Функциональный Анализ I

Вопросы к зачету

1. Теорема Хана-Банаха, вещественная форма.
2. Теорема Хана-Банаха, комплексная форма. Банахов предел.
3. Линейное топологическое пространство, пространство Фреше, линейное нормированное пространство, банахово пространство – определения и примеры. Разделяющее семейство полунорм и метрика, порожденная им. Ограниченное множество в линейном топологическом пространстве. Теорема: $C(\Omega)$ - пространство Фреше, но не нормируемо.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза о равномерной непрерывности.
5. Непрерывность и ограниченность линейных операторов, различные способы определения операторной нормы, теорема Банаха-Штейнгауза о равномерной ограниченности, теорема Банаха-Штейнгауза о поточечной сходимости. Примеры применения этих теорем. Продолжение оператора с плотного подмножества. Предел равномерно ограниченной последовательности операторов, сходящейся на плотном подмножестве.
6. Теорема об открытом отображении.
7. Теорема о линейной непрерывной биекции. Теорема о замкнутом графике. Полнота одного пространства относительно двух разных норм.
8. Полнота линейного нормированного пространства и абсолютная сходимость рядов. Примеры банаховых пространств. Доказательство полноты пространства $M(K)$ для хаусдорфова компакта K. Пополнение линейного нормированного пространства.
9. Пространство ограниченных операторов, сопряженное пространство к линейному нормированному пространству, их полнота. Теорема Хана-Банаха для линейных нормированных пространств. Теорема о достаточном числе функционалов.
10. Неограниченность функционала $f \mapsto f'(0)$ на $C^1(-1,1)$ с sup-нормой. Базис Гамеля: определение и существование. Существование неограниченного оператора, заданного на всем банаховом пространстве.
11. Конечномерные линейные нормированные пространства: эквивалентность норм, полнота конечномерных банаховых пространств, ограниченность линейных операторов, описание конечномерных линейных нормированных пространств в терминах компактности.
12. Скалярное произведение, его линейность и антилинейность, непрерывность. Неравенство КБШ, норма, порожденная скалярным произведением, определение гильбертова простанства, примеры. Тождество параллелограмма, теорема о метрической проекции.

13. Разность элемента и его наилучшего приближения до подпространства гильбертова пространства ортогональна этому подпространству. Существование ортогонального элемента к собственному подпространству. Ортогональное дополнение до подпространства. Сумма двух ортогональных подпространств гильбертова пространства. Сопряженный оператор и разложение $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Ran} T^*}$. Ортогональный проектор на подпространство и его описание в терминах операторных тождеств.

14. Ортогональная, ортонормированная, полная, минимальная системы векторов, ортонормированный базис. Пример: система $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на окружности. Сходимость рядов с ортогональными слагаемыми. Коэффициенты Фурье относительно данной ортонормированной системы, неравенство Бесселя. Ряд Фурье относительно ортонормированной системы, его сходимость в случае полноты системы. Равенство Парсеваля.

15. Ортогонализация Грама-Шмидта. Сепарабельность и существование счетного ортонормированного базиса. Сепарабельные гильбертовы пространства унитарно изоморфны. Существование сопряженного к оператору в гильбертовом пространстве. Норма линейного оператора как $\sup_{\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1} |(Tx, y)|$. Общий вид операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве.

16. Функционал в линейном пространстве с точностью до скалярного множителя определяется своим ядром. Теорема Рисса о линейных непрерывных функционалах в гильбертовом пространстве. Существование сопряженного оператора к ограниченному линейному оператору в гильбертовом пространстве.

17. Сопряженное пространство к пространству $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

18. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Доказательство сведения общей формулировки к существованию неотрицательной меры, задающей (вещественный) неотрицательный непрерывный функционал.

19. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Построение внешней меры и проверка ее счетной аддитивности и регулярности на σ-алгебре борелевских множеств.

20. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Последняя часть доказательства.

21. Тотальное семейство функционалов на линейном пространстве. Тотальное семество задает топологию линейного топологического пространства. Определение сильной, слабой, $*$-слабой топологии. Изометрическое вложение $X \subset X^{**}$ для банаховых пространств. Рефлексивность. Для банахова пространства X семейства X, X^{**} функционалов на X^* тотальны. Формулировка теоремы Банаха-Алаоглу, $*$-слабая компактность замкнутого единичного шара в пространстве, обладающем предсопряженным.

22. Тихоновское произведение топологических пространств. Формулировка теоремы Тихонова о произведении компактных хаусдорфовых пространств. Доказательство теоремы Банаха-Алаоглу.

23. Метризуемость $*$-слабой топологии на единичном шаре в пространстве, сопряженном к сепарабельному банахову пространству. Секвенциальная компактность $*$-слабой топологии единичного шара в пространстве, сопряженном к сепарабельному банахову пространству, $*$-слабая замкнутость в терминах поточечной сходимости. Примеры: *-слабая секвенциальная компактность шаров в $L^p(\mu)$, $M(K)$, гильбертовом пространстве. Координатные функционалы на ℓ^∞. Слабая компактнасть шара в рефлексивном пространстве.

24. Абсолютно выпуклое множество, поглощающее множество, примеры. Функционал Минковского, его субаддивность и положительная однородность, строгое неравенство для открытых множеств. Локально выпуклые линейные топологические пространства, примеры. Основная теорема отделимости в локально выпуклых линейных топологических пространствах, пункт (А).

25. Основная теорема отделимости в локально выпуклых линейных топологических пространствах, пункт (Б). Для локально выпуклого линейного топологического пространства X пространство его непрерывных линейных функционалов X' тотально. Если точка x локально выпуклого линейного топологического пространства X не принадлежит подпространству $M \subset X$, то $\phi(x) = 1$ для некоторого $\phi \in X'$, исчезающего на M. Слабое и сильное замыкание выпуклого множества в локально выпуклом линейном топологическом пространстве совпадают.

Литература

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы, общая теория.* М. Издательство иностранной литературы, 1962.
[2] У. Рудин, *Функциональный анализ.* М. Мир, 1975