“Кошмарные мысли” о первой контрольной

разбор

Задача 1. Вычислите интеграл, выражая его в терминах значений Γ- или B-функции Эйлера. Например,
$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx,$$
где n – целое положительное число.

Решение. Сделаем замену переменной $t = x^2$:
$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{n-1/2}e^{-t}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1/2).$$
Используя формулу понижения, получаем:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Gamma(n+1/2) &= \frac{1}{2}(n-1/2)\Gamma(n-1/2) = \frac{1}{2}(n-1/2)\cdot\ldots\cdot(1/2)\Gamma(1/2)\\ &= \frac{1}{2}\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot(1)}{2^n}\Gamma(1/2)\\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\Gamma(1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$
В последнем равенстве использована формула дополнения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, $x \in (0,1)$, для значения $x = 1/2$.

Задача 2. Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость. Например, выясните, при каких $p > 0$ сходится ряд
$$\sum_{n\geqslant 1}\sin n\cdot\arctan\left(\frac{n^p}{n^{2p}+1}\right).$$
Решение. Ряд знакопеременный, его члены стремятся к нулю. Упростим слагаемые так, чтобы они приняли наиболее удобную форму, а остаток при таком упрощении сходился бы абсолютно. Имеем
$$\frac{n^p}{n^{2p}+1} = \frac{1}{n^p(1+n^{-2p})} = \frac{1}{n^p}\left(\sum_{j=0}^{[1/p]+2}(-1)^j n^{-2jp} + O(n^{-2})\right).$$
Каждый ряд со слагаемыми вида
$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-2jp}\sin(n)$$
сходится по признаку Дирихле при любом $p > 0$ (суммы $\sum_{n=1}^N \sin n$ равномерно ограничены, а последовательность n^{-2jp} монотонно убывает к нулю). Значит, исходный ряд сходится при любом $p > 0$. Перейдем к рассмотрению абсолютной сходимости. Для знакоопределенных рядов признак Вейерштрасса позволяет заменять члены на сравнимые с ними. Разложение
$$\frac{n^p}{n^{2p}+1} = \frac{1}{n^p(1+n^{-2p})} = \frac{1}{n^p}(1+o(1))$$

показывает, что мы можем исследовать абсолютную сходимость ряда

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^p}$$

вместо исходного. При $p > 1$ ряд сходится, так как

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^p} \leqslant \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. При $p \in (0,1]$ ряд расходится. Чтобы это доказать, заметим, что

$$\sum_N^{2N} \frac{|\sin n|}{n^p} \geqslant \sum_{n \in A_N} \frac{|\sin n|}{n^p} \geqslant \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n} \geqslant \frac{\sharp A_N}{4(2N)},$$

где $A_N = \{N \leqslant n \leqslant 2N : \ |\sin(n)| > 1/4\}$. Так как $\sharp A_N/N$ не стремится к нулю с ростом N, ряд $\sum \frac{|\sin n|}{n^p}$ не сходится при $p \leqslant 1$ по критерию Коши.

Задача 3. Исследуйте интеграл на сходимость и абсолютную сходимость. Например, выясните, при каких $p > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^p \log^2(x+e)}\, dx.$$

Решение. Сначала изучаем интеграл на участке $(1, +\infty)$. Сделаем замену переменной $t = x^p$:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^p \log^2(x+e)}\, dx = \frac{1}{p} \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)}\, dt.$$

Если $2 - 1/p > 0$, то при больших t функция $t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)$ монотонна и стремится к бесконечности. Действительно, монотонность следует из рассмотрения производной:

$$\begin{aligned}(t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e))' &= (2-1/p)t^{1-1/p} \log^2(t^{1/p}+e) + 2\log(t^{1/p}+e) \frac{(1/p)t^{1/p-1}t^{2-1/p}}{t^{1/p}+e} \\ &= t^{1-1/p} \log^2(t^{1/p}+e) \Big((2-1/p)\log(t^{1/p}+e) + 2\frac{(1/p)}{t^{1/p}+e} \Big) > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, при $p > 1/2$ интеграл сходится по признаку Дирихле. Если $2 - 1/p = 0$ то есть $p = 1/2$, то мы имеем дело с интегралом

