Практики по анализу, семестр 1, группа 23B03.

Практика 1 (6 сентября).

Вычисление производных: линейные комбинации, суммы, произведения, обратные функции, суперпозиция функций.

Определение производной, а также определения тригонометрических функций пока не появились на лекциях. Поэтому мы примем на веру, что есть операция под названием “вычисление производной”, которая обладает несколькими простыми свойствами. В курсе лекций эти свойства будут доказаны. Нам производные понадобятся много раз до их появления в курсе лекций, поэтому сейчас мы научимся их вычислять.

Таблица производных, которую надо запомнить. Она довольно короткая:

$$\begin{aligned}
(const)' &= 0 \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(e^x)' &= e^x \\
(\log x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют вычислять производные более сложных функций, пользуясь следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)' &= \alpha f + \beta g \\
(fg)' &= f'g + g'f \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - g'f}{g^2}
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g – дифференцируемые функции. В последней формуле предполагается, что функция g не обращается в ноль в окрестности точки вычисления производной. Также часто применяется следующее очень важное свойство производной. Если функция h задана по правилу $h : x \mapsto f(g(x))$, то

$$h'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0), \qquad y_0 = g(x_0).$$

Оно, в частности, позволяет находить производные обратных функций, дифференцируя равенство $x = f(f^{-1}(x))$. Существенно упрощает вычисление многих производных следующая формула:

$$A^B = e^{B \log A}, \qquad A > 0, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Посмотрим как все это работает.

Задачи на вычисление производных из задачника Б.П.Демидовича:

1. $f = \tan x$
2. $f = \arctan x$
3. $f = \arcsin x$
4. $f = x^a$, $a \in \mathbb{R}$
5. $f = a^x$, $a > 0$

6. $f = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

7. $f = x^{x^x}$

8. $f = e^x \left(1 + \cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

9. $f = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$

Домашнее задание, чтобы потренироваться к самостоятельной:

1. $f = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \arctan a^{-x}$

2. $\log\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right)$

Это номера из задачника Демидовича 976 и 972. При решении помогает замена $u = a^x$ или $u = \cos^2 x$. В Демидовиче есть ответы.

Практика 2 (7 сентября).

Самостоятельная (12 минут, 4 балла). Вычислите f' и $f'(0)$ для $f(x) = \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\right)^{\cos x}$.

Метод математической индукции. Метод хорошо известен со школы и заключается в следующем. Пусть даны утверждения P_1, P_2, P_3 и т.д., которые могут быть истинными или ложными. Предположим, что P_1 – истинно ("база индукции") и для всякого $n \in \mathbb{N}$ из того, что P_n – истинно ("предположение индукции"), следует, что P_{n+1} – истинно ("индукционный переход"). Тогда все P_n – истинны.

Задачи на метод математической индукции:

1. $(x^n \log x)^{(n)} = n! \left(\log x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$, $n \geq 1$.

2. $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \geq 1$.

4. $(fg)^{(n)} = \sum_0^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вычисление старших производных с помощью разложения на простейшие дроби и метода математической индукции. Обычно, для функции f не удается найти какую-то красивую формулу, выражающую ее производную порядка n. Тем не менее, для некоторых функций это все-таки возможно. Например, рациональные функции (функции вида P/Q, где P, Q – многочлены) можно представить в следующем виде:

$$\frac{P}{Q} = \sum_1^N \lambda_k f_k,$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, а f_k – функции вида $1/(x+a_k)^{m_k}$, $1/(x^2+b_k^2)^{n_k}$, для которых легче находить старшие производные.

Задачи на вычисление старших производных: вычислить $f^{(n)}(0)$, если $n \in \mathbb{N}$, и

1. $f = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$

2. $f = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

Домашнее задание

1. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$, $n\geq 1$.
2. При каждом $n\in\mathbb{N}$ число $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ делится на 19.
3. $f=x^2e^{2x}$, $f^{(n)}(0)=?$
4. $f=\frac{1}{x^2-3x+2}$, $f^{(n)}(x)=?$

Также выдано домашнее задание “25 производных”, необходимое для получения зачета.

Практика 3 (20 сентября).

Доказательство несложных неравенств для последовательностей и функций: функции с неотрицательной производной, теорема Лагранжа.

В решении следующих задач помогает такой факт: если функция f дифференцируема на $[a,b]$, $f(a)=0$, а $f'(x)\geq 0$, то $f(x)\geq 0$ при любом $x\in[a,b]$. Мы будем пользоваться без доказательства тем, что полиномы, тригонометрические функции, экспонента и логарфм – дифференцируемые функции на области своего опеределения. Кроме того, дифференцируемые функции можно складывать, умножать и делить (выкидывая нули знаменателя из области определения) не выходя из класса дифференцируемых функций.

