Задачи по анализу, листок 17

Указания к решению

1) Докажите, что $\hat{f}(0) = 0$ и что $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$. Используя вычеты, посчитайте $\hat{f}(2n)$. Вычисление суммы ряда $\sum_{n\geqslant 0} |f(2n)|$ сведется к суммированию геометрической прогрессии.

2) Примените лемму Римана-Лебега к функции χ_{E_+}, где E_+ обозначает множество точек, в которых $\sin n_k x$ имеет положительный предел. Докажите, что $|E_+| = 0$. Далее докажите что $\sin n_k x$ почти всюду на E стремится к нулю. Используйте лемму Римана-Лебега вновь, рассматривая функции $\cos 2n_k x = 2\cos^2 n_k x - 1$.

3) Загляните в конспект по анализу Фурье.

4) Докажите, что для любых ортогональных функций f, g из $E \ominus zE$ функция $f\bar{g}$ имеет нулевые коэффициенты Фурье. Затем используйте результат задачи 5.

5) Докажите, что квадрат модуля любой функции $f \in E \ominus zE$ имеет нулевые положительные коэффициенты Фурье. Докажите, что если $|s| = 1$ почти всюду на единичной окружности, то $s(\operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{T})} P) = \operatorname{clos}_{L^2(\mathbb{T})}(sP)$, где P – множество многочленов от z на $\mathbb{T}$.

6) Докажите, что операторы T^*T, TT^* самосопряженные, неотрицательные, по норме не превосходят 1. Пусть p_n – последовательность многочленов, равномерно сходящаяся на $[0,1]$ к $\sqrt{1-x}$. Используя спектральную теорему, покажите, что $p_n(T^*T)$ равномерно сходится к $\sqrt{1-T^*T}$.