На правах рукописи

Петрова Юлия Петровна

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

01.01.05 — Теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена на кафедре математической физики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:	**Назаров Александр Ильич,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Розовский Леонид Викторович,** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО СПХФУ Минздрава России (Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет), профессор кафедры высшей математики.
	Соболев Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, Университетский колледж Лондона, Лондонский университет (University College London), профессор.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита состоится «26» ноября 2018 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук http://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан «___» ___________ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В диссертации изучается асимптотическое поведение малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов.

Теория малых уклонений для гауссовских процессов в различных нормах активно изучается в последние десятилетия (см. напр. [20]; актуальную литературу по теме можно найти в [21]) и имеет широкий спектр применений, таких как оценка точности квантования случайных процессов, вычисление метрической энтропии функциональных множеств, закон повторного логарифма в форме Чжуна, нахождение скорости ухода бесконечномерного винеровского процесса. Также известно, что малые уклонения тесно связаны с функциональным анализом данных и непараметрическим байесовским оцениванием.

Задача малых уклонений случайного процесса X в норме $\|\cdot\|$ состоит в поиске асимптотики величины $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Большинство результатов относятся к гауссовским процессам. Для гауссовского процесса «типичным» является ответ вида

$$\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\} \sim D\,\varepsilon^C \exp(-B\varepsilon^{-A}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

для некоторых констант $A,B,D > 0$, $C \in \mathbb{R}$. Асимптотику величины $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$ называют точной асимптотикой малых уклонений. Отметим, что точную асимптотику удается найти только в исключительных случаях, поэтому часто рассматривают так называемую логарифмическую асимптотику $\ln(\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\})$. Но даже на логарифмическом уровне к задаче нет общего подхода, что делает задачу актуальной и по сей день.

По проблеме малых уклонений за последние 5 лет имеется более 70 публикаций (согласно [21]), что свидетельствует об интересе математиков к рассматриваемой тематике. Наиболее продвинутые результаты относятся к случаю L_2-нормы. Благодаря гильбертовой структуре задачу удается свести к спектральным асимптотикам интегральных операторов, что дает дополнительные возможности в поиске асимптотик малых уклонений. Имеющиеся подходы в других нормах описаны, например, в обзоре [27].

Конечномерные возмущения гауссовских процессов часто возникают в теории вероятностей и статистике. Например, броуновский мост является одномерным возмущением винеровского процесса. Другой пример — процессы, возникающие как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат, Колмогорова-Смирнова и их вариантов для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке, являются конечномерными возмущениями броуновского моста. Актуальным является исследование задачи малых уклонений для таких процессов и разработка общего подхода.

В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом: при каких условиях, зная асимптотику малых уклонений для невозмущенного процесса, можно найти асимптотику малых уклонений для его конечномерного возмущения?

Степень разработанности темы исследования. Задача малых уклонений в L_2-норме в силу разложения Карунена–Лоэва может быть сведена к поиску асимптотики $\mathbb{P}\{\sum \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\}$, где μ_k — собственные числа ковариационного оператора, ξ_k — независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины. Неявное решение задачи было получено в работе [26]. Затем многие авторы занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях на μ_k. Существенный вклад внесла работа [14], в которой явные выражения для асимптотики малых уклонений получены при достаточно общих условиях на μ_k.

Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений удается найти в редких случаях. Полезным инструментом служит принцип сравнения Венбо Ли (см. [19]): если μ_k и $\tilde{\mu}_k$ «асимптотически близки» (произведение $\prod \mu_k/\tilde{\mu}_k$ сходится), то асимптотики вероятностей малых уклонений для соответствующих процессов совпадают с точностью до мультипликативной константы. Тем самым задача сводится к поиску достаточно точной спектральной асимптотики ковариационного оператора.

В работах [22; 23] был выделен класс *гриновских* гауссовских процессов, для которых ковариационная функция есть функция Грина обыкновенного дифференциального оператора (ОДО). Это позволяет применить для нахождения асимптотики собственных чисел ковариационного оператора методы спектральной теории ОДО.

Спектральный подход, развитый в [22; 23], позволил получить точные асимптотики малых уклонений для большого количества конкретных гриновских процессов в L_2-норме с различными весами.

Опишем результаты, относящиеся к малым уклонениям для конечномерных возмущений гауссовских процессов. Известно, что при конечномерном возмущении логарифмическая асимптотика не изменяется. Поэтому изучается вопрос о точной асимптотике.

