

# Математический Анализ

Семестр 1, осень 2018

Р. В. Бессонов

Вопросы 1–38 в списке вопросов к коллоквиуму.

39. Обобщенная теорема Лагранжа о среднем (теорема Коши) и правило Лопиталья. Существование производной в концевой точке отрезка для непрерывной функции на отрезке, производная которой имеет предел в этой точке.
40. Определение интегрируемости по Риману и интеграла Римана. Монотонность сумм Дарбу по разбиению. Для любой пары разбиений нижняя сумма Дарбу меньше верхней. Критерий интегрируемости по Риману в терминах разности верхних и нижних сумм Дарбу.
41. Определение множества меры ноль. Объединение не более чем счетного числа множеств меры ноль – множество меры ноль. Счетные множества имеют меру ноль. Канторово множество имеет меру ноль. Отрезок  $[0, 1]$  не является множеством меры ноль.
42. Если функция непрерывна почти всюду, то она интегрируема по Риману
43. Если функция интегрируема по Риману, то она непрерывна почти всюду.
44. Включение  $C[a, b] \subset R[a, b]$ . Замкнутость  $R[a, b]$  относительно арифметических операций. Суперпозиция непрерывной функции и функции из  $R[a, b]$  лежит в  $R[a, b]$ . Монотонные функции имеют не более чем счетное множество разрывов, если ограничены, то интегрируемы по Риману.
45. Линейность интервала Римана. Сужение интегрируемой по Риману функции на отрезок интегрируемо по Риману. Интеграл - аддитивная функция отрезка. Основная оценка интеграла. Суммы Римана и интеграл Римана для непрерывной функции.
46. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу интегрирования в точке непрерывности подынтегральной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.
47. Формула Тейлора с интегральным остатком. Интегральная теорема о среднем.
48. Формула Тейлора с остатком Лагранжа.
49. Определения поточечной и равномерной сходимости последовательностей и рядов функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Пример:  $x^n$  поточечно сходится на  $[0, 1]$  к разрывной функции. Доказательство того, что эта сходимость не равномерна.
50. Теорема Стокса-Зейделя. Замкнутость класса  $C(E)$  относительно равномерной сходимости.

51. Замкнутость класса  $R[a, b]$  относительно равномерной сходимости, предельный переход под знаком интеграла. Предел равномерно сходящегося ряда. Дифференцируемость предела последовательности функций, производные которых непрерывны и сходятся равномерно. Дифференцируемость сходящегося ряда гладких функций, ряд из производных которых сходится равномерно.
52. Пример Ван дер Вардена
53. Комплексные числа: определение, вещественная и мнимая часть числа, сопряженное число, свойства модуля комплексного числа, топология на  $\mathbb{C}$ , сходимость последовательности комплексных чисел на  $\varepsilon$ - $\delta$  языке, в терминах вещественной и мнимой части, критерий Коши для  $\mathbb{C}$ .
54. Определение степенного ряда, признак Коши сходимости рядов, радиус сходимости степенного ряда (формула Адамара).
55. Независимость сходимости и значения суммы абсолютно сходящегося ряда от перестановки его членов. Умножение абсолютно сходящихся рядов.
56. Производная по комплексной переменной: определение, дифференцируемость степенного ряда в круге сходимости, формула для производной.
57. Определение экспоненты, оценка  $(n/2)^{n/2} \leq n!$ , сходимость степенного ряда для экспоненты, число  $e$ , бином Ньютона,  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ ,  $(\exp z)' = \exp z$ .
58. Свойства экспоненты: неотрицательность и строгое возрастание на  $\mathbb{R}$ , биективность из  $\mathbb{R}$  в  $(0, +\infty)$ . Определение  $\log x$ , дифференцируемость  $\log x$ ,  $(\log x)' = 1/x$ , возрастание  $\log$ ,  $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$ . Определение  $a^z$  для  $a > 0$ . Согласованность определения со старым определением степени, формула  $(a^z)' = \log a \cdot a^z$  для  $a > 0$ .
59. Оценки  $x^\alpha = o(e^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\log x = o(x^\alpha)$  при  $x \rightarrow +\infty$  для любого  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \log x = 0$  для любого  $\alpha > 0$ , предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .
60. Определение,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , сумма квадратов, вещественность на вещественной оси, производные, формулы для суммы аргументов, существование нуля  $\cos x$ , определение  $\pi$ , значения  $\cos \pi/2, \dots, \sin 2\pi$
61.  $2\pi$ -периодичность  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^{iz}$ ;  $e^{iz} = 1$  тогда и только тогда, когда  $z = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $2\pi$  – наименьший период  $\sin x$ ,  $\cos x$ .
62. Определение касательной и секущей к графику функции. Надграфик выпуклой функции выше касательной, секущая выше графика выпуклой функции. График  $\sin x$ , неравенства  $\sin x \leq x$ ,  $\sin x \geq 2x/\pi$ ,  $e^x \geq 1 + x$ ,  $\log(1 + x) \leq x$ .
63. Определение ряда Тейлора для функции  $f \in C^\infty$  на открытом подмножестве  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Ряд Тейлора степенного ряда совпадает с ним самим. Ряды Тейлора для  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\log(1 + x)$ . Ряды Тейлора для функций  $1/(1 + x^2)$  и  $e^{-1/x^2}$ .
64. Представление комплексного числа в виде  $z = re^{i\phi}$ . Формула Муавра. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители

65. Определение, неотрицательность, аддитивность вариации. Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух ограниченных монотонных функций. Функции ограниченной вариации имеют счетное число разрывов и интегрируемы по Риману.
66. Определение  $\mathbb{R}^n$ , скалярное произведение, норма в  $\mathbb{R}^n$ , их свойства, неравенство КБШ. Топология на  $\mathbb{R}^n$ , сходимость и покоординатная сходимость в  $\mathbb{R}^n$ .
67. Производная и интеграл векторнозначной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Основная оценка интеграла.
68. Вариация непрерывно дифференцируемой векторнозначной функции равна интегралу нормы ее производной
69. Путь в метрическом пространстве, носитель пути, эквивалентные пути, простой путь, простой замкнутый путь, длина пути в метрическом пространстве, спрямляемый путь, гладкий путь. Формула для длины гладкого пути в  $\mathbb{R}^n$ . Простые пути с одинаковым носителем имеют одинаковую длину. Вычисление длины верхней полуокружности единичного радиуса.
70. Несобственные интегралы, абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши. Признак сравнения. Абсолютная сходимость влечет условную. Сходимость и расходимость интеграла от степенной функции вблизи нуля и бесконечности.
71. Интегральный признак сходимости, его частный случай для убывающих неотрицательных функций. Критерий сходимости рядов  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha \log^\beta k}$  для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
72. Признак Абеля-Дирихле. Пример: условная, но не абсолютная сходимость  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ . Формула интегрирования по частям и формула замены переменной для несобственных интегралов.
73. Формула Солина  $\sum_1^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n (\{t\} - 1/2) f'(t) dt$ . Асимптотика частичных сумм гармонического ряда с точностью до  $O(\frac{1}{n})$ .
74. Формула Стirlinga (без вычисления точной константы).
75. Вычисление точной константы в формуле Стирлинга.
76. Интеграл Эйлера-Пуассона.