Математический анализ, листок 5 (Март, 2024)

Не рейтинговые задачи

1. Построить пример бесконечно гладкой функции $f(x, y)$, которая имеет бесконечное число локальных максимумов и ни одного локального минимума.

2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2/n!$$

3. Пусть f и g интегрируемые функции на отрезке $[0, 1]$. Доказать неравенство

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 + \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt\right)^2$$

4. Предположим, что $f \in C^1[0, +\infty)$ и $\int_0^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty$. Верно ли, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно вместе с интегралом

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt?$$

5. Функция $f : R \to R$ бесконечно-дифференцируема и последовательность ее производных $f^{(n)}$ сходится равномерно на любом интервале $(a, b) \subset R$ к непрерывной функции ϕ. Докажите, что $\phi = \phi(0)e^x$.

Рейтинговые задачи

1. Пусть f – функция из примера Ван дер Вардена. Доказать, что ее вариация неограничена на любом отрезке числовой оси. (1 балл).

2. Пусть $A(t)$ – такая матрица, что $\det A(t) \neq 0$. Выразить $\frac{d \ln \det A}{dt}$ через $\mathrm{Tr}\left[A^{-1}(t)\frac{dA}{dt}\right]$. (1 балл)

3. Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что если для всякого натурального числа n справедлива оценка $f(x, x^\alpha) = o(|x|^n)$, то все производные функции f в нуле равны нулю. (1 балл)

4. Пусть A – матрица рамера $n \times n$ с элементами $a_{kj} = 1/k$ для $j \leq k$, $a_{kj} = 0$, $j > k$. Доказать, что ее операторная норма ограничена числом $\sqrt{2} + 1$.

5. Для заданных $0 < a < b$ найти минимум функции

$$\frac{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_n + b)}{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

при условии, что все $x_k \in [a, b]$. (1 балл)