Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Васильев Иоанн Михайлович

Граничная гладкость, K-замкнутость и разложения Литтлвуда–Пэли

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., академик РАН
С. В. Кисляков.

Санкт-Петербург – 2019

Оглавление

Глава 1

Введение

Данная диссертационная работа посвящена обобщению некоторых хорошо известных классических результатов гармонического и комплексного анализа. Работа состоит из пяти глав, первая из которых — введение, а в каждой из основных глав, то есть в главах со второй по пятую, ставятся и решаются вопросы, относящиеся к описанию свойств различных классов функций.

Актуальность. Вещественный гармонический анализ (или анализ Фурье) — дисциплина, в современном понимании включающая в себя очень многое: от теории сингулярных интегральных операторов и классов Харди до различных способов выражения гладкости и других подобных свойств в терминах функциональных пространств. Эта дисциплина претерпела бурное развитие в течение XX века, которое продолжается и сейчас. Диссертация посвящена решению нескольких важных вопросов в этой дисциплине, что делает её тему актуальной. Подчеркнём также, что все задачи, рассмотренные и решённые нами здесь, суть обобщения одномерных результатов на случай функций нескольких переменных.

Методы. Отметим также, что методы, применённые нами при доказательствах основных результатов данной работы, объединены единым происхождением: всё это суть "вещественные методы", то есть методы теории функций вещественных переменных. Если говорить точнее, то мы в основном используем методы теории сингулярных интегральных операторов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении задач теории аналитических функций, гладких вплоть до границы. Кроме того, стоит отметить, что результаты третьей главы диссертации уже получили интерполяционные следствия, см [5].

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [1–3], все они напечатаны в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Библиография содержит 31 наименование, в число которых включены три работы автора по теме диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Отметим, также что результаты работы были доложены на различных семинарах по вещественному, комплексному и гармоническому анализу: Séminaire d'analyse harmonique, Paris 11, он же семинар Ги Давида, Séminaire d'analyse de Bordeaux, на семинаре по теории операторов ПОМИ РАН, на международной конференции Числа, Формы и Геометрия в Сочи.

Опишем вкратце каждую из четырёх основных глав работы.

1.1 Локальная граничная гладкость аналитических функций в шаре

Основная цель второй главы диссертации — исследование локальной граничной гладкости аналитических функций для случая единичного шара многомерного комплексного пространства.

Основным предметом изучения второй главы являются аналитические функции в единичном шаре $\mathbb{B}_n$, непрерывные вплоть до его границы, а также внешние функции в $\mathbb{B}_n$.

Сама рассматриваемая нами проблема является естественным развитием вопроса о связи между гладкостью вплоть до границы аналитической функции Φ и её модуля $\varphi = |\Phi|$ в единичном круге. В свою очередь, упомянутый вопрос имеет историю. Опишем здесь эту историю вкратце. При наложении некоторых ограничений на функцию Φ в виде предположения об отсутствии нулей в круге, функция Φ обладает гладкостью, вдвое меньшей, чем у φ (см., например, вводную часть статьи [3] по поводу исторических сведений и комментариев). Используя каноническую факторизацию функции $\Phi = F\vartheta B$, где F — внешняя функция, построенная по φ, ϑ — сингулярная внутренняя функция, а B — произведение Бляшке по нулям функции Φ, и допустив, что нулей в круге нет в очень сильном смысле, а именно $B = \vartheta = 1$, в 1970 году В. П. Хавин и Ф. А. Шамоян установили, см. [6], что будет гарантирована половинная гладкость для Φ в сравнении с гладкостью функции φ, при условии, что показатель гладкости принадлежит промежутку $(0,1)$, причём результат точен. Этот результат был затем распространён на случай произвольного положительного показателя гладкости, см. книгу [27].

