

Математический Анализ

Семестр 1, осень 2018

Р. В. Бессонов

Вопросы 1–38 в списке вопросов к коллоквиуму.

39. Обобщенная теорема Лагранжа о среднем (теорема Коши) и правило Лопиталья. Существование производной в концевой точке отрезка для непрерывной функции на отрезке, производная которой имеет предел в этой точке.
40. Определение интегрируемости по Риману и интеграла Римана. Монотонность сумм Дарбу по разбиению. Для любой пары разбиений нижняя сумма Дарбу меньше верхней. Критерий интегрируемости по Риману в терминах разности верхних и нижних сумм Дарбу.
41. Определение множества меры ноль. Объединение не более чем счетного числа множеств меры ноль – множество меры ноль. Счетные множества имеют меру ноль. Канторово множество имеет меру ноль. Отрезок $[0, 1]$ не является множеством меры ноль.
42. Если функция непрерывна почти всюду, то она интегрируема по Риману
43. Если функция интегрируема по Риману, то она непрерывна почти всюду.
44. Включение $C[a, b] \subset R[a, b]$. Замкнутость $R[a, b]$ относительно арифметических операций. Суперпозиция непрерывной функции и функции из $R[a, b]$ лежит в $R[a, b]$. Монотонные функции имеют не более чем счетное множество разрывов, если ограничены, то интегрируемы по Риману.
45. Линейность интервала Римана. Сужение интегрируемой по Риману функции на отрезок интегрируемо по Риману. Интеграл - аддитивная функция отрезка. Основная оценка интеграла. Суммы Римана и интеграл Римана для непрерывной функции.
46. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу интегрирования в точке непрерывности подынтегральной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.
47. Формула Тейлора с интегральным остатком. Интегральная теорема о среднем.
48. Формула Тейлора с остатком Лагранжа.
49. Определения поточечной и равномерной сходимости последовательностей и рядов функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Пример: x^n поточечно сходится на $[0, 1]$ к разрывной функции. Доказательство того, что эта сходимость не равномерна.
50. Теорема Стокса-Зейделя. Замкнутость класса $C(E)$ относительно равномерной сходимости.

51. Замкнутость класса $R[a, b]$ относительно равномерной сходимости, предельный переход под знаком интеграла. Предел равномерно сходящегося ряда. Дифференцируемость предела последовательности функций, производные которых непрерывны и сходятся равномерно. Дифференцируемость сходящегося ряда гладких функций, ряд из производных которых сходится равномерно.
52. Пример Ван дер Вардена
53. Комплексные числа: определение, вещественная и мнимая часть числа, сопряженное число, свойства модуля комплексного числа, топология на \mathbb{C} , сходимость последовательности комплексных чисел на ε - δ языке, в терминах вещественной и мнимой части, критерий Коши для \mathbb{C} .
54. Определение степенного ряда, признак Коши сходимости рядов, радиус сходимости степенного ряда (формула Адамара).
55. Независимость сходимости и значения суммы абсолютно сходящегося ряда от перестановки его членов. Умножение абсолютно сходящихся рядов.
56. Производная по комплексной переменной: определение, дифференцируемость степенного ряда в круге сходимости, формула для производной.
57. Определение экспоненты, оценка $(n/2)^{n/2} \leq n!$, сходимость степенного ряда для экспоненты, число e , бином Ньютона, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$, $(\exp z)' = \exp z$.
58. Свойства экспоненты: неотрицательность и строгое возрастание на \mathbb{R} , биективность из \mathbb{R} в $(0, +\infty)$. Определение $\log x$, дифференцируемость $\log x$, $(\log x)' = 1/x$, возрастание \log , $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$. Определение a^z для $a > 0$. Согласованность определения со старым определением степени, формула $(a^z)' = \log a \cdot a^z$ для $a > 0$.
59. Оценки $x^\alpha = o(e^x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\log x = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \log x = 0$ для любого $\alpha > 0$, предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
60. Определение, $\sin z$, $\cos z$, сумма квадратов, вещественность на вещественной оси, производные, формулы для суммы аргументов, существование нуля $\cos x$, определение π , значения $\cos \pi/2, \dots, \sin 2\pi$
61. 2π -периодичность $\sin z$, $\cos z$, e^{iz} ; $e^{iz} = 1$ тогда и только тогда, когда $z = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, 2π – наименьший период $\sin x$, $\cos x$.
62. Определение касательной и секущей к графику функции. Надграфик выпуклой функции выше касательной, секущая выше графика выпуклой функции. График $\sin x$, неравенства $\sin x \leq x$, $\sin x \geq 2x/\pi$, $e^x \geq 1 + x$, $\log(1 + x) \leq x$.
63. Определение ряда Тейлора для функции $f \in C^\infty$ на открытом подмножестве \mathbb{R} или \mathbb{C} . Ряд Тейлора степенного ряда совпадает с ним самим. Ряды Тейлора для e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\log(1 + x)$. Ряды Тейлора для функций $1/(1 + x^2)$ и e^{-1/x^2} .
64. Представление комплексного числа в виде $z = re^{i\phi}$. Формула Муавра. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители

65. Определение, неотрицательность, аддитивность вариации. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух ограниченных монотонных функций. Функции ограниченной вариации имеют счетное число разрывов и интегрируемы по Риману.
66. Определение \mathbb{R}^n , скалярное произведение, норма в \mathbb{R}^n , их свойства, неравенство КБШ. Топология на \mathbb{R}^n , сходимость и покоординатная сходимость в \mathbb{R}^n .
67. Производная и интеграл векторнозначной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Основная оценка интеграла.
68. Вариация непрерывно дифференцируемой векторнозначной функции равна интегралу нормы ее производной
69. Путь в метрическом пространстве, носитель пути, эквивалентные пути, простой путь, простой замкнутый путь, длина пути в метрическом пространстве, спрямляемый путь, гладкий путь. Формула для длины гладкого пути в \mathbb{R}^n . Простые пути с одинаковым носителем имеют одинаковую длину. Вычисление длины верхней полуокружности единичного радиуса.
70. Несобственные интегралы, абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши. Признак сравнения. Абсолютная сходимость влечет условную. Сходимость и расходимость интеграла от степенной функции вблизи нуля и бесконечности.
71. Интегральный признак сходимости, его частный случай для убывающих неотрицательных функций. Критерий сходимости рядов $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha \log^\beta k}$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
72. Признак Абеля-Дирихле. Пример: условная, но не абсолютная сходимость $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$. Формула интегрирования по частям и формула замены переменной для несобственных интегралов.
73. Формула Солина $\sum_1^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n (\{t\} - 1/2) f'(t) dt$. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда с точностью до $O(\frac{1}{n})$.
74. Формула Стirlinga (без вычисления точной константы).
75. Вычисление точной константы в формуле Стирлинга.
76. Интеграл Эйлера-Пуассона.