1. Пусть функции f, g дифференцируемы на $[a,b]$, $f(a)=g(b)$, и $f'(x)\geq g'(x)$, $x\in[a,b]$. Тогда $f(x)\geq g(x)$ всюду на $[a,b]$.
2. $1+t\leq e^t$, $t\in\mathbb{R}$;
3. $1+t+\frac{t^2}{2}\leq e^t$, $t\in\mathbb{R}$;
4. $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$, $x>0$.
5. $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$, $x\geq 0$, $\alpha\geq 1$.
6. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$, $x\geq a\geq 0$, $n\geq 1$.

Простым, но мощным инструментом при исследовании поведения функций оказывается теорема Лагранжа. Она увереждает, что для любой непрерывной на $[a,b]$ и дифференцируемой на (a,b) функции f найдется точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Вот несколько упражнений на использование этой теоремы.

1. Докажите, что $\sin(x)/(x^2-\pi^2)$ – ограниченная функция на множестве $\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi]$.
2. Докажите, что функция $\frac{\log x}{(x-1)^2}$ неограниченно возрастает при приближении переменной x к единице.
3. Докажите, что $|p(x)-p(y)|\leq n\left(\sum_1^n|a_k|\right)|x-y|$, если $p=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $x,y\in[-1,1]$.
4. Докажите, что $|e^{-x^2}-1|\leq 2x^2$, $x\in\mathbb{R}$.
5. Докажите, что $e^x+e^{-x}<2(1+ax^2)$ при $|x|\leq 10$. Здесь a –некоторое число, не зависящее от x.
6. Докажите, что $\log(1+x)\leq x$ и что $\log\frac{x}{y}\leq\frac{|x-y|}{\min(x,y)}$ для всех $x,y\in(0,+\infty)$.

Практика 4 (21 сентября).

Определение предела. Вычисление $N(\varepsilon)$, разные приемы.

Определение. Говорят, что последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходится к пределу $L\in\mathbb{R}$, и пишут
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L,$$
если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что
$$n\ge N(\varepsilon)\Longrightarrow |x_n-L|<\varepsilon.$$

Найдите предел и предъявите $N(\varepsilon)$ по ε:

1. $\lim \frac{n^2}{2^n}$
2. $\lim \left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)$
3. $\lim \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$
4. $\lim \frac{2^{n+2}+3^{n+2}}{2^n+3^n}$
5. $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$
6. $\lim(\sqrt[3]{8-1/n^2})^{-1}$
7. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n}{(2e+1)^n}+\frac{n+\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}}\right)$

Разберем упражнение 7. Сначала поймем, чему равен ответ, а потом обоснуем его. Так как $\frac{e^n}{(2e+1)^n}=q^n$ для некоторого $0<q<1$, то первое слагаемое под пределом стремится к нулю. Кроме того, $\frac{n+\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}}=\frac{n}{\sqrt{4n^2-10n}}+\frac{\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}}\to\frac{1}{2}+0$. Таким образом, предел равен $1/2$ и осталось лишь обосновать это предположение (и заодно вычислить $N(\varepsilon)$). Возьмем $\varepsilon>0$, и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^n}{(2e+1)^n}+\frac{n+\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}}-\frac{1}{2}\right| &\le \frac{e^n}{(2e+1)^n}+\left|\frac{n}{\sqrt{4n^2-10n}}-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{\sqrt{4n^2-10n}}\\ &\le \frac{1}{2^n}+\left|\frac{1}{2\sqrt{1-10n/4n^2}}-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2n\sqrt{1-10n/4n^2}}\end{aligned}$$

Неравенство Бернулли влечет $2^n\ge 1+n\ge n$, $n\ge1$. Кроме того, $1-5/2n\ge 1-3/n\ge 1/2$ при $n\ge6$, следовательно,
$$\frac{1}{2n\sqrt{1-10n/4n^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2n}\le\frac{1}{n},\quad n\ge 6.$$

Наконец,
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{1-5/2n}}-1\right| &= \left|\frac{1-\sqrt{1-5/2n}}{\sqrt{1-5/2n}}\right|\le\left|\frac{1-\sqrt{1-5/2n}}{1/\sqrt{2}}\right|\le\sqrt{2}\left|\frac{1-(\sqrt{1-5/2n})^2}{1+\sqrt{1-5/2n}}\right|\\ &\le\sqrt{2}\left|\frac{5/2n}{1+\sqrt{1/2}}\right|\le\sqrt{2}\left|\frac{5/2n}{\sqrt{1/2}}\right|\le\frac{5}{n},\qquad n\ge6.\end{aligned}$$