В работе [8] Н. А. Широков доказал, что при условии суммируемости логарифма модуля граничных значений в некоторой степени, можно гарантировать меньшее падение гладкости для глобально липшицевых внешних функций в единичном круге. Точнее, в работе [8] было показано, что можно гарантировать гладкость порядка $p\alpha/(p+1)$ для внешней функции F с модулем $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, если выполняется условие

$$B_p := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |\log \varphi|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Стоит отметить, что при $p = 1$ получается в точности $\alpha/2$, а также что у любой ограниченной аналитической функции в круге граничные значения заведомо удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |\log \varphi| < \infty.$$

Кроме того, гладкость не падает вовсе, если $\log \varphi \in \mathrm{BMO}$ при $0 < \alpha < 1$, что было также доказано в [8].

Дальнейшим шагом в развитии исследований проблемы глобальной граничной гладкости аналитических функций стало рассмотрение случая единичного шара многомерного комплексного пространства. Мы имеем в виду работу [7], где было доказано, что если модуль $|f|$ принадлежит α-гёльдеровому классу на единичной сфере $\mathbb{S}^n$ при $0 < \alpha \leq 1$, а сама f — функция, голоморфная в открытом шаре $\mathbb{B}^n$ и непрерывная в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{B}^n}$, такова, что $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, то она $\alpha/2$-гёльдерова на $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Описанное выше поведение ограниченной аналитической функции в круге носит локальный характер, что было показано в работе [3]. Конкретнее, условие Гёльдера на φ только в одной точке обусловливает половинную гладкость для Φ в той же точке "в среднем". В той же статье было отмечено, что измерять "среднюю гладкость" аналитической функции Φ в точке удобно в терминах средней осцилляции или в терминах усредненных конечных разностей. При этом взятая по дуге (или, скорее, отрезку, если мы начнём работать с периодическими функциями на прямой вместо функций на окружности) I

средняя осцилляция функции f с периодом 2π представляет собой число

$$\nu_r\left(f;I\right)=\inf_c\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I|f-c|^r\right)^{1/r}, \qquad (1.1)$$

где нижняя грань берется по всем комплексным постоянным c; а $r\in[1,\infty)$ — произвольное число. Заметим, что средняя осцилляция, то есть число $\nu_r\left(f;I\right)$, увеличивается при возрастании r. Для описания "средней гладкости" аналитической функции f в точке x можно использовать в качестве критерия следующее неравенство: $\nu_r\left(f;I\right)\le\omega\left(|I|\right)$ при не очень длинном отрезке I (как уже было сказано, мы часто отождествляем функцию на окружности с её 2π-периодическим продолжением на прямую), например, $|I|\le 4\pi$, где ω — непрерывная, возрастающая, неотрицательная на $[0,+\infty)$, равная нулю в нуле, строго положительная везде, кроме нуля, функция. В случае выбора степенной шкалы для ограничивающей функции, то есть $\omega\left(t\right)=Ct^\alpha,\alpha>0$, указанное условие "правильно передаёт" гладкость лишь при $\alpha\le 1$. Другие свойства средних осцилляций ν и их связь с локальными и глобальными гёльдеровыми и липшицевыми классами гладкости представлены в работах [14] и [3].

В диссертации нам это не понадобится, однако отметим, что среднюю гладкость аналитической функции f можно также описывать посредством k-й разности $\Delta^kf\left(x,t\right)$ в точке x, а конкретнее — с помощью следующего неравенства:

$$\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\left|\Delta^kf\left(x,t\right)\right|^r dt\right)^{1/r}\le\omega\left(h\right), \qquad (1.2)$$

где по-прежнему ω — непрерывная возрастающая неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция, равная нулю в нуле, строго положительная везде, кроме нуля, при фиксированном r.

Следует отметить, что выбор числа k не произволен для конкретной функции ω. Так, при малых k может наступить вырождение, а при отсутствии вырождения увеличение k обычно не приводит к новым классам функций (кроме случая целых показателей α). Например, в степенной шкале $\omega\left(t\right)=Ct^\alpha$ нетривиальными значениями являются $k=1$ при $0<\alpha\le 1$ и $k=2$ при $0<\alpha\le 2$.