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\log^2(t^2+e)}\, dt,$$

который также сходится по признаку Дирихле. Если $2 - 1/p < 0$, то интеграл расходится. Действительно, на участках $I_k = 2\pi k + [\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$, где $\delta = 1/10$, имеет место неравенство $\sin t > 1/2$, поэтому

$$\int_{I_k} \frac{\sin t}{t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)}\, dt \geqslant (1/2) \min_{t \in I_k} \frac{1}{t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)},$$

и правая часть стремится к бесконечности при $2 - 1/p < 0$. Значит, интеграл не сходится при $0 < p < 1/2$ по критерию Коши. Рассмотрим вопрос абсолютной сходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)}\, dt.$$

Если $2 - 1/p \geqslant 1$, то интеграл сходится абсолютно по признаку Вейерштрасса:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{2-1/p} \log^2(t^{1/p}+e)}\, dt \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{t \log^2(t^{1/p}+e)}\, dt \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{(1/p)^2 t \log^2(t)}\, dt < \infty.$$

Если $2 - 1/p < 1$, то
$$\frac{|\sin t|}{t^{2-1/p}\log^2(t^{1/p}+e)} \geqslant \frac{|\sin t|}{t}$$
при больших t. Интеграл
$$\int_A^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geqslant \int_A^\infty \frac{|\sin t|^2}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int_A^\infty \frac{1-\cos(2t)}{t}\,dt$$
расходится для любого A, так как интеграл
$$\int_A^\infty \frac{1}{t}\,dt$$
расходится к $+\infty$, а интеграл
$$\int_A^\infty \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$$
сходится по признаку Дирихле. Итак, мы доказали, что интеграл
$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^p\log^2(x+e)}\,dx$$
сходится при только $p \geqslant 1/2$, и сходится абсолютно только при $p \geqslant 1$. Осталось разобраться со сходимостью в окрестности нуля, то есть с интегралом
$$\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x^p\log^2(x+e)}\,dx$$
Заметим, что на промежутке $(0,1)$ подынтегральная функция сравнима с константой по модулю, и поэтому указанный интеграл сходится абсолютно при любом значении параметра $p > 0$. Получаем ответ: при $p > 0$ исходный интеграл сходится при $p \geqslant 1/2$, сходится абсолютно при $p \geqslant 1$. Отдельно можно изучать и значения $p \leqslant 0$, этот случай остается в качестве упражнения.

Задача 4. Найдите асимптотику частичных сумм ряда, сравнивая их с суммами Римана непрерывной функции на отрезке. Например, найдите асимптотику сумм $\sum_{n=1}^N \frac{N^{\sqrt{2}}+n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}}}$.

Решение. При больших N и больших $n \leqslant N$ слагаемые ведут себя как $n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{7}}$. Прибавим и вычтем этот член:
$$\frac{N^{\sqrt{2}}+n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}}} - n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{7}} = n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{7}} + \left(\frac{N^{\sqrt{2}}+n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}}} - n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{7}}\right).$$
Оценим остаток при $n \leqslant N$:
$$\left|\frac{N^{\sqrt{2}}+n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}}} - \frac{n^{\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{7}}}\right| \leqslant \frac{N^{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+n^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}{(n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}})N^{\sqrt{7}}} \leqslant \frac{N^{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+n^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}{N^{2\sqrt{7}}} = o\left(\frac{N^{\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{7}}}\right).$$
Итак,
$$\sum_{n=1}^N \frac{N^{\sqrt{2}}+n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}}+N^{\sqrt{7}}} = \sum_{n=1}^N \left(n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{7}} + o\left(\frac{N^{\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{7}}}\right)\right) = N^{1+\sqrt{3}-\sqrt{7}}\sum_{n=1}^N \frac{1}{N}n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{3}} + o\left(\frac{N^{1+\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{7}}}\right).$$
По определению интеграла Римана,
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{N}n^{\sqrt{3}}/N^{\sqrt{3}} \to \int_0^1 x^{\sqrt{3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

Получаем асимптотику:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{N^{\sqrt{2}} + n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{5}} + N^{\sqrt{7}}} = \frac{N^{1+\sqrt{3}-\sqrt{7}}}{\sqrt{3}+1}(1+o(1)) + o\left(\frac{N^{1+\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{7}}}\right) = \frac{N^{1+\sqrt{3}-\sqrt{7}}}{\sqrt{3}+1}(1+o(1)).$$