1 Воспоминания о векторах и понятие о параллельном переносе.

Разминка. *Дан параллелограмм $ABCD$, E середина $[BC]$, G середина $[CD]$, F делит $[BD]$ в отношении $2:1$. $\overline{a} = \overline{AE}$, $\overline{b} = \overline{AD}$. Выразить $\overline{AF}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.*

Упражнение 1. *В условиях предыдущей задачи выразить $\overline{FG}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.*

Разминка. *Дан четырехугольник $ABCD$, M и N делят отрезки $[AB]$ и $[DC]$ в отношении $m:n$. $\overline{a} = \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{AD}$. Выразить $\overline{MN}$.*

Упражнение 2. *Дан четырехугольник $ABCD$, M середина $[AB]$, N середина $[CD]$.*

a) *Докажите, что*
$$|MN| \leqslant \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

b) *Докажите, что равенство достигается только если $ABCD$ — параллелограмм или трапеция.*

Определение 1. *Параллельным переносом на вектор $\overline{a}$ (обозначается $T_{\overline{a}}$) называется преобразование плоскости, которое точке A сопоставляет точку A', такую что $\overline{AA'} = \overline{a}$.*

Определение 2. *Преобразование называется хорошим, если корректно определено отображение векторов $\overline{AB} \mapsto \overline{A'B'}$.*

Упражнение 3. *Докажите, что $T_{\overline{a}}$ является хорошим, выразить $\overline{A'B'}$ через $\overline{AB}$. Докажите, что расстояния сохраняются, то есть это преобразование является преобразованием подобия с коэффициентом 1 (другими словами движением).*

Упражнение 4. *Чем является $T_{\overline{a}} \circ T_{\overline{b}}$ и $T_{\overline{a}}^{-1}$?*

Упражнение 5. *Докажите, что параллельный перенос переводит прямую в параллельную ей прямую; угол в равный ему угол; окружность в равную ей окружность, причем центр первой окружности в центр второй.*

Упражнение 6. *Преобразование таково, что $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Докажите, что это параллельный перенос.*

Упражнение 7. *Как с помощью циркуля и линейки построить образ отрезка* $[CD]$ *при параллельном переносе на вектор* $\overline{AB}$*?*

Упражнение 8. *Построить треугольник равный данному, основание которого лежит на данной прямой, а противоположная вершина лежит на другой данной прямой.*

Упражнение 9. *Построить параллелограмм, у которого даны две соседние вершины, а две другие лежат на двух данных окружностях.*

Упражнение 10. *Даны прямые* $a \parallel a'$ *и* $b \parallel b'$, *причем* $a \nparallel b$. *Найти такой вектор* $\overline{v}$, *что* $T_{\overline{v}}$ *переводит* a *в* a', *а* b *в* b'

Упражнение 11. *Берега реки образуют две параллельные прямые. По разные стороны от реки расположены две деревни (считаем, что это точки). Где нужно построить мост, перпендикулярный берегам реки так, чтобы путь из одной деревни в другую был бы кратчайшим?*

2 Продолжение решения задач на параллельный перенос и понятие о центральной симметрии.

Определение 3. *Преобразование плоскости называется аффинным, если оно является биекцией, корректно определено отображение векторов $\overline{AB} \mapsto \overline{A'B'}$ и это отображение является линейным. То есть если $\overline{a} \mapsto \overline{a'}$, $\overline{b} \mapsto \overline{b'}$, то $\overline{a} + \overline{b} \mapsto \overline{a'} + \overline{b'}$ и $\lambda\overline{a} \mapsto \lambda\overline{a'}$.*

Разминка. *Параллельный перенос является аффинным.*

Разминка. *Когда фиксированную окружность можно перевести параллельным переносом в другую фиксированную окружность? Сколькими количеством способов?*

Разминка. *$ABCD$ — параллелограмм. На сторонах $[AD]$ и $[BC]$ построили квадраты, причем на стороне $[AD]$ по ту же сторону, что и параллелограмм, а на стороне $[BC]$ по другую сторону. Докажите, что расстояние между центрами квадратов равно $|AB|$.*

Разминка. *Какие вы знаете движения? Чьим частным случаем является центральная симметрия?*

Определение 4. *Центральной симметрией относительно точки O (обозначается Z_O) называется преобразование плоскости, которое точке A сопоставляет точку A', такую что $\overline{OA'} = \overline{A'O}$.*

Разминка. *Точка P движется по окружности по часовой стрелке по окружности с центром O. В какую сторону движется $Z_O(P)$?*

Разминка. *Найдите необходимое и достаточное условие того, что четырехугольник имеет центр симметрии.*