Перейдём к описанию основных результатов второй главы диссертации. Это — теоремы, обобщающие описанные выше утверждения о падении локальной гладкости в круге на случай единичного шара. Конкретнее, в первой из теорем мы доказываем, что локальная граничная гладкость непрерывной вплоть до границы аналитической функции без нулей в открытом шаре падает по отношению к граничной гладкости её модуля не более, чем вдвое. Приведём точную формулировку.

Теорема. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, не имеющая нулей внутри $\mathbb{B}^n$ и непрерывная вплоть до границы, т.е. n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$, а также, что для всех $t \in \mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \leq C_0 d(t, \mathbb{1})^\alpha,$$

где $\phi := |f|$, $\mathbb{1} := (1, 0, \ldots, 0)$, а $d(u,v) := |1 - \langle u, v\rangle|^{1/2}$ является стандартной (анизотропной) метрикой на n-мерной единичной сфере $\mathbb{S}^n$. Тогда для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где $l\,(Q)$ — радиус анизотропного шара $Q \subseteq \mathbb{S}^n$.

Отметим, что, разумеется, в рассматриваемой многомерной ситуации средняя осцилляция задается формулой

$$\nu\,(f;Q) = \inf_c \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - c| \right).$$

В двух других основных теоремах этой главы мы устанавливаем падение локальной гладкости внешней функции в единичном шаре (определение внешней функции даётся ниже), удовлетворяющей некоторым предположениям на модуль граничных значений, по отношению к гладкости её модуля и доказываем точность этого утверждения соответственно. Вот эти теоремы.

Теорема. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что внешняя функция $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ такова, что для всех $t \in \mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \leq C_0 d(t, \mathbb{1})^\alpha.$$

Предположим также, что

$$B_p := \int\limits_{\mathbb{S}^n} |\log \phi(z)|^p d\sigma(z) < \infty \text{ для некоторого } p > 1.$$

Тогда для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$, измеряющая гладкость, удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}},$$

где $l(Q)$ — радиус шара Q, а q — сопряжённый с p показатель.

Сравнивая эту теорему с предыдущей, можно заметить, что там функция f — не внешняя, но почти, в том смысле, что соответствующее интегральное представление можно написать, слегка отступив внутрь шара, чем мы и пользуемся при доказательстве.

Теорема. *Пусть $p \in (n, +\infty)$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует такая внешняя функция $f_0 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$, что:* $\log|f_0| \in L^p(\mathbb{S}^n)$, $|f_0| \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{1})$, *для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, выполняется*

$$\nu(f_0, Q) \lesssim l(Q)^{\frac{\alpha p}{p+n}} \left(\equiv l(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}}\right),$$

где $l(Q)$ — радиус Q, а также при этом

$$f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p}{p+n}+\delta}(\mathbb{1})$$

"в среднем"

Отметим, что оба показателя степени в оценках гладкости в первых двух теоремах естественны, этот момент более подробно прокомментирован во второй главе диссертации.

Методы, которые мы используем при доказательствах теорем из этой главы, суть оценки "средних осцилляций", упоминавшиеся выше.

Формулировки основных результатов этой главы опубликованы в статье [V1].

1.2 K-замкнутость "вещественных" классов Харди

Подчеркнём, что под "вещественными" классами Харди мы имеем в виду пространства, происходящие из теории вещественной переменной, в отличие от так называемых аналитических классов Харди. Точное определение даётся ниже в этом разделе.

Основным предметом изучения третьей главы являются вещественные классы Харди на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а также их интерполяционные свойства. Опишем более детально постановку рассматриваемых нами вопросов, а также представим кратко их историю.

Достаточно давно известно, что в интерполяционном смысле шкала аналитических классов Харди ведет себя на единичной окружности подобно шкале L^p. Для метода действительной интерполяции существует более сильное и точное утверждение, а именно: пара (H^r, H^t) является K-замкнутой в паре (L^r, L^t) для всех $r, t \in (0, \infty]$.

