

Задачи по анализу, листок 16

Срок сдачи: 24 октября 2018 г.

Основные задачи (2 балла каждая)

1) Опишите все линейные ограниченные нормальные операторы T на гильбертовом пространстве H , такие, что оператор $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$ – унитарен. Здесь $0! = 1$ и T^0 – тождественный оператор.

2) Число $\lambda \in \mathbb{C}$ и функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяют равенству $\hat{f} = \lambda f$. Найдите множество всех возможных значений λ .

3) Рассмотрим оператор $T : f \mapsto z^2 f$ в $L^2(\mathbb{T})$ на единичной окружности $\mathbb{T}$. Докажите, что оператор $T \oplus T \oplus \dots$ в пространстве $L^2(\mathbb{T}) \oplus L^2(\mathbb{T}) \oplus \dots$ унитарно эквивалентен оператору $f \mapsto f(x-1)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

4) Докажите, что оператор $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\sin(x-t)}{x-t} dx$ на пространстве $L^2(\mathbb{R})$ корректно определен, самосопряжен и не компактен. Найдите спектр этого оператора.

5) Постройте функцию f со свойством $|f(x)| \geq e^x$, $x \in \mathbb{R}$, такую, что

$$\varphi \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(x) \varphi(x) dx$$

задает распределение медленного роста.

6) Гильбертово пространство состоит из целых функций f со свойством

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dA(z) < +\infty,$$

где A обозначает меру Лебега на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Постройте ортонормированный базис в этом пространстве, состоящий из многочленов.

Дополнительная задача (сдается после основных, 8 баллов)

7) Пусть $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – функция с носителем на $[0, +\infty)$ такая, что

$$\sup_{x>0} \int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt < +\infty, \quad \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+2} |g(t) - \langle g \rangle_n|^2 dt < +\infty,$$

где $g : t \mapsto \int_0^t f(s) ds$ и $\langle g \rangle_n = \frac{1}{2} \int_n^{n+2} g(s) ds$. Докажите, что $\hat{f}(x)/\sqrt{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R})$.