В работе [25] рассматривалась задача о возмущении спектра ковариационного оператора при одномерном возмущении гауссовской функции и получены соответствующие формулы для асимптотики L_2-малых уклонений. Частный случай был рассмотрен ранее в [13].

В [25] было показано, что если возмущение не является критическим (см. ниже определение 1 при $m = 1$), то собственные числа μ_k возмущенного оператора «асимптотически близки» к невозмущенным собственным числам μ_k^0 (т.е. $\prod \mu_k/\mu_k^0 < \infty$).

Далее, если возмущение является критическим (см. ниже определение 3 при $m = 1$) и удовлетворяет условию A (см. ниже теорему 2), то собственные числа μ_k возмущенного оператора «асимптотически близки» к сдвинутым собственным числам μ_{k+1}^0 невозмущенного оператора, (т.е. $\prod \mu_k/\mu_{k+1}^0 < \infty$).

Другой естественный класс конечномерных возмущений гауссовских процессов составляют процессы с исключенным трендом n-ого порядка. Они возникают при вычитании из исходного процесса его проекции в L_2 на подпространство полиномов степени меньше n. Простейший случай $n = 1$, отвечающий центрированным процессам, активно изучался для многих классических процессов. В частности, результаты для центрированных винеровского процесса и броуновского моста были получены в работе [12], для центрированного Орнштейна–Уленбека в работе [9]. Для винеровского процесса с исключенным трендом порядка n в работах [10; 11] были найдены собственные числа ковариационного оператора.

Цели и задачи. Основной целью работы является изучение точных асимптотик малых уклонений в L_2-норме для различных конечномерных возмущений гауссовских функций. Задача состоит в получении достаточно общих условий, при которых малые уклонения для возмущенного процесса выражаются через малые уклонения для исходного процесса.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по теории вероятностей и математической статистике, а также по спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов.

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов данной диссертации были использованы: асимптотические методы; методы теории функций комплексного переменного; спектральный метод нахождения асимптотики малых уклонений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Доказаны теоремы, описывающие связь между асимптотиками L_2-малых уклонений для гауссовской случайной функции и ее конечномерного возмущения в некритическом и критическом случаях.
2. Получены асимптотические разложения быстро осциллирующих интегралов с медленно меняющейся амплитудой.
3. Получены точные асимптотики спектров ковариационных операторов, а также точные асимптотики вероятностей L_2-малых уклонений для предельных процессов Дурбина, возникающих при проверке выборки на принадлежность к нормальному, логистическому, гамма распределениям, распределениям Лапласа и Гумбеля с неизвестными параметрами.

4. Получены точные асимптотики спектров ковариационных операторов, а также точная асимптотика вероятности L_2-малых уклонений для некоторого класса гриновских процессов с исключенным трендом n-ого порядка.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Семинар «Операторные модели в математической физике» лаборатории операторных моделей и спектрального анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2015, рук.: А.А. Шкаликов).
– Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении Математического института им.В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, 2017, рук.: И.А. Ибрагимов).
– Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2017, рук.: А.Н. Ширяев).
– Postgraduate seminar in probability, department of mathematics, Technical University of Munich (Munich, 2018, chair: N. Gantert).
– Seminar “Calculus of Variations and applications”, Ludwig-Maximilians-Universität München (Munich, 2018, chair: R. Frank).
– Oberseminar, Technical University Darmstadt (Darmstadt, 2018, chair: F. Aurzada).
– Oberseminar Analysis, Mathematische Physik & Dynamische Systeme, Technical University Dortmund (Dortmund, 2018, chair: I. Veselic).
– XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман (Ласпи), Россия, 2015).
– 7th St.Petersburg Conference in Spectral Theory dedicated to the memory of M.Sh.Birman (Санкт-Петербург, 2015).
– Международная конференция Days on Diffraction (Санкт-Петербург, 2016).
– The Second Russian-Indian Joint Conference in Statistics and Probability (Санкт-Петербург, 2016).
– International Symposium on Probability Theory and Random Processes (Санкт-Петербург, 2017).
– Зимняя конференция по теории вероятностей и математической физике. ПОМИ — МИРАН (Санкт-Петербург, 2017).
– The Third Indo-Russian Meeting in Probability and Statistics (Бангалор, Индия, 2018).