Напомним, что подпара (F_0, F_1) пары (E_0, E_1) квази-банаховых пространств считается K-замкнутой, если любое разложение

$$f = e_0 + e_1, e_i \in E_i \text{ вектора } f \in F_0 + F_1$$

порождает разложение

$$f = f_0 + f_1 \text{ с } f_i \in F_i,$$

где

$$||f_i||_{F_i} \leq C||e_i||_{E_i}, i = 1, 2.$$

При изучении классов Харди это означает, упрощённо говоря, что любое измеримое разложение (“граничной функции”) для аналитической функции порождает “аналитическое” разложение со слагаемыми приблизительно такого же “размера”.

В этом утверждении относительно K-замкнутости для шкалы H^p на единичной окружности трудными случаями являются те, для которых $r, t \in (0, 1] \cup \{+\infty\}$. Наиболее общий вид решения в этом случае был впервые получен Ж. Пизье в работе [25]. Другие методы решения этой задачи представлены в работах [11] и [23]. В обзоре [23] также рассмотрен случай весовых пространств Харди.

Если показатель p удовлетворяет неравенствам

$$\frac{n-1}{n} < p < \infty,$$

то соответствующее пространство Харди на пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть интерпретировано как пространство гармонических векторных полей $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t>0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{n} |h_j(x,t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Подобное векторное поле всегда порождается единственным распределением ϕ на $\mathbb{R}^n$ таким, что функция h_0 представляет собой интеграл Пуассона от ϕ, а функции $h_j, 1 \leq j \leq n$ являются интегралами Пуассона от $\mathcal{R}_j\phi$, где $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ суть преобразования Рисса, то есть

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = c_n v.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)\, dt,$$

где $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/\pi^{(n+1)/2}$. Кроме того, функции $h_0, \dots, h_n$ имеют граничные значения $u_0, \dots, u_n$ при $t \to 0$ почти всюду. Хорошо известно, что отображение

$$(h_0, \dots, h_n) \to (u_0, \dots, u_n)$$

является изометрическим вложением пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$ в пространство

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) := (L^p(\mathbb{R}^n) \oplus ... \oplus L^p(\mathbb{R}^n)).$$

Образ этого вложения мы будем обозначать через $\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что если $p \geq 1$, то ϕ и u_0 совпадают как распределения (более того, распределения $\mathcal{R}_j\phi$ равно u_j для каждого $1 \leq j \leq n$). С другой стороны, при $p < 1$ это не будет выполняться в общем случае. Более подробное изложение данного феномена представлено в книге [15].

Теперь естественно спросить, является ли пара $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n))$ K-замкнутой в паре $(\mathbb{L}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$. Отметим, что положительный ответ на этот вопрос является более сильным утверждением, чем следующий широко известный факт: пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ интерполируются вещественными методами в соответствии с такими же формулами, что и для $L^s(\mathbb{R}^n)$. Так как преобразования Рисса суть сингулярные интегральные операторы, то, используя методы работы [11], можно доказать, что при $1 \leq r < p < \infty$ ответ на поставленный выше вопрос о K-замкнутости утвердительный (этот вопрос также рассматривался в обзоре [23]).

Основным результатом третьей главы является доказательство K-замкнутости пары $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$ в случае показателей r и p, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{n-1}{n} < r < p \leq \infty.$$

Методы, использованные нами при доказательстве основного результата этой главы, включают субгармоническое свойство длины градиента системы сопряжённых гармонических функций, теорему Уитни о разложении открытых множеств на кубы, а также усовершенствование метода Бургейна в K-замкнутости.

Основные результаты этой главы опубликованы в статье [V2].

1.3 Свойство “$\log f \in \mathrm{BMO}$” в терминах преобразований Рисса

В четвертой главе диссертации изучаются некоторые свойства пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Опишем более детально постановку рассматриваемых нами вопросов, а также представим вкратце их историю. В статье [22] на странице 695 доказывается следующая лемма.

