1 Степень точки относительно окружности

Определение 1. *Как известно, если даны точка M и окружность ω с центром в O и радиусом R, то для любой прямой проходящей через M и пересекающей окружность в точках A и B произведение $|MA| \cdot |MB|$ не зависит от прямой. Если вместо длин отрезков рассматривать направленные отрезки, то $MA \cdot MB = |MO|^2 - R^2$. Эту величину мы будем называть степенью точки M относительно окружности ω. Отметим, что если M лежит вне окружности ω, то степень равняется квадрату касательной проведенной из M к ω.*

Упражнение 1. *Пусть дана окружность. Найдите какие значения может принимать степень точки относительно окружности.*

Упражнение 2. *Пусть даны окружность и число. Опишите множество точек, у которых именно такая степень точки относительно окружности.*

Определение 2. *Отображение f называется подобием с коэффициентом k, если оно является сюръекцией, а все расстояния изменяются ровно в k раз.*

Пример 3. *Гомотетией с центром в O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение, переводящее X в X' так, что $\overline{OX'} = k\overline{OX}$. Гомотетия является подобием с коэффициентом $|k|$.*

Утверждение 4. *При подобии прямые переходят в прямые; углы в равные им углы; окружности в окружности, причем их центры в центры.*

Определение 5. *Радикальной осью двух неконцентрических окружностей называется множество точек, у которых степени точки относительно одной окружности и другой равны.*

Упражнение 3. *Докажите, что у двух касающихся окружностей их радикальной осью является их общая касательная.*

Упражнение 4. *Докажите, что у двух пересекающихся окружностей их радикальной осью является прямая, проходящая через их точки пересечения.*

Упражнение 5. *Докажите, что у произвольных двух окружностей их радикальной осью является прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей их центры.*

Определение 6. *Пусть зафиксирована прямая l. Две окружности называются соосными, если l является их радикальной осью. (Дополнительно считаем, что окружность соосна сама себе.)*

Упражнение 6. *Докажите, что соосность — это отношение эквивалентности.*

Определение 7. *Класс эквивалентности соосности называется пучком соосных окружностей.*

Упражнение 7. *Пусть даны 3 окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Для каждой пары окружностей проводится их радикальная ось. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.*

Определение 8. *Эта точка называется в одной точке.*

Упражнение 8. *Если $[PT]$ и $[PU]$ — касательные из точки P к двум концентрическим окружностям, причем точка T находится на меньшей из них, если отрезок $[PT]$ пересекает большую окружность в точке Q, то $|PT|^2 - |PU|^2 = |QT|^2$.*

2 Инверсия. Действие на окружности и прямые

Определение 9. *Инверсия относительно окружности с центром в точке O и радиусом R — это отображение, которое сопоставляет точке X такую точку X' на луче $[OX)$, что $|OX| \cdot |OX'| = R^2$.*

Утверждение 10. *Композиция двух инверсий относительно концентрических окружностей является гомотетией.*

Упражнение 9. *Композиция инверсии и гомотетии с тем же центром является инверсией.*

Упражнение 10. *Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.*

Упражнение 11. *Прямая, непроходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.*

Упражнение 12. *Окружность, проходящая через концы диаметра окружности инверсии, переходит в окружность симметричную исходной, относительно этого диаметра (или центра инверсии).*

Определение 11. *Угол между пересекающимися окружностями — это угол между касательными в их точке пересечения.*

Замечание 12. *Величина этого угла не зависит от выбора точки пересечения так как картинка симметрична относительно прямой, соединяющей их центры.*

Пример 13. *Окружности перпендикулярны тогда и только тогда, когда радиусы, проведенные к точкам пересечения являются касательными.*

Упражнение 13. *Окружность, перпендикулярная окружности инверсии переходит в себя.*

Упражнение 14. *Любая окружность, не содержащая внутри центр инверсии, переходит в окружность.*

Упражнение 15. *Любая окружность, содержащая внутри центр инверсии, переходит в окружность.*

Теорема 14. *Окружности и прямые при инверсии переходят в окружности и прямые.*

Упражнение 16. *При инверсии точка A переходит в A'. Докажите, что любая окружность, проходящая через A и A' переходит в себя.*

Упражнение 17. *Любая точка P не лежащая на окружности ω переходит при инверсии относительно ω во вторую точку пересечения любых двух окружностей, проходящих через P и ортогональных окружности ω.*

Упражнение 18. *Пусть у двух окружностей есть 4 общие касательные. Докажите, что середины этих четырех отрезков лежат на одной прямой.*

3 Инверсия. Углы, двойное отношение, действие на пучки соосных окружностей

Утверждение 15. *Касающиеся окружности и прямые переходят при инверсии в касающиеся окружности и прямые.*

Упражнение 19. *Угол между прямыми сохраняется при инверсии.*

Упражнение 20. *Угол между окружностями и прямыми сохраняется при инверсии.*

Замечание 16. *Будем считать пучком соосных окружностей еще несколько вырожденных случаев: пучок параллельных прямых; пучок прямых, проходящих через одну точку; пучок концентрических окружностей.*

Упражнение 21. *Если даны две окружности, то множество перпендикулярных им окружностей образует пучок соосных окружностей.*

Упражнение 22. *Для любого пучка соосных окружностей есть другой пучок соосных окружностей такой, что любая окружность из первого пучка перпендикулярна любой окружности из второго.*

Упражнение 23. *Пучки соосных окружностей переходят при инверсии в пучки соосных окружностей.*

Упражнение 24. *Любые две неконцентрические окружности можно перевести с помощью инверсии в концентрические.*

Упражнение 25. Поризм Штейнера. *Рассмотрим две неконцентрические окружности, одна из которых находится внутри другой. Рассмотрим последовательность окружностей, которые находятся внутри получившегося "кольца" так, что каждая окружность из последовательности касается внутренней и внешней окружностей и, кроме того предыдущей и последующей окружностей. Оказалось, что одна такая последовательность зацикливается и содержит n окружностей. Тогда если начать также строить последовательность начиная с другой окружности (не входящую в исходную последовательность) то эта последовательность тоже зацикливается и содержит n окружностей.*

Определение 17. *Двойным (сложным) отношением точек A, B, C и D называется*

$$\{AB, CD\} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}.$$

Если одна из точек бесконечно удален, то считается, что соответствующие бесконечны расстояния как бы "сокращаются", например

$$\{AB, C\infty\} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Упражнение 26. *Если среди точек A, B, C и D нет ни центра инверсии, ни бесконечно удаленной точки, то двойное отношение сохраняется при инверсии.*

Упражнение 27. *Если среди точек A, B, C и D есть центр инверсии или бесконечно удаленная точка, то двойное отношение все равно сохраняется при инверсии.*

Упражнение 28. *Теорема Птолемея. Попарные расстояния между четырьмя различными точками A, B, C и D удовлетворяют соотношению*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geqslant |AC| \cdot |BD|,$$

причем равенство возможно только если A, B, C и D лежат на одной окружности в таком порядке или на одной прямой в таком порядке или переставленные по циклу.