Публикации. Результаты данной диссертации опубликованы в работах [1—4], [5—8]. Работы [1—3] опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Работа [4] опубликована в издании, удовлетворяющему достаточному условию включения в перечень ВАК (переводная версия этого издания "Journal of Mathematical Sciences" входит в систему цитирования Scopus).

Работа [1], совместная с научным руководителем, написана в неразделимом соавторстве, за исключением построения асимптотического разложения интегралов с медленно меняющейся амплитудой, проведенного соискателем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержащих 18 параграфов, приложения, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 106 страниц. Список литературы содержит 83 наименования.

Содержание работы

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 1 рассматривается задача о возмущении спектра ковариационного оператора при конечномерном возмущении гауссовской функции. Для одномерных возмущений задача была рассмотрена в [25].

Рассмотрим гауссовскую случайную функцию $X_0(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^d$, с нулевым средним и функцией ковариации $G_0(x,y) := \mathbb{E}X_0(x)X_0(y)$, имеющую конечную L_2-норму: $\|X\|^2 = \int_{\mathcal{O}} X^2(x)\,dx$. Соответствующий ковариационный оператор в $L_2(\mathcal{O})$ будем обозначать $\mathbb{G}_0$. В качестве параметров возмущения рассмотрим вектор-функцию $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))^T$ с локально суммируемыми линейно независимыми компонентами при $x \in \bar{\mathcal{O}}$ и вещественнозначную матрицу A размера $m \times m$. Пусть $\vec{\psi} = \mathbb{G}_0\vec{\varphi}$ и определена матрица $Q = (Q_{ij})$, $i,j = 1,\dots,m$:

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{O}} \psi_i(t)\varphi_j(t)\,dt < +\infty, \quad \text{что равносильно} \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2}).$$

Тогда определено семейство гауссовских функций

$$X_A(x) := X_0(x) - \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)\,dy. \tag{2}$$

Определение 1. *Будем говорить, что X_A — некритическое возмущение функции X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\det(E_m - A^TQ) \neq 0$*;*

2. $\int_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$*,* $j = 1,\dots,m$*, линейно независимы.*

Определение 2. *Будем говорить, что X_A — частично критическое возмущение порядка s функции X_0, $0 < s < m$, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\mathrm{rank}(E_m - A^T Q) = m - s$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$, $j = 1,\ldots,m$, *образуют линейное пространство размерности* $m - s$.

Определение 3. *Будем говорить, что X_A — критическое возмущение функции X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $A = Q^{-1}$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt = 0$, $j = 1,\ldots,m$.

Основные результаты главы 1 следующие:

Теорема 1. (Случай некритического возмущения)
Пусть X_A — некритическое возмущение X_0. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbb{P}\{\|X_A\| < \varepsilon\} \sim \frac{\mathbb{P}\{\|X_0\| < \varepsilon\}}{\det(E_m - QA)}.$$

Теорема 2. (Случай критического возмущения)
Пусть X_A — критическое возмущение X_0. Если выполнено

$\forall j = 1,\ldots,m: \quad \varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, *что равносильно* $\psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$, **(*условие A*)**

то асимптотика вероятностей малых уклонений примет вид при $r \to 0$

$$\mathbb{P}\{\|X_A\| < \sqrt{r}\} \sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^r \int\limits_0^{r_1} \ldots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m}\mathbb{P}\{\|X_0\| < \sqrt{r_m}\} \frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r - r_1)(r_1 - r_2)\ldots(r_{m-1} - r_m)}}.$$

В параграфе 1.4 рассматривается класс процессов вида (2), естественным образом возникающих в статистике, введенных Дж. Дурбином в [15]. Эти процессы возникают как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке. Случай проверки на нормальность был рассмотрен ранее в работе [18] (процессы Каца–Кифера–Вольфовица), где была доказана сходимость эмпирических процессов с оцененными параметрами к предельным в смысле конечномерных распределений.

В параграфе 1.4 доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Процессы Дурбина с m оцененными параметрами являются критическими.*

В <u>главе 2</u> получены полные асимптотические разложения быстро осциллирующих интегралов с медленно меняющейся амплитудой.

Определение 4. *Функция $F(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если она измерима и знакопостоянна на полуоси $[A,\infty)$, $A > 0$, и для произвольного $\lambda > 0$ выполнено:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} = 1.$$

Функция $F(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $F(\frac{1}{x})$ медленно меняется на бесконечности.

