Задачи по анализу, листок 16

Указания к решению

1) Докажите, что если $AB = BA$ и $e(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$, то $e(A + B) = e(A)e(B)$. Затем рассмотрите квадратичную форму оператора $e(T + T^*) + e(-T - T^*)$, где T – из условия задачи.

2) Используйте, что для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ верно тождество $\mathcal{F}^4 = I$. Собственные функции подберите в виде $p(x)e^{-x^2/2}$, где p – многочлен степени не выше трех.

3) Сначала докажите, что S^2 унитарно эквивалентен $S \oplus S$, где $S : f \mapsto zf$ в $L^2(\mathbb{T})$. Из этого выведите, что $\oplus_{k\in\mathbb{N}} T$ унитарно эквивалентен $\oplus_{k\in\mathbb{Z}} S$. Затем рассмотрите произвольный ортонормированный базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2[0, 1]$ и положите $e_{m,k}(x) = \chi_{[0,1]}(x - m)e_k(x - m)$. Докажите, что S на $L^2(\mathbb{T})$ унитарно эквивалентен $f \mapsto f(x - 1)$ на подпространстве $\oplus_{m\in\mathbb{Z}} \langle e_{m,k} \rangle$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

4) Рассмотрите оператор $\mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1}$.

5) Чтобы получить 1 балл, достаточно показать, что $e^x \cos e^x$ – распределение медленного роста.

6) Докажите, что функции z^n ортогональны в этом пространстве. При проверке полноты используйте опредение интеграла по $\mathbb{C}$ как предела интегралов по концентрическим кругам с центром в начале координат.

7) Посчитайте преобразование Фурье от $1/\sqrt{1 + x^2}$.