Итак, при $n \geq 6$ получаем

$$\left|\frac{e^n}{(2e+1)^n} + \frac{n+\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{5}{n} + \frac{1}{n} = \frac{7}{n}$$

Таким образом, для выполнения условия

$$n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{e^n}{(2e+1)^n} + \frac{n+\sin n}{\sqrt{4n^2-10n}} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

можно взять $N(\varepsilon) = \max([\frac{7}{\varepsilon}]+1, 6)$.

Домашнее задание: Найдите предел и предъявите $N(\varepsilon)$ по ε:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+\frac{\log n}{3n}}{5n-\frac{\log n}{5n}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+3} - \sqrt{n^2-2n+5}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\log n + e^{-n}}{\log(n^n - 1/2)}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$

Практика 5 (27 сентября).

Вычисление $N(\varepsilon)$ с помощью теоремы Лагранжа.

Найдите предел и предъявите $N(\varepsilon)$ по ε

1. $\lim n\sin\frac{1}{n}$
2. $\lim(1+\frac{1}{n})^n$
3. $\lim n(\log(n+3) - \log(n+5))$
4. $\lim(n^2 - n^2\cos\frac{1}{n})$
5. $\lim n(e^{-1/(n+3)} - \frac{n-1}{n+1})$
6. $\lim(1+\sin\frac{1}{n})^n$.

В качестве примера можно разобрать Упражнение 3. Под пределом написано выражение

$$n(\log(n+3) - \log(n+5)) = n\log\frac{n+3}{n+5} = n\log\left(1 - \frac{2}{n+5}\right).$$

Применяя теорему Лагранжа для функции $f : x \mapsto \log(1+x)$ на промежутке $\left[-\frac{2}{n+5}, 0\right]$, получаем

$$\log\left(1-\frac{2}{n+5}\right) = \frac{\log\left(1-\frac{2}{n+5}\right) - \log(1+0)}{-\frac{2}{n+5} - 0}\left(-\frac{2}{n+5}\right) = \frac{1}{1+t_n}\left(-\frac{2}{n+5}\right),$$

где $t_n \in \left[-\frac{2}{n+5}, 0\right]$. Таким образом, под пределом написано выражение

$$\frac{1}{1+t_n}\left(-\frac{2n}{n+5}\right).$$

Теперь ясно, что предел равен -2. Чтобы обосновать это строго (и найти N_ε), действуем по определению. Нужно доказать, что существует число N_ε со следующим свойством:

$$\left|\frac{1}{1+t_n}\left(-\frac{2n}{n+5}\right)+2\right| \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\left|\frac{1}{1+t_n}\left(2-\frac{2n}{n+5}\right)+2\left(1-\frac{1}{1+t_n}\right)\right| \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon,$$

что заведомо выполняется, если

$$\left|\frac{1}{1+t_n}\left(2-\frac{2n}{n+5}\right)\right|+2\left|\left(1-\frac{1}{1+t_n}\right)\right| \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon.$$

В свою очередь, последнее неравенство заведомо выполняется, если

$$\frac{10}{(1+t_n)n}+\frac{2|t_n|}{1+t_n} \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon.$$

Используя тот факт, что $t_n \in \left[-\frac{2}{n+5}, 0\right] \subset [-\frac{1}{2}, 0]$, видим, что для выполнения последнего неравенства достаточно

$$\frac{20}{n}+4|t_n| \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon,$$

или

$$\frac{20}{n}+\frac{8}{n} \le \varepsilon, \qquad n \ge N_\varepsilon,$$

то есть в качестве N_ε можно взять число $\max(1, [28/\varepsilon])$.