Пусть функции $F(t)$ и $H(t)$ заданы на полуинтервале $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, и функции $F_0(t) = F(t)$, $F_{n+1}(t) = tF'_n(t)$ и $H_0(t) = H(t)$, $H_{n+1}(t) = tH'_n(t)$, $n \geqslant 0$, являются медленно меняющимися в нуле.

Теорема 4. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{cos}, \quad |R_N^{cos}| \leqslant C \cdot \frac{\left|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})\right|}{\omega},$$

где для коэффициентов c_k дано явное выражение и $C = C(F,N)$.

Теорема 5. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\sin(\omega t)\,dt = \frac{F(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \sum_{k=1}^{N} d_k \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{sin}, \quad |R_N^{sin}| \leqslant C \cdot \frac{|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})|}{\omega},$$

где для коэффициентов d_k дано явное выражение и $C = C(F,N)$.

Теорема 6. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{I}(\omega) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)H(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)H(t)\,dt + \sum_{n=2}^{N} \sum_{\substack{k+m=n\\ k,m\geqslant 1}} a_{k,m} \frac{F_k(\frac{1}{\omega})H_m(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + R_N^{sc},$$

где для коэффициентов $a_{k,m}$ дано явное выражение, и справедлива оценка:

$$|R_N^{sc}| \leqslant C(F,H,N) \sum_{\substack{i+j=N+1\\ i,j\geqslant 1}} \frac{|F_i(\frac{1}{\omega})H_j(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}.$$

Пусть $F(x) = \Phi^{-1}(x)$, $x \in [0,1]$, где

$$x = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

— функция стандартного нормального распределения. Построим последовательность функций: $F_{N+1}(x) := xF_N'(x), \quad N \geqslant 0.$

В параграфе 2.2 доказана следующая теорема:

Теорема 7. *$F_N(x)$, $N \geqslant 0$, — медленно меняющиеся функции в нуле.*

В параграфе 2.3 доказывается, что обратная функция к функции гамма распределения является медленно меняющейся при $t \to 1$, и выводятся асимптотические формулы, связанные с функцией гамма распределения.

В параграфе 2.4 получена формула для асимптотики малых уклонений точностью до константы при специальном асимптотическом поведении собственных чисел ковариационного оператора.

Теорема 8. *Рассмотрим форму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2$, где*

$$\Lambda_k = (\vartheta(k + \delta + F(k)))^{-d},$$

а $\vartheta > 0$, $\delta > -1$ и $d > 1$ — некоторые константы, а $F(t)$, $t \in [1,\infty)$, — медленно меняющаяся, монотонно стремящаяся к нулю функция при $t \to \infty$. Пусть

$$F_{-1}(x) := \int\limits_{1}^{x} \frac{F(t)}{t}\, dt, \quad F_{-1}(x) \to \infty \text{ при } x \to \infty.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \Big\} \sim$$

$$\sim C \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \exp\Big(- \frac{d-1}{2}\Big(\frac{\pi}{d\vartheta \sin(\frac{\pi}{d})}\Big)^{\frac{d}{d-1}} \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{d-1}} + \frac{d}{2} \cdot F_{-1}(\varepsilon^{-\frac{2}{d-1}})\Big),$$

где

$$\gamma = \frac{2 - d - 2d\delta}{2(d-1)}, \quad C = C(\vartheta,\delta,d,F) = \mathrm{const}.$$

В <u>главе 3</u> считаются точные асимптотики малых уклонений для предельных процессов Дурбина, возникающих при проверке выборки на принадлежность к следующим распределениям с параметрами $\theta = (\theta_1,\theta_2)$. Обозначим α — параметр сдвига, $\beta > 0$ — параметр масштаба, $\varkappa > 0$ — параметр формы.

А. распределение Лапласа с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LAP}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\alpha}{\beta}), & x \leqslant \alpha; \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta}), & x > \alpha. \end{cases}$$

Б. логистическое распределение с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LOG}(x,\theta) = \big(1 + \exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\big)^{-1}.$$

В. нормальное распределение с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{NOR}(x,\theta) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\beta^2}\right) dt.$$

Г. распределение Гумбеля с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{GUM}(x,\theta) = \exp\big(-\exp\big(-\frac{x-\alpha}{\beta}\big)\big).$$

Д. гамма распределение с параметрами $\theta = (\beta,\varkappa)$:

$$F^{GAM}(x,\theta) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \frac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)} dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Каждому распределению соответствует три предельных случайных процесса:

1) Первый параметр известен, а второй оценивается по выборке.
2) Второй параметр известен, а первый оценивается по выборке.
3) Оба параметра оцениваются по выборке.

