Задачи по анализу, листок 15

Срок сдачи: 26 сентября 2018 г.

Основные задачи (2 балла каждая)

1) Докажите, что линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ является полным тогда и только тогда, когда для любого набора $\{x_n\} \subset X$ со свойством $\sum_{n\geqslant 1} \|x_n\|_X < \infty$ ряд $\sum_1^\infty x_n$ сходится по норме к некоторому элементу $x \in X$.

2) Пусть ϕ – линейный непрерывный функционал на подпространстве E вещественного банахова пространства $C[0,1]$ непрерывных функций с sup–нормой. Предположим, что $1 \in E$ и $\phi(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $f \in E$. Докажите, что существует мера μ на $[0,1]$ такая, что $\phi(f) = \int_0^1 f(x)\, d\mu(x)$, $f \in E$.

3) Пусть X – сопряженное пространство к $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Верно ли, что его замкнутый единичный шар секвенциально компактен в $*$–слабой топологии?

4) Докажите, что пространство всех линейных ограниченных операторов на $L^2[0,1]$ не сепарабельно относителньно обычной sup–нормы. Для этого вычислите $\|P_t - P_s\|$, $t > s$, где $P_x : f \mapsto \chi_{[0,x]} f$ на $L^2[0,1]$ и $\chi_{[0,x]}$ – характеристическая функция отрезка $[0,x]$.

5) Верно ли предыдущее утверждение для пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$?

6) Докажите, что множество линейных комбинаций функций $\{e^{nx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ плотно в $C[0,1]$.

Дополнительные задачи (сдаются после основных, 6 баллов)

7) Существует ли унитарный оператор $U : L^2[-1,1] \to L^2[0,1]$, который при любом $x \in (0,1)$ переводит функции с носителем в отрезке $[-x,x]$ в функции с носителем в отрезке $[0,x]$?