1 Степень точки относительно окружности

Определение 1. *Площадь многоугольника - это отображение из множества многоугольников в множество вещественных неотрицательных чисел, удовлетворяющее следующим условиям.*

1. *Площади равных многоугольников равны.*
2. *Пощадь многоугольника, составленного из двух других (то есть тех, которые имеют общую только границу), равна сумме площадей многоугольников, его образующих.*
3. *Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.*

Упражнение 1. *Два выпуклых четарехугольника равной площади расположены так так на рисунке. Докажите, что сумма площадей частей-треугольников первого четырехугольника, находящихся вне второго четырехугольника равна сумме площадей частей-треугольников второго четырехугольника, находящихся вне первого четырехугольника.*

Упражнение 2. *Докажите формулу площади параллелограмма.*

$$S = ah.$$

Упражнение 3. *Докажите формулу площади треугольника.*

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Замечание 2. *Найти ГМТ M, таких что $S_{ABC} = S_{ABM}$.*

Замечание 3. *Что можно сказать про отношение площадей треугольников с общей высотой?*

Упражнение 4. *У двух параллелограммов общая вершина, а также отмечена в каждом из параллелограммов по одной, соседней с общей вершиной. Отмеченная вершина каждого из параллелограммов лежит на стороне другого параллелограмма, не содержащей ни отмеченную вершину, ни общую вершину. Докажите, что у них площади равны.*

Упражнение 5. *В параллелограмме выбрали произвольные точки на противоположных (горизонтальных) основаниях и каждую из них соединили с вершинами противоположного основания..*

1. *Докажите, что площадь внутреннего четырехугольника равна сумме площадей боковых треугольников.*

2. *Докажите, что сумма площадей двух верхних треугольников равна сумме площадей двух нижних треугольников.*

Упражнение 6. *В выпуклом четырехугольнике соединили середины противоположных сторон и он разбился на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух противоположных четырехугольников равна сумме площадей двух оставшихся.*

Упражнение 7. *Барицентрическое подразбиение треугольника.*

1. *Медианы делят треугольник на шесть треугольников равной площади.*

2. *Докажите, используя площади, что если медианы пересекаются в одной точке, то эта точка делит их в отношении 2:1, считая от вершины.*

Упражнение 8. *Если у двух треугольников* $\alpha = \alpha'$, *то*

$$\frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Упражнение 9. *Если у двух треугольников* $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, *то*

$$\frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Упражнение 10. *Докажите формулу площади трапеции. На что надо умножить среднюю линию, чтобы получить площадь?*

Упражнение 11. *Докажите формулу площади треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности* $S = pr$.

Упражнение 12. *Вневписанная окружность.*

1. *Докажите ее существование.*
2. *Докажите еще одну формулу площади треугольника* $S = (p-a)\rho_a$.

Упражнение 13. *Медианы как ГМТ. Дан треугольник* ABC.

1. *Докажите, что для любой точки* X *с прямой, содержащей медиану из точки* A *верно* $S_{AXB} = S_{AXC}$.
2. *Докажите, что если* $S_{AXB} = S_{AXC}$, *то* X *лежит на прямой, содержащей медиану из точки* A.
3. *Докажите, используя предыдущие пункты, что медианы пересекаются в одной точке.*

Упражнение 14. *В трапеции проведены диагонали. Докажите, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам равны.*

Упражнение 15. *В выпуклом четырехугольнике проведены диагонали. Оказалось, что два треугольники, примыкающие к противоположным сторонам равновеликие. Докажите, что это трапеция или параллелограмм.*

Упражнение 16. *Треугольник точкой внутри и тремя на сторонах разделен как на картинке на 6 треугольников. Докажите, что это проведены три медианы.*

Упражнение 17. *Свойство внутренней биссектрисы треугольника.*

Упражнение 18. *Свойство внешней биссектрисы треугольника.*

Упражнение 19. *Докажите теорему Пифагора смотря на a) два квадрата; b) один квадрат.*

Упражнение 20. *Докажите теорему Пифагора смотря на два пифагоровы штаны и параллелограммы. Более того, каждый из квадратов равновелик соответствующему прямоугольнику. Не проводя дополнительных посторений.*

Упражнение 21. *Докажите равносоставленность квадратов из теоремы Пифагора. (На картинке квадрат большего катета рассеченн крестом.) А именно докажите, что можно посечь так, чтобы из получившихся частей собрать квадрат гипотенузы.*

Упражнение 22. *Докажите равносоставленность квадратов из теоремы Пифагора. (другая картинка - меньший квадрат на две части, а больший на три части).*

Теорема 4. *Теорема Бойяи-Гервина.*