Лемма. *Пусть $f > 0$ — измеримая на $\mathbb{T}$ функция (где $\mathbb{T}$ — единичная окружность). Тогда $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$, если и только если существуют числа $c > 1$ и $0 < \rho < 1$ а также функция $w > 0$ такие, что $f/c \leq w \leq cf$ и $|\mathcal{H}(w^\rho)| \leq cw^\rho$, где $\mathcal{H}$ — преобразование Гильберта на $\mathbb{T}$, то есть,*

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\mathrm{tg}(\frac{x-t}{2})}\, dt.$$

Необходимо отметить, что эта лемма активно использовалась в теории интерполяции одномерных аналитических классов Харди (см. [22]). К сожалению, упомянутая выше лемма относится лишь к единичной окружности $\mathbb{T}$. В связи с этим возникают вопросы о постановке и доказательстве аналогичного результата для случая пространств $\mathbb{R}^n$.

В одной из основных теорем этой главы нам удалось доказать частичное обобщение процитированной леммы. Конкретнее, мы доказали следующее.

Теорема. *Пусть $f > 0$ — измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, если существуют числа $c > 1$ и $0 < \rho < 1$, а также функция $w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n), p_0 > 1$ такие, что $f/c \leq w \leq cf$ и $|\mathcal{R}_j(w^\rho)| \leq cw^\rho$ для всех j от 1 до n, где $\mathcal{R}_j$ — j-ое преобразование Рисса в $\mathbb{R}^n$.*

Заметим, что этот результат даёт лишь частичное распространение одномерной леммы на случай $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ (из него следует только достаточность). Тем не менее, в полной общности нами было доказано некое другое (более слабое) утверждение. Вот его формулировка.

Теорема. *Пусть $f > 0$ — измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, если и только если существуют положительные функции $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $f = (g_1/g_2)^\alpha$ и при этом $|\mathcal{R}_j g_i| \leq cg_i$ для всех j от 1 до n, и $i \in \{1, 2\}$.*

Методы, использованные нами при доказательствах основных результатов этой главы, включают субгармоническое свойство модуля градиента системы сопряжённых гармонических функций, "приём" Рубио де Франсиа и описание пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ посредством классов Макенхаупта.

Основные результаты этой главы опубликованы в статье [V3].

Кроме того, стоит отметить, что результаты этой главы уже получили интерполяционные следствия, см. [5].

1.4 Описание пространств Трибеля–Лизоркина посредством разложений вида Литтлвуда–Пэли

Основным предметом изучения пятой главы является шкала пространств Бесова–Трибеля–Лизоркина $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$.

Опишем более детально постановку рассматриваемых нами вопросов, а также представим вкратце их историю.

В статье С.В.Бочкарёва [1] доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\{V_n\}$ — ядра Валле–Пуссена на окружности, $Q_0 = 1, Q_n = V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ при $n \geq 1$. Для $f \in L^1$ положим*

$$\|f\|_D := \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leq |I|} \left| \int_0^{2\pi} f(t) Q_n(x-t) dt \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда такая норма эквивалента норме $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Позднее это утверждение было использовано С.В.Бочкарёвым в различных вопросах, связанных с тригонометрическими рядами.

В работе [2] автор диссертации и А.С.Целищев доказали обобщение этого неравенства, заменив ядра Валле-Пуссена на более общую систему функций. Приведём формулировку этой теоремы.

Теорема. *Пусть $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система функций на $\mathbb{R}^d$, таких что*
1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n \equiv 1$,
2) $\operatorname{supp} \psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leq |x| \leq 2^{n+1}\}$,
3) $2^{-nd} \int |D^\alpha \psi_n(\xi)|^2 d\xi \leq K 2^{-2n|\alpha|}$ *для* $0 \leq |\alpha| \leq a$, *где* a *— наименьшее натуральное число, больше либо равное* $d/2$.

Определим оператор $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ *и норму*

$$\|f\|_D := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx \Big)^{1/2},$$

супремум берётся по всем кубам Q, *а* $l(Q)$ *— длина ребра куба* Q. *Тогда* $C_1\|f\|_D \le \|f\|_{\mathrm{BMO}} \le C_2\|f\|_D$ *для некоторых постоянных* C_1 *и* C_2.