В качестве предельных процессов возникают гауссовские процессы $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, соответственно, с нулевыми средними и функциями ковариации $G_i(s,t)$:

1) $G_1(s,t) = G_0(s,t) - p_1(s)p_1(t)$,

2) $G_2(s,t) = G_0(s,t) - p_2(s)p_2(t)$,

3) $G_3(s,t) = G_0(s,t) - \tilde{p}_1(s)\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_2(s)\tilde{p}_2(t)$,

где $G_0(s,t) = \min(s,t) - st$ — функция ковариации броуновского моста, а $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\tilde{p}_1(t)$, $\tilde{p}_2(t)$ выписываются явно.

Замечание 1. *По теореме 3 все рассматриваемые процессы являются критическими возмущениями броуновского моста. Однако только в случае процесса $X^{(1)}$ для логистического распределения выполнено условие A и потому применима теорема 2.*

Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов, не подходящих под общие теоремы, считается индивидуально с использованием асимптотических разложений, полученных в главе 2.

Заметим, что если распределение имеет экспоненциальные хвосты на бесконечности, то функция, обратная к функции распределения, будет медленно меняющейся на концах промежутка [0,1]. Поэтому в этом случае уравнение на собственные числа будет содержать интегралы с медленно меняющейся амплитудой. Это обуславливает выбор распределений А–Д.

В параграфе 3.2 выписывается общий вид уравнения на собственные числа ковариационного оператора при одномерном и двумерном возмущениях броуновского моста в терминах осциляционных интегралов.

В параграфах 3.3–3.7 выводятся теоремы о спектральных асимптотиках ковариационных операторов для процессов $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, в случаях распределений А–Д, а также соответствующие асимптотики малых уклонений.

Распределение Лапласа

Теорема 9. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, возникающим при проверке на распределение Лапласа, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, где*

1) $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$; **3**) $\tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$.

Теорема 10. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, в случае проверки на распределение Лапласа* $(\varepsilon \to 0)$:

$$\mathbf{1})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Логистическое распределение

Теорема 11. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на логистическое распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$; **2)** $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$;

3) $\tilde{\mu}_{2k-1}^{(3)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(3)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$.

Теорема 12. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на логистическое распределение* $(\varepsilon \to 0)$:

$$\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\ \varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\ \varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{15(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}}\ \varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Нормальное распределение

Теорема 13. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на нормальное распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

$$\mathbf{1)}\ \tilde{\mu}_{2k}^{(1)} = (2\pi k)^{-2},\quad \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = \Big(2\pi k + \frac{\pi}{\ln(k)}\Big)^{-2};$$

$$\mathbf{2)}\ \tilde{\mu}_{1}^{(2)} = \pi,\quad \tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2};$$

$$\mathbf{3)}\ \tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2};\quad \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = \Big(2\pi k + \frac{\pi}{\ln(k)}\Big)^{-2}.$$

Теорема 14. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на нормальное распределение* $(\varepsilon \to 0)$:

$$\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_1 \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\ \varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_2 \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Заметим, что константы C_1 *и* C_2 *найти пока не удалось.*

Распределение Гумбеля

Теорема 15. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, возникающим при проверке на распределение Гумбеля, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_k^{(2)} = \big((k+1/2)\,\pi + r_k\big)^{-2}$,

$$r_k = (-1)^k \cdot 2\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{\ln(\ln(k))+1}\Big) - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))};$$

3) $\tilde{\mu}_k^{(3)} = \big((k+1)\,\pi + r_k\big)^{-2}, \quad r_k = 2\pi\,\dfrac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)} + \pi\,\dfrac{(-1)^k}{\ln(k)}$.

Теорема 16. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, в случае проверки на распределение Гумбеля* ($\varepsilon \to 0$):

$$\textbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\textbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim D_1 \cdot \frac{1}{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\textbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim D_2 \cdot \exp\big(2\pi\ln^2(\ln(\varepsilon^{-1}))\big)\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Заметим, что константы D_1 и D_2 найти пока не удалось.

Гамма распределение

Теорема 17. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, возникающим при проверке на гамма распределение, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2}$; **2)** $\tilde{\mu}_k^{(2)} = \Big((k+1/2)\,\pi + \dfrac{(-1)^k \cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)}\Big)^{-2}$;

3) $\tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$,

где $\varkappa_0$ — фиксированный параметр формы.

