

Анализ Фурье, программирование.

Решения принимаются до 26го октября. Все задачи – дополнительные. Во всех задачах надо самостоятельно додумать, что подается на вход, как проверяется корректность входных данных, что выводит программа. Баллы за эти задачи не суммируются (решив первую и вторую задачу, Вы получите 20 баллов). Заимствования кода из любых источников отмечаются в комментариях.

1) Напишите программу, которая перемножает два многочлена степени n с целыми коэффициентами за время $n \log n$. Также напишите программу, которая перемножает многочлены наивным способом, за время n^2 . Проявите эффективность алгоритма на конкретном примере. **10 баллов**.

https://logic.pdmi.ras.ru/~kulikov/sites/default/files/algorithms_href.pdf страница 61

2) Создайте собственный формат jpg. Для этого напишите две программы, первая из которых сжимает (с потерями) файл *.bmp используя преобразование Фурье, а вторая – восстанавливает из сжатого файла изображение в формат bmp. **20 баллов**.

<http://www.maths.usyd.edu.au/u/olver/teaching/Computation/ExampleProject.pdf>

3) Постройте конформное отображение f односвязной области на единичный круг и найдите прообразы окружностей и радиусов

$$C_n = \left\{ \frac{(ni+x)-i}{(ni+x)+i}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \Pi_n = \left\{ \frac{(xi+n)-i}{(xi+n)+i}, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

при этом отображении. Программа на входе получает изображение односвязной области в любом общепринятом формате и возвращает изображение в том же формате, на котором помимо области нарисованы линии $f^{-1}(C_n)$, $f^{-1}(\Pi_n)$. **25 баллов**.

<http://www.mas.ucy.ac.cy/~nickp/lectnsm.pdf> страница 48, параграф 2.4.1

4) За n^2 операций постройте вероятностную меру μ на отрезке $[-\pi, \pi]$ с заданными начальными коэффициентами Фурье:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} d\mu(t) = c_{k-j}, \quad 0 \leq k, j \leq n$$

Для этого найдите вектор $P = T_n^{-1} E_0$ алгоритмом Левинсона, где T_n – матрица Тейлица $(c_{k-j})_{0 \leq k, j \leq n}$, E_0 – вектор $(1, 0, \dots, 0)$. Из вектора $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ образуйте многочлен $\psi_n = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n$. Выберите константу a_n так, чтобы мера $\mu(t) = \frac{a_n}{|\psi_n(e^{it})|^2} dt$ стала вероятностной. Она будет обладать указанными свойствами. Вход: коэффициенты $\{c_k\}$. Выход: коэффициенты $\{p_k\}$, график функции $\frac{a_n}{|\psi_n(e^{it})|^2}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. **15 баллов** + 5 баллов за доказательство корректности алгоритма.

Р. Блейхут. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов, Глава 11, <http://gen.lib.rus.ec/>