Этот результат приводится здесь как элемент обзора и не выносится на защиту.

Выражение, появившееся в предыдущей теореме, напоминает то, которое возникает в определении пространств Трибеля-Лизоркина. Удобно сформулировать его так.

Определение 1. Пусть φ — набор гладких функций на $\mathbb{R}^d$, $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких, что

1) $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \le |x| < 2^{n+1}\}$,

2) $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n (x) = 1$ *при всех* $x \ne 0$,

3) $2^{-nd} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi_n (\xi)| d\xi \le K_\varphi \cdot 2^{-n|\alpha|}$ при всех $0 \le |\alpha| \le d+1$.

Зададим пространство ***Трибеля-Лизоркина*** $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$, где $p \in (1, +\infty)$ так: $f \in \mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$ тогда и только тогда, когда

$$\|f\|^p_\varphi := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_{n,\varphi} f(x)|^p dx \right) < \infty,$$

где sup берётся по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^d$, $l(Q)$ — длина ребра куба Q, а операторы $\Delta_{n,\varphi}$ задаются следующим образом:

$$\widehat{\Delta_{n,\varphi} f} (x) = \varphi_n (x) \cdot \widehat{f(x)}.$$

Формально говоря, классические пространства Трибеля-Лизоркина возникают здесь, когда все функции φ_n получаются из одной функции класса Шварца сдвигами и двоичными растяжениями, см. [17]. Основной результат пятой главы говорит о том, что на самом деле любая система $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условиям 1)-3) определения, даёт тот же результат.

Теорема. *Пусть* $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— два набора, удовлетворяющие условиям 1)—3) из определения. Тогда*

$$\|f\|_{\varphi} \lesssim \|f\|_{\psi},$$

где постоянная в эквивалентности зависит лишь от p *и* K_{ψ}

Заметим, что условия 1)—3) близки к условиям знаменитой теоремы Хёрмандера-Михлина о мультипликаторах.

Методы, использованные нами при доказательствах основных результатов этой главы, суть методы теории сингулярных интегральных операторов.

Все технические результаты, использованные при доказательстве основного результата этой главы, принадлежат мне и опубликованы в статье [2].

Благодарности. *Я очень благодарен моему научному руководителю Сергею Витальевичу Кислякову за всю поддержку, которую он оказал мне при подготовке этой работы. Отдельное спасибо всем моим учителям, коллегам и друзьям, повлиявшим на моё математическое образование. Я хочу выразить самую искреннюю благодарность своей семье, поддерживавшей меня на всём протяжении написания диссертации.*

Глава 2

Локальная граничная гладкость аналитических функций в шаре

2.1 Введение

Впервые следующая теорема была опубликована в работе [6].

Теорема А. *(Карлесон–Якобс–Хавин–Шамоян) Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Предположим, что аналитическая в открытом единичном круге функция f непрерывна вплоть до границы, а её модуль на границе круга удовлетворяет условию Гёльдера порядка α. Предположим также, что f не имеет нулей в открытом единичном круге. Тогда функция f является $\alpha/2$-гёльдеровой на граничной окружности $\mathbb{T}$.*

Следует отметить, что теорема А справедлива для всех индексов $\alpha \in \mathbb{R}_+$, см. [27].

Следующая локальная версия теоремы А была доказана в работе [3].

Теорема В. *(Кисляков–Васин–Медведев) Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Предположим, что $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ аналитическая функция из класса Смирнова без нулей внутри открытого единичного диска $\mathbb{D}$, является α-гёльдеровой в некоторой точке ξ, которая принадлежит граничной окружности $\mathbb{T}$. Также предположим, что*

$$\int_{\mathbb{T}} |\log |f||^p < \infty, \text{ для некоторого } p \geq 1.$$

Тогда для всех дуг I, содержащих точку ξ, средняя осцилляция $\nu(f,I)$, измеряющая гладкость, удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,I)\left(:=\inf_{a\in\mathbb{C}}\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(z)-a|\,d\sigma(z)\right)\le Cl(I)^{\frac{\alpha}{2-\frac{1}{q}}},$$

где q — гёльдеров сопряжённый показатель для $p, 1/p+1/q=1$.

