Разбор КР № 1 (переписывание 30 ноября)

① $f = \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)}{2^{x\log(e+x)}}$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{(1+x)}\right) \cdot 2^{-x\log(e+x)} +$$

$$+ \arcsin\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot 2^{-x\log(e+x)} \left(\log 2 \cdot \left(-\log(e+x) - \frac{x}{e+x}\right)\right)$$

(использована формула $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = y_1' \cdot \frac{1}{y_2} + y_1 \cdot \left(\frac{1}{y_2}\right)'$)

② Доказать, что $\sqrt[n]{n} < 2 - \frac{1}{n}$ при $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

База: $\sqrt{2} \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \iff 2 < \frac{9}{4}$ – ok

Предположение: $\sqrt[n]{n} < 2 - \frac{1}{n}$

Переход: $\sqrt[n+1]{n+1} \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$

$n+1 \overset{?}{<} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, знаем, что $n < \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^n$

Осталось проверить: $\left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^n + 1 \overset{?}{<} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff 1 \overset{?}{<} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

Но $\left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq [n \geq 2] \geq \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{27} > 1$

$\Rightarrow$ ok

③ Доказать, что $\dfrac{(2x + \pi x^2)}{2x^2 + 2} \geq \operatorname{arctg} x$, $x > 0$

$\underbrace{\frac{2x + \pi x^2}{2}}_{f} \overset{?}{\geq} \underbrace{(\operatorname{arctg} x) \cdot (x^2 + 1)}_{g}$; $f(0) = g(0) = 0$

$f' = 1 + \pi x$, $g' = 1 + 2x \operatorname{arctg} x$

$f' \geq g' \iff \pi x \geq 2x \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}$ – ok $(x \geq 0)$

④ $N(\varepsilon)$ для $\lim n^2 \log\left(1 - \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}\right)$

$n^2 \log\left(1 - \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right) \sim n^2\left(-\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right) \sim n^2\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) \sim -1$

$\Rightarrow \lim = -1$, ищем $N(\varepsilon)$:

$$\left|n^2\log\left(1-\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right)+1\right|<\varepsilon \iff \left|n^2\left(\log\left(1-\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right)-\log 1\right)+1\right|<\varepsilon$$

$$\Leftarrow \left|n^2\left(\log(1-x)\right)'\Big|_{x=\xi}\cdot\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}+1\right|<\varepsilon \quad \text{для всех } \xi\in\left[0,\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right]$$

формула Лагранжа для $\log(1-x)$

$$\Leftarrow \left|-\frac{n^2\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{1-\xi}+1\right|<\varepsilon \quad \text{для всех } \xi\in\left[0,\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right]$$

$$\Leftarrow \frac{\left|n\cdot\sin\frac{1}{n}-1+\xi\right|}{|1-\xi|}<\varepsilon \quad \text{для всех } \xi\in\left[0,\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right]$$

$$\Leftarrow 2\left|n\cdot\sin\tfrac{1}{n}-1+\xi\right|<\varepsilon \quad \text{для всех } \xi\in\left[0,\tfrac{1}{n^2}\right]\subset\left[0,\tfrac{1}{2}\right] \quad (n\geq 2)$$

$$\Leftarrow 2\left|n\left(\sin\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n}\right)\right|+\frac{2}{n^2}<\varepsilon \quad \text{для всех } \xi\in\left[0,\tfrac{1}{n^2}\right]$$

$$\Leftarrow 2\left|\cos t-1\right|+\frac{2}{n^2}<\varepsilon \quad \text{для всех } t\in\left[0,\tfrac{1}{n}\right]$$

формула Лагранжа для $\sin x-x$

$$\Leftarrow 2\left|\sin s\right|+\frac{2}{n^2}<\varepsilon \quad \text{для всех } s\in[0,t]\subset\left[0,\tfrac{1}{n}\right]$$

$$\Leftarrow \frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}<\varepsilon \Leftarrow \frac{4}{n}<\varepsilon \Leftarrow n>\frac{4}{\varepsilon} \Leftarrow n\geq N(\varepsilon)=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$$

5) $$\cos(x-\sin x)=\cos\left(x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)\right)= \cos\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)=$$

$$=\cos\left(x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)\right)$$

$$=1-\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)^4\cdot\frac{1}{4!}+O(x^{18})$$

$$=1-\frac{x^6}{2!(3!)^2}+\frac{2x^8}{3!\,5!\,2!}+O(x^{10})=1-\frac{x^6}{72}+\frac{x^8}{720}+O(x^{10})$$

6) $$\lim_{x\to1}\frac{\log^3\frac{1+x^3}{2}}{\sin^3\pi x}=\left(\lim_{x\to1}\frac{\log\left(\frac{1+x^3}{2}\right)}{\sin\pi x}\right)^3=\left(\lim_{y\to0}\frac{\log\frac{1+(1+y)^3}{2}}{\sin\pi(1+y)}\right)^3=$$

$$=\left(\lim_{y\to0}\frac{\log\frac{1+1+3y+O(y^2)}{2}}{-\sin\pi y}\right)^3=\left(\lim_{y\to0}\frac{\log\left(1+\frac{3}{2}y+O(y^2)\right)}{-\pi y+O(y^2)}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-\pi}\right)^3=-\frac{27}{8\pi^3}$$