathbb{F}_{64} \mid x^k = 1\} \cup \{0\}$ поля $\mathbb{F}_{64}$, где k — делитель числа 63. Какие из них являются подполями поля $\mathbb{F}_{64}$?

2 (1). Составьте список всех слов Линдона порядка 6 и выпишите явно базис соответствующей однородной компоненты свободной алгебры Ли от двух образующих. Отдельно составьте список тех слов Линдона в алфавите 0, 1, которые являются первыми строками циркулянтных невырожденных матриц порядка 6 над полем $\mathbb{F}_2$.

3 (1). Приведите матрицу циклического сдвига порядка 5 над полем $\mathbb{F}_2$ к жордановой нормальной форме в минимальном достаточном для этого расширении поля.

4 (2). Докажите, что группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p)$ порождена автоморфизмом Фробениуса $x \mapsto x^p$.

5 (2). Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор в векторном пространстве V размерности n над произвольным полем, причем операторы $1, T, T^2, ..., T^{n-1}$ линейно независимы. Докажите, что тогда оператор T имеет циклический вектор, то есть найдется такой элемент $v \in V$, что векторы $v, T(v), ..., T^{n-1}(v)$ линейно независимы.

6 (2). Докажите, что многочлен $x^6 + x^3 + 1$ неприводим над $\mathbb{F}_2$, а размерность векторного подпространства, порожденного над $\mathbb{F}_2$ его корнями в поле разложения, равна 4.

7 (2). Чему может быть равна размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций на компактной комплексной кривой рода 1, соответствующей эффективному дивизору степени два?

8 (2). Найдите явное представление стандартной (гексагональной) аффинной тропической кривой рода 1 посредством многочлена третьей степени.

9 (3). Докажите, что многочлен $(x^p - 1)/(x - 1)$ неприводим над $\mathbb{F}_2$, если p — простое число, такое что класс элемента 2 является образующей мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_p$.

10 (3). Найдите песочную группу графа с 6 вершинами и 9 ребрами, являющегося каркасом треугольной призмы, где на одном основании три ребра направлены по циклу, на другом основании — по циклу в другую сторону, а боковые ребра двунаправлены. Укажите явно ее нейтральный элемент и образующие в виде куч песка.

11 (5). Придумайте разумное определение аналога мероморфных 1-форм на тропической кривой и покажите, что при этом определении дивизор любой такой формы на проективной прямой $\mathbb{T}P^1$ будет иметь степень -2.

> В следующих задачах мы используем единые обозначения, а именно, $G_n = \mathrm{Aut}(Nk_n^2) \cong \mathrm{Cir}_n^2/\mathbb{Z}_n$ для группы автоморфизмов ожерелий, построенной по нормальным базисам расширений поля $\mathbb{F}_2$ (здесь Cir — соответствующая группа циркулянтных матриц), а $H_n = S(\Gamma_n)$ для песочной группы графа Γ_n с вершинами $\{i \bmod n\}$ и ребрами $i \to 2i$, $i \to 2i+1$.

12 (4). Найдите порядок и опишите устройство группы H_n для чисел n вида $3 \cdot 2^m$.

13 (5). Докажите, что группа G_p является циклической, если p — простое число, такое что класс элемента 2 является образующим мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_p$.

14 (9). Постройте эпиморфизм $H_{pn} \to H_n$ и/или мономорфизм $H_n \to H_{pn}$ для нечетного простого p и найдите его ядро (или, соответственно, коядро).

15 (12). Докажите изоморфизм между группами G_n и H_n для любого n.