Разберем Упражнение 5. Выражение под пределом может быть записано в виде

$$n\left(e^{-1/(n+3)}-\frac{n-1}{n+1}\right)=n\left(e^{-1/(n+3)}-1\right)+n\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)=n\frac{e^{-1/(n+3)}-1}{-1/(n+3)}\frac{-1}{n+3}+\frac{2n}{n+3}.$$

По теореме Лагранжа, получаем, что

$$n\frac{e^{-1/(n+3)}-1}{-1/(n+3)}=ne^{x_n}, \qquad x_n \in (-1/(n+3), 0).$$

Еще раз используя теорему Лагранжа, повышаем точность разложения:

$$ne^{x_n}=nx_n\frac{e^{x_n}-1}{x_n}+n=nx_ne^{y_n}+n, \qquad y_n \in (x_n, 0).$$

После преобразований, получаем

$$n\frac{e^{-1/(n+3)}-1}{-1/(n+3)}\frac{-1}{n+3}+\frac{2n}{n+3}=-\frac{nx_ne^{y_n}}{n+3}-\frac{n}{n+3}+\frac{2n}{n+3}=-\frac{nx_ne^{y_n}}{n+3}+\frac{n}{n+3}.$$

Так как $x_n n$ – ограниченая последовательность, то теперь ясно, что искомый предел равен единице. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $N(\varepsilon)$. Для этого оценим

$$\left|-\frac{nx_ne^{y_n}}{n+3}+\frac{n}{n+3}-1\right| \le \frac{n|x_n|}{n+3}+\frac{3}{n+3} \le \frac{n}{(n+3)^2}+\frac{3}{n+3} \le \frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{4}{n}.$$

Итак, $N(\varepsilon)=[4/\varepsilon]+1$ – подходит.

Письменное домашнее задание для подготовки к самостоятельной, 4 балла.

Вычислите предел и найдите $N(\varepsilon)$: $\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right)\cos\left(\pi\sqrt{\frac{n+4}{4n+1}}\right)$.

Срок сдачи: до 18:00 вторника 3 октября положить в ячейку с надписью “Р.В.Бессонов” на первом этаже лаборатории Чебышева (шкаф с ячейками преподавателей напротив входа в лабораторию)

Практика 6 (4 октября).

Вычисление $N(\varepsilon)$ с помощью теоремы Лагранжа. Формула Тейлора и O–символика.

В начале пары – разбор письменного домашнего задания. Записи можно посмотреть в телеграм группе “Анализ в группе 23Б03”.

Самостоятельная (18 минут, 4 балла). Вычислите предел и найдите $N(\varepsilon)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n+n}{2e^n-\sqrt{n}}\log\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Разбор самостоятельной.

Формула Тейлора. Пусть $f\in C^{(n)}(a,b)$ (то есть f – n раз непрерывно дифференцируемая функция на интервале (a,b)), $x_0\in(a,b)$. Тогда для любой точки $x\in(a,b)$ имеет место равенство

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x-x_0)^n,\qquad \xi(x)=\theta x+(1-\theta)x_0,\;\;\theta\in(0,1).$$

– остаточный член в форме Лагранжа. Запись

$$\xi(x)=\theta x+(1-\theta)x_0,\qquad \theta\in(0,1),$$

означает, что $\xi(x)$ – некоторая точка на интервале с концами x_0, x. Таким образом, знание производной $f^{(n)}$ на промежутке (a,b) позволяет заменить функцию f на ее многочлен Тейлора

$$T_{n-1}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

с контролируемой погрешностью R_n. В случае, когда $n=1$, формула Тейлора превращается в знакомую нам формулу Лагранжа:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi(x_0)),$$

где $\xi(x)$ – некоторая точка на интервале с концами x_0, x.

Остаточный член R_n в формуле Тейлора можно записывать и несколько иначе, используя так называемую O-символику. Для функций f, g, заданных на интервале (a,b), и точки $x_0\in(a,b)$ пишут

$$f=O(g),\qquad x\to x_0,$$

если $|f(x)|\le c|g(x)|$ для всех x из некоторой окрестности x_0. Более сильное ограничение

$$f=o(g),\qquad x\to x_0,$$

состоит в том, что $|f(x)|\le\alpha(x)|g(x)|$, где $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. В действительности $O(g)$ в точке x_0 – это класс функций f таких, что $|f(x)|\le c|g(x)|$ для всех x из некоторой окрестности x_0, и запись $f\in O(g)$ была бы более математически ”правильной”, однако пользоваться ей гораздо менее удобно. Аналогично обстоит дело с обозначением $f=o(g)$. В качестве иллюстрации выпишем формулу Тейлора с использованием o, O–символики:

$$f(x)=T_{n-1}(x)+O((x-x_0)^n),\qquad x\to x_0$$

и

$$f(x)=T_{n-1}(x)+o((x-x_0)^{n-1}),\qquad x\to x_0.$$

Задачи на O–символику. Проверьте по определению:

1. $\cos x = O(1)$, $x \to 0$,
2. $\sin x = O(x)$, $x \to 0$,
3. $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$,
4. $\sin x = o(1)$, $x \to 0$,
5. $\sin x \neq O(x^2)$, $x \to 0$
6. $x^2 = o(e^x)$, $x \to +\infty$,
7. $\log x = o(\sqrt{x})$, $x \to +\infty$.