Теорема 18. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, в случае проверки на гамма распределение* ($\varepsilon \to 0$):

$$\textbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\,\varkappa_0^{1/2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\textbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\,d\,\varkappa_0}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\textbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\varkappa_0\sqrt{2(\varkappa_0 d^2 - 1)}}{\pi^{7/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big),$$

где константа d *равна*

$$d = \frac{\left[\Gamma''(\varkappa_0)\Gamma(\varkappa_0) - (\Gamma'(\varkappa_0))^2\right]^{1/2}}{\Gamma(\varkappa_0)}, \qquad \Gamma(x)-\text{ гамма функция.}$$

В <u>главе 4</u> получены точные асимптотики L_2-малых уклонений для некоторого класса гриновских гауссовских процессов с исключенным трендом порядка n. Опишем их более детально.

Пусть $X(t)$, $t \in [0,1]$, — гауссовский процесс, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 5. *Процессом с исключенным трендом порядка* n *для* $X(t)$ *называют процесс* $X_n(t)$, *определенный формулой:*

$$X_n(t) := X(t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i, \tag{3}$$

где a_i *определяются соотношениями*

$$\int_0^1 t^i X_n(t)\,dt = 0, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Естественно смотреть на $X_n(t)$ как на компоненту, ортогональную в $L_2[0,1]$ к проекции $X(t)$ на подпространство полиномов степени менее n.

В главе 4 найдены асимптотики вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов $X_n(t)$ с исключенным трендом порядка n в случае, когда $X(t)$, $t \in [0,1]$, — гауссовский процесс с нулевым средним ($\mathbb{E}X(t) \equiv 0$), функция ковариации которого $G(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t)$ является функцией Грина краевой задачи

$$Lu := (-1)^p u^{(2p)} = \lambda u \tag{4}$$

с некоторыми граничными условиями. Мы предполагаем, что $n \geqslant 2p$ (в этом случае асимптотика малых уклонений не зависит от исходных граничных условий).

Задача сводится к нахождению спектральной асимптотики $\lambda_k^{(n,p)}$ при $k \to \infty$ следующей краевой задачи ($j = 0, \ldots, n-1$):

$$(-1)^p y^{(2n)}(t) = \lambda_k^{(n,p)} y^{(2n-2p)}(t), \qquad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0, \tag{5}$$

где $\lambda_k^{(n,p)}$ — k-ое собственное число задачи (5). Эта задача возникает при поиске точной константы в теореме вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^n(0,1) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^{n-p}(0,1)$:

$$\lambda_1^{(n,p)} = \min_{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n} \frac{\int\limits_0^1 (y^{(n)}(x))^2\,dx}{\int\limits_0^1 (y^{(n-p)}(x))^2\,dx}.$$

Эта константа была найдена в работе [16] при произвольных $n \in \mathbb{Z}_+$ и $p = 1$. При произвольных $p \in \mathbb{N}$ ответ был сформулирован в работе [17] без доказательства и в неявных терминах.

Окончательный результат главы 4 следующий:

Теорема 19. *Для процессов X_n имеем при $\varepsilon \to 0$*

$$\mathbb{P}\Big\{\|X_n\| < \varepsilon\Big\} \sim C \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \exp\Big(-\frac{2p-1}{2(2p\sin(\frac{\pi}{2p}))^{\frac{2p}{2p-1}}}\varepsilon^{-\frac{2}{2p-1}}\Big),$$

где $\gamma = \dfrac{1-2np+p^2}{2p-1}$ *и*

$$C = \frac{(2p)^{1+\frac{\gamma}{2}+\frac{p}{2}} \cdot \pi^{\frac{p-1}{2}} \cdot \sin^{\frac{1+\gamma}{2}}(\frac{\pi}{2p})}{2^{p(2n-p-\frac{1}{2})}\sqrt{2p-1} \cdot |\mathfrak{V}[1,z,\ldots,z^{p-1}]|} \cdot \frac{\Gamma^{-\frac{1}{2}}\left(n-p+\frac{1}{2}\right)\Gamma^{-\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{p-1}\Gamma(n-p+j+\frac{1}{2})}.$$

Здесь $\mathfrak{V}[x_1,\ldots,x_n]$ — определитель Вандермонда.