Разминка. *Когда фиксированную окружность можно перевести центральной симметрией в другую фиксированную окружность? Сколькими количеством способов?*

Разминка. *Докажите, что центральная симметрия переводит прямую в параллельную ей прямую; угол в равный ему угол; окружность в равную ей окружность, причем центр первой окружности в центр второй.*

Разминка. *Найдите Z_O^{-1}.*

Упражнение 12. *Докажите, что Z_O является аффинным, выразить $\overline{A'B'}$ через $\overline{AB}$. Докажите, что расстояния сохраняются, то есть это преобразование является преобразованием подобия с коэффициентом 1 (другими словами движением).*

Упражнение 13. a) *Докажите, что $Z_{O_1} \circ Z_{O_2}$ является параллельным переносом.* b) *На какой вектор?*

Упражнение 14. *Преобразование плоскости таково, что $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$. Докажите, что это центральная симметрия.*

Упражнение 15. a) *Докажите, что композиция центральной симметрии и параллельного переноса является центральной симметрией.* b) *Относительно какой точки?*

Упражнение 16. *В каком случае центральная симметрия и параллельный перенос коммутируют? То есть $Z_0 \circ T_{\overline{a}} = T_{\overline{a}} \circ Z_0$?*

Упражнение 17. *Даны окружность, прямая и точка. Построить отрезок, у которого один конец лежит на прямой, другой на окружности, а данная точка делит его пополам.*

Упражнение 18. *Дана точка внутри угла. Построить отрезок с концами на сторонах угла так, чтобы данная точка делила его пополам.*

Упражнение 19. *Построить пятиугольник по его серединам.*

Упражнение 20. *Дан треугольник ABC его ортоцентр, точка O и треугольник $\triangle A'B'C' = Z_O(\triangle ABC)$. Только с помощью линейки отметить ортоцентр треугольника $A'B'C'$.*

Упражнение 21. *Внутри треугольника ABC взяли точку M и отразили относительно середин его сторон. Получили точки $A'B'C'$.*

a) *Докажите, что получившийся треугольник центрально симметричен исходному.*

b) *Относительно какой точки?*

3 Немного про гомотетию.

Определение 5. *Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ (обозначается H_O^k) называется преобразование плоскости, которое точке A сопоставляет точку A', такую что $\overline{OA'} = k\overline{OA}$.*

Разминка. *Где мы уже встречали частный случай гомотетии?*

Разминка. *Докажите, что серединный треугольник гомотетичен исходному.*

Разминка. *Найдите $\left(H_O^k\right)^{-1}$ и $H_O^{k_1} \circ H_O^{k_2}$.*

Упражнение 22. *Докажите, что гомотетия является аффинным преобразованием. Выразите $\overline{A'B'}$ через $\overline{AB}$. Докажите, что гомотетия является подобием. С каким коэффициентом?*

Разминка. *Докажите, что гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую.*

Разминка. *Докажите, что гомотетия переводит угол в равный ему угол.*

Разминка. *Докажите, что гомотетия переводит окружность в окружность, причем центр первой в центр второй.*

Разминка. *Какие замечательные точки одного треугольника переходят в такие же замечательные точки образа треугольника при гомотетии?*

Разминка. *Используя гомотетию докажите, что высоты пересекаются в одной точке и теорему о прямой Эйлера.*

Разминка. *Вписать квадрат в данный треугольник.*

Разминка. *Когда одну окружность можно перевести в другую гомотетией?*

Разминка. *Как строить образы прямых и окружностей при гомотетии с помощью циркуля и линейки. В зависимости от того как задан коэффициент (целый, рациональный, другое).*

Упражнение 23. *Преобразование плоскости таково, что $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$, где $k \neq 0$.*

a) Докажите, что у этого отображения есть неподвижная точка, если $k \neq 1$.

b) Докажите, что если у этого отображения есть неподвижная точка, то оно гомотетия с коэффициентом k.

Упражнение 24. **a)***Докажите, что композиция гомотетии и параллельного переноса является гомотетией.* **b)** *Какие у нее центр и коэффициент.*

Упражнение 25. *Докажите, что композиция гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2 является*

a) гомотетия с коэффициентом k_1k_2, если $k_1k_2 \neq 1$,

b) параллельный перенос, если $k_1k_2 = 1$.

c) Какие у гомотетии центр и коэффициент, и какой вектор параллельного переноса?

