# Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу
## Семестр 1, 31 октября 2018

1. Формулировка теоремы о существовании линейно упорядоченного полного поля. Единственность нейтральных элементов по сложению и умножению, неравенства $1 > 0$, $x^2 \geqslant 0$, сложение и умножение неравенств.

2. Теорема о существовании наименьшего элемента в множестве верхних граней ограниченного сверху множества, определение sup и inf и их описание на языке неравенств. Лемма Кантора о вложенных отрезках.

3. Определение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Доказательство принципа математической индукции. Пример: неравенство Бернулли. Теорема: если $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, то $n - 1 \in \mathbb{N}$.

4. Теорема: если $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$, то $n - m \in \mathbb{N}$. Теорема: любое ограниченное подмножество $\mathbb{N}$ имеет минимальный и максимальный элемент. Доказательство принципа Архимеда.

5. Теорема о существовании и единственности $\sqrt[n]{x}$ для $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Иррациональность $\sqrt{2}$.

6. Замкнутость множества в топологическом пространстве в терминах его предельных точек. Теорема: $\sup E \in E$ для любого замкнутого ограниченного сверху множества $E \subset \mathbb{R}$. Теорема: множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

7. Теорема: подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Компактность отрезка $[0, 1]$.

8. Теорема: бесконечное ограниченное подмножество $\mathbb{R}$ имеет предельную точку. Теорема: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

9. Теорема: подмножество $\mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является промежутком.

10. Теорема: непрерывный образ компакта – компактен. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции на компакте.

11. Теорема: непрерывный образ связного множества – связен. Теорема Больцано-Коши о среднем значении непрерывной функции на промежутке.

12. Равносильность определений непрерывности а язывке окрестностей и на $\varepsilon - \delta$-языке. Теорема: непрерывная функция на компактном подмножестве $\mathbb{R}$ равномерно непрерывна.

13. Последовательность элементов топологического пространства и ее предел. Аксиома $T_2$ и единственность предела последовательности в хаусдорфовом топологическом пространстве. Последовательности вещественных чисел и их пределы на $\varepsilon$-$\delta$–языке. Равносильность двух определений предела. Ограниченность последовательности, имеющей предел.

14. Арифметические свойства пределов последовательностей. Если $\lim x_n < \lim y_n$, то $x_n < y_n$ при больших $n$.

15. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о двух миллиционерах.

16. Формулировка и доказательство критерия Коши для последовательностей и для рядов.

17. Предел монотонной последовательности. Бесконечные пределы последовательностей и их арифметические свойства.

18. Сходимость подпоследовательности сходящейся последовательности. Неравенство $\liminf x_n \leqslant \lim x_{n_k} \leqslant \limsup x_n$.

19. Теорема: верхний предел совпадает с наибольшим из частичных пределов. Сходимость последовательности в терминах ее верхнего и нижнего пределов.

20. Критерий Коши для рядов. Сходимость к нулю членов сходящегося ряда. Сходимость рядов с положительными членами. Признак сравнения сходимости рядов. Критерий сходимости ряда $\sum n^{-p}$.

21. Признаки Дирихле и Лейбница сходимости рядов.

22. Определение и единственность предела отображения в топологическом пространстве. Равносильность определений предела функции на языке окрестностей и на $\varepsilon - \delta$-языке. Взаимосвязь существования пределов $\lim_{E_1 \cup E_2} f$, $\lim_{E_1} f$, $\lim_{E_2} f$.

23. Существование предела функции $f$ в терминах последовательностей $\{f(x_n)\}$. Предел суперпозиции функций.

24. Непрерывность функции в точке на языке пределов. Сумма, произведение, частное непрерывных функций.

25. Ограниченность функции, имеющей предел. Отделенность от нуля функции, имеющей ненулевой предел. Критерий Коши для пределов функций.

26. Предел монотонной функции. Существование наибольшего элемента в множестве частичных пределов.

27. Существование конечного предела функции в терминах ее верхнего и нижнего пределов.

28. Окрестности бесконечности и общее определение предела. Определение бесконечных пределов на языке неравенств. Арифметические операции с бесконечными пределами функций.

29. $O$-символика, бесконечно малые, эквивалентность. Примеры: $c_0 + \ldots + c_n x^n \sim c_n x^n$ и $n^m = o(q^n)$ для любого $q > 1$.

30. Производная в точке. Производная суммы, произведения, частного.

31. Производная суперпозиции функций.

32. Производная обратной функции.

33. Необходимое условие внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля.

34. Теорема Лагранжа о среднем значении. Функции с нулевой производной на интервале. Первообразная функции и степень ее не единственности.

35. Теорема: дифференцируемая функция нестрого возрастает на интервале тогда и только тогда, когда ее производная неотрицательна.

36. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

37. Неравенство Йенсена для выпуклых функций.

38. Теорема: дифференцируемая функция $f$ (не)строго выпукла на $(a, b)$ тогда и только тогда, когда ее производная (не)строго возрастает на $(a, b)$. Выпуклость дважды дифференцируемых функций.