ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Андрея Александровича Лишанского

"Динамика линейных операторов
в пространствах аналитических функций",

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Диссертация А.А. Лишанского посвящена некоторым аспектам линейной динамики, то есть исследованию итераций линейных операторов в банаховых или топологических векторных пространствах. Эта область теории операторов интенсивно исследовалась на протяжении последних 25 лет, прежде всего американскими, французскими и испанскими аналитиками (Дж. Шапиро, Бурдон, Чан, Годфруа, Баярт, Гриво, Монтес-Родригес, Перис, Леон-Сааведра, Арон, Бес, Ансари, Салас и мн. др.). Об актуальности этой тематики свидетельствует тот факт, что в последние годы по ней опубликованы две монографии (Баярт, Матерон, 2009, и Гросс-Эрдман, Перис, 2011). В диссертации А.А. Лишанского получен ряд важных новых результатов в этой области.

Центральную роль в линейной динамике играет понятие гиперциклического оператора. Линейный оператор T в топологическом векторном пространстве X называют гиперциклическим, если найдется вектор $x \in X$, орбита которого (т.е. множество $\{T^n x, n \geq 0\}$) всюду плотна в X. В отличие от центрального для теории операторов (и для математики в целом) понятия циклического вектора и циклического оператора, явление гиперцикличности было обнаружено относительно недавно. Отметим, что даже существование операторов с подобным хаотическим поведением орбит не вполне очевидно, и доказательство гиперцикличности всегда требует дополнительной работы и не может быть выведено (в отличие от цикличности) из полноты тех или иных семейств функций. В то же время, оказывается, что целый ряд важных и естественных операторов в функциональных пространствах являются гиперциклическими (среди них дифференциальные операторы в пространствах целых функций, операторы Теплица, операторы композиции).

Первые результаты о гиперцикличности были получены для пространства всех целых функций (с топологией равномерной сходимости на компактах). Биркгоф (1924) показал, что таким свойством обладает оператор сдвига $Tf(z) = f(z-a)$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, а Мак-Лейн доказал гиперцикличность оператора дифференцирования. Таким образом, существует так называемая универсальная целая функция f такая, что всякая целая функция может быть равномерно на компактах приближена некоторой подпоследовательностью вида $f(z - n_j a)$ или $f^{(n_j)}$. Первый пример гиперциклического оператора в банаховом пространстве был найден польским математиком Ролевичем в 1969 году. А именно, им было показано, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, оператор λB, где B – оператор обратного сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, $B(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, будет гиперциклическим. Однако настоящий расцвет теории гиперциклических операторов наступил в начале 1990-х годов. Он связан с работами Китаи, Годфруа, Шапиро, Бурдона. В частности, была заложена абстрактная теория гиперцикличности, связанная с так называемым критерием Китаи. В то же время, явление гиперцикличности было исследовано для целого ряда специальных операторов (операторы взвешенного сдвига, операторы композиции).

В работе А. Лишанского исследованы три задачи о гиперциклических операторах. В Главе 2 рассматривается задача о существовании замкнутых линейных подпространств, каждый вектор в которых (кроме, разумеется, нулевого) будет гиперциклическим для данного оператора. Еще в 1993 году Бурдон показал, что у любого гиперциклического оператора есть всюду плотное линейное многообразие из гиперциклических векторов. Существенно более сложным является вопрос о существовании бесконечномерного **замкнутого** линейного подпространства из гиперциклических векторов. Такое подпространство имеется не всегда: например, Монтес-Родригес показал, что у оператора вида λB нет таких подпространств. В связи с этим, возникает естественный вопрос об описании полиномов (или аналитических функций) от оператора обратного сдвига, обладающих замкнутым подпространством из гиперциклических векторов. Отметим, что в модели, связанной с пространством Харди, оператору B отвечает оператор Теплица $T_{\bar{z}}$, а полиному $p(B)$ от оператора B – оператор Теплица с символом $\overline{p(z)}$.

Основной результат первой части работы – построение целого класса операторов вида $\varphi(B)$, где φ – функция из диск-алгебры (то есть аналитическая в открытом единичном круге и непрерывная вплоть до границы), обладающих бесконечномерным замкнутым линейным подпространством. Доказательство опирается на достаточное условие существования замкнутого гиперциклического подпространства из статьи Гонсалеса, Леон-Сааведра и Монтес-Родригеса (2000). Это достаточное условие включает в себя два этапа – проверку того, что существенный спектр оператора пересекает замкнутый единичный круг, и проверку некоторого усиленного свойства гиперцикличности (наследственная гиперцикличность). Функция φ может, в частности, быть полиномом, и для доказательства теоремы достаточно разобрать этот случай, а затем воспользоваться плотностью полиномов в диск-алгебре и непрерывной зависимостью существенного спектра от оператора.