Упражнение 26. *На основаниях трапеции $ABCD$ построены квадраты ABB_1A_1 и CDD_1C_1 во внешнюю сторону. Докажите, что точка пересечения отрезков диагоналей $[AC]$ и $[BD]$ совпадает с точкой пересечения отрезков $[A_1C_1]$ и $[B_1D_1]$.*

Упражнение 27. *Внутри угла дана точка M. Постройте окружность, вписанную в этот угол, и проходящую через точку M.*

Упражнение 28. *На плоскости даны окружность и две непараллельные прямые. С помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся и данных прямых и данной окружности.*

Упражнение 29. *(Лемма Архимеда.) Пусть A и B — фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка $[AB]$ и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые (PQ) пересекаются в одной точке.*

Упражнение 30. *Через точку M касания двух окружностей проведена секущая, пересекающая окружности соответственно в точках A и B. Докажите, что касательные, проведенные к окружностям в точках A и B, параллельны.*

4 Немного про аффинные преобразования.

Определение 6. *Преобразование плоскости называется аффинным, если оно является биекцией, корректно определено отображение векторов* $\overline{AB} \mapsto \overline{A'B'}$ *и это отображение является линейным. То есть если* $\overline{a} \mapsto \overline{a'}$, $\overline{b} \mapsto \overline{b'}$, *то* $\overline{a} + \overline{b} \mapsto \overline{a'} + \overline{b'}$ *и* $\lambda\overline{a} \mapsto \lambda\overline{a'}$.

Разминка. *Композиция аффинных и обратное к аффинному являются аффинным. Какие аффинные отображения вы можете придумать?*

Разминка. *Поворотная гомотетия (композиция гомотетии и поворота с общим центром) является аффинным. Что она делает с векторами?*

Разминка. *Любое аффинное преобразование плоскости так поступающее с векторами (но не оставляющее их на месте) является поворотной гомотетией.*

a) *А зачем это уточнение в скобках?*

b) *Докажите это, если у этого преобразования есть неподвижная точка.*

c) *Докажите, что у этого преобразования есть неподвижная точка.*

Разминка. *Любое аффинное преобразование плоскости можно задать образами одной точки и неколлинеарными образами двух неколлинеарных векторов.*

Разминка. *Докажите, что при аффинном отображении середина переходит в середину, прямая в прямую, отрезок в отрезок. Докажите, что сохраняется отношение отрезков на прямой. В том числе и направленных. А также на параллельных прямых.*

Разминка. *Докажите, что для любых двух треугольников существует аффинное отображение, переводящее один в другой.*

Разминка. *Какие замечательные точки одного треугольника переходят в такие же замечательные точки образа треугольника при произвольном аффинном преобразовании?*

Разминка. *Доказать с помощью аффинного преобразования, переводящего произвольный треугольник в правильный, что медианы пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении два к одному считая от вершины.*

Упражнение 31. *Какие четырехугольники можно перевести с помощью аффинного преобразования в квадрат?*

Разминка. *Докажите, что отношение площадей многоугольников при аффинном преобразовании сохраняется.*

Упражнение 32. a)*Докажите, что если две фигуры получаются друг из друга параллельным переносом или гомотетией, то и их образы при аффинном преобразовании тоже получаются друг из друга параллельным переносом или гомотетией (возможно с другими параметрами).* **b)***Как этот факт сказать в виде композиций преобразований?*

Упражнение 33. *На сторонах параллелограмма $ABCD$ площади S, взяты точки A', B', C' и D', делящие в отношении два к одному стороны CD, DA, AB и BC, соответственно. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AA', BB', CC', DD'.*

Упражнение 34. *Точки A', B', C' делят стороны BC, CA, AB треугольника ABC в равных отношениях. Докажите, что у треугольников ABC, $A'B'C'$ и треугольника, образованного прямыми AA', BB', CC' точки пересечения медиан совпадают.*

Упражнение 35. *Докажите, что любой четырехугольник, не являющийся трапецией, можно перевести в четырехугольник у которого противоположные углы прямые.*

Упражнение 36. *Каждая диагональ пятиугольника параллельна одной из его сторон.*

a) Докажите, что аффинным преобразованием можно перевести этот пятиугольник в правильный.

b) Может ли данный пятиугольник быть неправильным?

Упражнение 37. *Даны три попарно окружности разного радиуса ни-одна из которых не лежит внутри другой. Для каждой пары окружностей рассматривается точка пересечения внешних касательных. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.*

Упражнение 38. *В выпуклом 6-угольнике* $ABCDEF$ *малые диагонали (т.е., отрезки* AC, BD *и им подобные) разбиваются на пары параллельных. Докажите, что большие диагонали –* AD, BE *и* CF *пересекаются в одной точке.*

Упражнение 39. *Почему нельзя построить правильный треугольник одной линейкой?*