Практика 7 (5 октября).

Формула Тейлора. Асимптотические разложения. Формула Тейлора и o,O-символика – удобные инструменты для поиска асимптотических разложений гладких функций. Для некоторых функций многочлены Тейлора легко ищутся и потом используются в более сложных ситуациях.

Упражнение. Найдите многочлены Тейлора отвечающие точке $x_0 = 0$ следующих функций:

1. e^x (ответ: $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, где $0! = 1$.)
2. $\sin x$ (ответ: $T_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, где m – наибольшее целое число, такое, что $2m+1 \leq n$).
3. $\cos x$ (ответ: $T_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, где m – наибольшее целое число, такое, что $2m \leq n$),
4. $\log(1+x)$, $x > -1$ ($T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ будет сходиться только при $|x| < 1$).
5. $(1+x)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$, $\alpha \neq 0$. (ответ: $T_n = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k$, где $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$, $C_\alpha^0 = 1$.)

Напрямую пользоваться формулой Тейлора не всегда удобно. Для более сложных функций выгодно подставлять одну формулу Тейлора в другую, контролируя размер остатоков.

Упражнение (см. ответы в Демидовиче, номера 1381-1387). Написать разложение по целым неотрицательным степеням x для следующих функций до членов указанного порядка:

1. $f(x) = e^{2x-x^2}$ до $O(x^6)$,
2. $f(x) = \log\cos x$ до $O(x^7)$,
3. $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$ до $O(x^4)$
4. $f(x) = \log\frac{\sin x}{x}$ до $O(x^7)$.

Решение пункта 2. По формуле Тейлора для $\cos x$, получаем:

$$\log\cos x = \log\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right), \qquad x \to 0.$$

Обозначая $t(x) = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$, замечаем, что $t(x) \to 0$, $x \to 0$. Следовательно,

$$\log(1 + t(x)) = t(x) - \frac{t(x)^2}{2} + \frac{t(x)^3}{3} + O(t(x)^4).$$

Сразу отметим, что $t(x) = O(x^2)$, следовательно, $t(x)^4 = O(x^8)$ при $x \to 0$. Значит,

$$\log(1 + t(x)) = t(x) - \frac{t(x)^2}{2} + \frac{t(x)^3}{3} + O(x^8), \qquad x \to 0.$$

Осталось вычислить $t(x) - \frac{t(x)^2}{2} + \frac{t(x)^3}{3}$ и выкинуть лишние слагаемые (“убрать их в $O(x^8)$”). Сделаем это:

$$\begin{aligned} t(x) &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \\ t(x)^2 &= \frac{x^4}{(2!)^2} - 2\frac{x^6}{2!4!} + O(x^8), \\ t(x)^3 &= -\frac{x^6}{(2!)^3} + O(x^8). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \log(1 + t(x)) &= t(x) - \frac{t(x)^2}{2} + \frac{t(x)^3}{3} + O(x^8) \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{(2!)^2} - 2\frac{x^6}{2!4!}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{(2!)^3}\right) + O(x^8), \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2!4!} - \frac{1}{3\cdot 8}\right)x^6 + O(x^8) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2!4!} - \frac{1}{3\cdot 8}\right)x^6 + O(x^8) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8). \end{aligned}$$

Можно увидеть, что разложение содержит лишь четные степени x. Это объясняется тем, что $\log\cos x$ – четная функция.

Домашнее задание. Найдите разложения других функций в задачах из диапазона $1381 - 1387$ (рекомендуется сверяться с ответами). На паре разберем пример с разложением функции

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

до члена с $O(x^5)$.

Практика 8 (11 октября).

Вычисление пределов. С использованием асимптотических разложений вычисление даже сложных на вид пределов становится простым занятием.

Упражнение (задачи из Демидовича, около номера 1400). Вычислите предел:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$
2. $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - x^2 + x/2)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$
6. $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ (1358)
7. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ (1363.1)
8. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$ (1406)

Письменное домашнее задание для подготовки к контрольной, 3 балла. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\cos 4x}-\cos(2xe^{x^2})}{(\sin 2x-2\tan x)^2}.$$

Срок сдачи: до 18:00 вторника 17 октября положить в ячейку с надписью "Р.В.Бессонов" на первом этаже лаборатории Чебышева (шкаф с ячейками преподавателей напротив входа в лабораторию)