Математический анализ, листок 1

выдан: 4 сентября, крайний срок сдачи: 2 октября

Для получения зачета необходимо решить не менее 2х задач из каждого листка. Задачи, не отмеченные баллами, оцениваются в 0 баллов. Они достаточно просты и в основном служат для отработки понятий из курса лекций. Более сложные задачи добавляют в рейтинг баллы за их решение. Происходит это так: цена задачи z вычисляется по формуле $N + k_z \cdot (N - P)$, где N - общее число студентов, P - число студентов, решивших задачу z, а $k_z \in [1, 3]$ - индивидуальный коэффициент задачи. Баллы за решение задач в конце семестра вычисляются по формуле $70 \cdot \Sigma_S / \Sigma_M$, где Σ_S — суммарная стоимость задач, решенных студентом S, а Σ_M - максимум величины Σ_S по всем S на потоке.

1. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено. Докажите, что множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a \in A \quad x^5 - a|x| + a^3 = 0\}$ тоже ограничено.

2. Пусть $\{a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ — двойная последовательность вещественных чисел (её следует понимать как отображение множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в множество вещественных чисел). Справедливо ли неравенство

$$\sup\Big\{\inf\{a_{mn} \mid n \in \mathbb{N}\} \Bigm| m \in \mathbb{N}\Big\} \le \inf\Big\{\sup\{a_{mn} \mid m \in \mathbb{N}\} \Bigm| n \in \mathbb{N}\Big\}? \tag{1}$$

Если да, докажите его, если нет — приведите контрпример.

3. Пусть $\{x_n\}_n$ — последовательность вещественных чисел. Докажите, что $\{x_n\}_n$ сходится к нулю, если последовательность $\{x_{n+1} - x_n/2\}_n$ стремится к нулю.

4. Определим сумму двух подмножеств прямой X и Y следующей формулой:

$$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in X, y \in Y \qquad z = x + y\}. \tag{2}$$

Докажите, что если хотя бы одно из множеств X и Y открыто, то и множество $X + Y$ открыто.

5. Приведите пример таких замкнутых множеств X и Y, что множество $X + Y$ не замкнуто.

Рейтинговые задачи

6. **[k=2]** Пусть m — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Докажите, что существует такое число $K > 1$, что для всякого числа $\lambda \in (1, K)$ найдётся такое число $\gamma < 1/4$, что для всякого набора $\{x_j\}_{j=1}^m$ положительных чисел справедлива оценка

$$\Big(m^{-1} \sum_{\substack{j\,:\, x_j \le \\ \le \lambda\sqrt{m}x}} x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le m^{\gamma} x; \qquad x = m^{-1}\sum_{j=1}^{m} x_j. \tag{3}$$

7. **[k=1]** Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана простой формулой: $\varphi(t) = t|t|$. Докажите неравенство

$$\Big|\varphi(x_1 - x_2) + \varphi(x_2 - x_3) + \varphi(x_3 - x_1)\Big| \le 2\Big(|x_1x_2| + |x_2x_3| + |x_3x_1|\Big). \tag{4}$$

8. **[k=1]** Для каждого числа $a > 0$ определим последовательность рекуррентно: $x_{n+1} = x_n^{x_n/n}$, $x_1 = a$. Докажите, что существует число $b > 1$, такое что при всех $a < b$ построенная последовательность ограничена, и не ограничена при $a \ge b$.

9. **[k=1]** Пусть a_n — двусторонняя ограниченная последовательность неотрицательных чисел, а последовательность b_n построена по правилу

$$b_n = \sup_m (1+|n-m|)^{-42} a_m.$$

Пусть $\lambda > 1$. Для всякого индекса n найдём какой-нибудь один номер $\vec{n}$, такой что

$$b_n \leq \lambda(1+|\vec{n}-n|)^{-42} a_{\vec{n}},$$

и если $\vec{n} \neq n$, проведём из $\vec{n}$ в n стрелку. Докажите, что если число λ лишь немногим больше единицы, то получился лес из кустов (то есть, дизъюнктное объединение ориентированных деревьев, длины ориентированных путей в которых не более единицы).

10. **[k=1]** Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x = \pi/2 + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}; \\ f(x) = x - \tan(x) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что заданная по правилу $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 = a$ последовательность $\{x_n\}_n$ не ограничена.

11. **[k=3]** Пусть P — многочлен двух переменных с вещественными коэффициентами. Пусть при стремлении x, y к бесконечности $P(x,y) \to \infty$, то есть, для всякого числа $N \in \mathbb{N}$ найдётся такое число $M \in \mathbb{N}$, что если $|x| + |y| > M$, то $|P(x,y)| > N$. Докажите, что существуют такие постоянные $\varepsilon, C > 0$, что $|P(x,y)| + 1 \geq C(x^2+y^2)^{\varepsilon}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

12. **[k=1]** Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ — конечная последовательность. Элемент a_k этой последовательности будем называть *m-замечательным* ($m \in \mathbb{N}$), если найдётся такое $p = 1, 2, \ldots, m$, что $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0$. Докажите, что сумма всех m-замечательных элементов неотрицательна.