В приложение (глава 5) вынесены вспомогательные леммы и их доказательство, а также некоторые вспомогательные утверждения, не принадлежащие автору, со ссылками на первоисточники.

В заключении перечисляются основные результаты диссертации, а также предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 16-01-0258а), СПбГУ (проект 6.38.670.2013) и Российским научным фондом (проект 17-11-01003).

Публикации автора в рецензируемых изданиях

1. *Назаров А. И.*, *Петрова Ю. П.* Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица // Теория вероятностей и ее применения. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 482—505.

2. *Петрова Ю. П.* О спектральных асимптотиках одного семейства конечномерных возмущений операторов со следом // Доклады Академии Наук. — 2018. — Т. 481, № 5.

3. *Петрова Ю. П.* Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями // Математические заметки. — 2017. — Т. 102, № 3. — С. 405—414.

4. *Петрова Ю. П.* Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — Т. 466. — С. 211—233.

Тезисы докладов

5. *Petrova Yu. P.* Asymptotics of eigenvalues for some integro-differential operators // The Seventh St.Petersburg Conference in Spectral Theory. — 2015. — С. 19.
6. *Petrova Yu. P.* Small ball asymptotics for detrended green Gaussian processes of arbitrary order // 2nd Russian-Indian Joint Conference in Statistics and Probability. — 2016. — С. 27.
7. *Petrova Yu. P.* Spectral asymptotics in some problems with integral constraints // International conference Days on diffraction. — 2016. — С. 101.
8. *Петрова Ю. П.* Асимптотика собственных чисел для некоторых интегро-дифференциальных операторов // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2015). — 2015. — С. 24.

Список литературы

9. *Ai X.* A note on Karhunen–Loève expansions for the demeaned stationary Ornstein–Uhlenbeck process // Statistics & Probability Letters. — 2016. — Т. 117. — С. 113—117.
10. *Ai X.*, *Li W. V.* Karhunen–Loève expansions for the m-th order detrended Brownian motion // Science China Mathematics. — 2014. — Т. 57, № 10. — С. 2043—2052.
11. *Ai X.*, *Li W. V.*, *Liu G.* Karhunen–Loève expansions for the detrended Brownian motion // Statistics & Probability Letters. — 2012. — Т. 82, № 7. — С. 1235—1241.
12. *Beghin L.*, *Nikitin Y. Y.*, *Orsingher E.* Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L_2-norm // Journal of Mathematical Sciences. — 2005. — Т. 128, № 1. — С. 2493—2502.
13. *Deheuvels P.* A Karhunen–Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge // Statistics & Probability Letters. — 2007. — Т. 77, № 12. — С. 1190—1200.
14. *Dunker T.*, *Lifshits M. A.*, *Linde W.* Small deviation probabilities of sums of independent random variables // Progress in Probability. — 1998. — Т. 43. — С. 59—74.
15. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated // The Annals of Statistics. — 1973. — Т. 1, № 2. — С. 279—290.

16. *Janet M.* Les valeurs moyennes des carrés de deux dérivées d'ordre consécutifs, et le développement en fraction continue de tan x // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 1931. — Т. 2, № 55. — С. 11—23.

17. *Janet M.* Sur le minimum du rapport de certaines intégrales // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris. — 1931. — Т. 193. — С. 977—979.

18. *Kac M.*, *Kiefer J.*, *Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // The Annals of Mathematical Statistics. — 1955. — Т. 26, № 2. — С. 189—211.

19. *Li W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // Journal of Theoretical Probability. — 1992. — Т. 5, № 1. — С. 1—31.

20. *Li W. V.*, *Shao Q. M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications // Stochastic Processes: Theory and Methods. — 2001. — Т. 19. — С. 533—597.

21. *Lifshits M. A.* Bibliography of small deviation probabilities. — 2018. — https://airtable.com/shrMG0nNxl9SiGxII/tbl7Xj1mZW2VuYurm.

22. *Nazarov A. I.* Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems // Journal of Theoretical Probability. — 2009. — Т. 22, № 3. — С. 640—665.

23. *Nazarov A. I.*, *Nikitin Y. Y.* Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Probability Theory and Related Fields. — 2004. — Т. 129, № 4. — С. 469—494.

25. *Назаров А. И.* Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций // Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. 54, № 2. — С. 209—225.

26. *Сытая Г. Н.* О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1974. — Т. 2. — С. 93—104.

27. *Фаталов В. Р.* Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, 4 (352). — С. 89—134.