В Главе 3 дано новое доказательство теоремы Гриво о существовании одномерных возмущений унитарного оператора, обладающих свойством гиперцикличности. Отметим, что тождественный оператор очень далек по своим свойствам от гиперцикличности. В то же время Чан и Шапиро доказали существование гиперциклического оператора в гильбертовом пространстве вида $I + K$, где компактный оператор K может лежать в любом классе Шаттена. Ясно, что $I + R$ не может быть гиперциклическим, если R конечного ранга. Тем не менее, если мы заменим I на унитарный оператор, гиперцикличность возможна. В 2010 году С. Шкарин построил пример унитарного оператора U, такого что $U + R$ гиперциклический для некоторого оператора R ранга два. Шкарин задал вопрос о том, может ли R быть ранга один. Положительный ответ на него был вскоре дан одной из лучших молодых французских аналитиков Софи Гриво.

Доказательство этой теоремы основано на одном достаточном условии гиперцикличности, также полученном Гриво. Отметим, что одним из стандартных методов доказательства гиперцикличности является критерий Годфруа–Шапиро, согласно которому достаточно, чтобы у оператора был достаточно большой запас собственных векторов отвечающих собственным числам с модулями больше и меньше единицы. Однако в задаче об одномерных возмущениях одномерных операторов эта ситуация невозможна. Существенно более тонкое достаточное условие, предложенное Гриво, говорит, что оператор гиперциклический, если у него есть некоторое "непрерывное" семейство собственных векторов с унимодулярными собственными значениями. В построении примера одномерного возмущения такое семейство собственных векторов строилось с помощью некоторой элементарной, но технически сложной индуктивной конструкции. Принципиально новый вклад А.А. Лишанского в эту задачу состоит в том, что для построения семейства собственных векторов он применил метод функциональной модели одномерных возмущений унитарных операторов, построенной в работах Капустина и Баранова–Якубовича. Применение функциональной модели сводит задачу к исследованию определенных систем функций в модельных пространствах K_θ и их мер Кларка. Новое доказательство теоремы Гриво существенно проясняет структуру полученных примеров, позволяет интерпретировать их с точки зрения теории функций и, возможно, в будущем приведет к полному описанию таких примеров.

В Главе 4 исследован известный открытый вопрос о гиперцикличности оператора Теплица. Операторы Теплица с антианалитическими символами являются одним из первых и наиболее естественных примеров гиперциклических операторов; согласно теореме Годфруа и Шапиро, оператор Теплица $T_{\bar{\varphi}}$ гиперцикличен тогда и только тогда, когда образ единичного круга $\varphi(\mathbb{D})$ пересекает единичную окружность $\mathbb{T}$. Однако случай операторов Теплица общего вида оставался практически не изученным. Только в 2012 году С. Шкарин нашел критерий гиперцикличности для операторов с символом вида $az + b + c\bar{z}$, то есть для операторов Теплица с трехдиагональной матрицей в стандартном базисе пространства Харди. В работе А.А. Лишанского впервые получены критерии гиперцикличности для операторов Теплица достаточно общего вида, существенно обобщающие результаты Шкарина. А именно, им установлены раздельно необходимые и достаточные условия гиперцикличности операторов Теплица с символами вида $T_{\varphi(z)+p(\bar{z})}$, где φ – ограниченная аналитическая функция, а p – многочлен. В случае, когда степень p равна единице, найденные необходимые и достаточные условия фактически совпадают. Эти результаты представляют собой крупное достижение в линейной динамике, уже вызвавшее значительный интерес у специалистов.

По результатам работы опубликовано три статьи. Все вынесенные на защиту результаты двух совместных с научным руководителям статей принадлежат А.А. Лишанскому. В статье, посвященной новому доказательству теоремы С. Гриво (Archiv der Matematik, 2015), мне принадлежит только постановка задачи и разработка функциональной модели одномерных возмущений унитарных операторов.

Диссертация А.А. Лишанского показывает, что ее автор прекрасно владеет методами современного комплексного и функционального анализа, в частности, методами теории операторов в функциональных пространствах. Работа свидетельствует также о хорошем знании научной литературы. А.А. Лишанскому удалось получить новые серьезные результаты в очень актуальной области современной теории операторов и теории функций. Считаю, что А.А. Лишанский достоин присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

Профессор кафедры мат. анализа СПбГУ,
доктор физ.-мат. наук
А.Д. Баранов 21.10.2016

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНН 7801002274
«Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

...10.2016

Документ подготовлен в порядке исполнения трудовых обязанностей