Приведём несколько замечаний. Во-первых, у любой ограниченной аналитической функции в круге, граничные значения заведомо удовлетворяют условию суммируемости логарифма модуля с $p=1$. Во-вторых, отметим, что теорема А была использована Дж.Бреннаном в его работе [12], где с помощью указанного результата он описал плоские области, на которых любая аналитическая функция допускает полиномиальную аппроксимацию в L^p метрике. Другое применение глобальной теоремы Карлесона–Якобса–Хавина–Шамояна было найдено в работе [9], где авторы использовали её для описания циклических подпространств гармонических пространств Дирихле. Также отметим работу Машреги и Шабанкхаха [24], где теорема Карлесона–Якобса–Хавина–Шамояна была использована для сравнения нуль множеств и множеств единственности в пространствах Дирихле. Дополнительно отметим, что теорема А цитировалась в работах [13] и [28]. Теорема В представляет собой очень существенное уточнение теоремы А, не говоря уже о том, что из подобных локальных оценок следуют глобальные с настоящей, а не средней интегральной гёльдеровостью. Скажем, если в точках некого интервала имеется равномерная оценка средней осцилляции функции f, то f будет липшицевой на этом интервале, см. [3].

В этой главе рассмотрен многомерный случай локальной задачи.

Формулировкам основных результатов предпошлём два важных определения.

Определение 2. ***Ядром Коши*** для единичного шара $\mathbb{B}^n$ будем называть функцию

$$C(z,\xi)=\left(\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}\right).$$

Функцию $\int_{\mathbb{S}^n} C(z,\xi)f(\xi)d\sigma(\xi)$ мы будем часто называть ***“свёрткой”*** f с ядром Коши.

Определение 3. Функция $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — ***внешняя***, если для всех $z \in \mathbb{B}^n$,

$$f(z) = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi) - 1)\,\mathrm{Re}(\log f(\xi)) d\sigma(\xi)\right].$$

Следующие теоремы представляют основные результаты данной главы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что внешняя функция $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$, где $n > 1$, такова, что для всех $t \in \mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \leq C_0 d(t, \mathbb{1})^\alpha,$$

где $\phi := |f|$, $\mathbb{1} := (1, 0, \ldots, 0)$, а $d(u,v) := |1 - \langle u, v\rangle|^{1/2}$ является стандартной (анизотропной) метрикой на n-мерной единичной сфере $\mathbb{S}^n$. Предположим также, что

$$B_p := \int\limits_{\mathbb{S}^n} |\log \phi(z)|^p d\sigma(z) < \infty \text{ для некоторого } p > 1.$$

Тогда для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$, измеряющая гладкость, удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q)\left(:= \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(z) - a|\, d\sigma(z)\right) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}},$$

где $l(Q)$ — радиус шара Q а q — сопряжённый с p показатель.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, не имеющая нулей внутри $\mathbb{B}^n$ и непрерывная вплоть до границы, т.е. n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$, а также, что для всех $t \in \mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \leq C_0 d(t, \mathbb{1})^\alpha.$$

Тогда для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $p \in (n, +\infty)$. *Тогда для каждого* $\delta > 0$ *существует такая внешняя функция* $f_0 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$, *что:* $\log |f_0| \in L^p (\mathbb{S}^n)$, $|f_0| \in \mathrm{Lip}_\alpha (\mathbb{1})$, *для всех неизотропных шаров* Q, *содержащих точку* $\mathbb{1}$, *выполняется*

$$\nu (f_0, Q) \lesssim l(Q)^{\frac{\alpha p}{p+n}} \left(\equiv l(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}} \right),$$

где $l (Q)$ *— радиус* Q, *а также при этом*

$$f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p}{p+n}+\delta} (\mathbb{1})$$

"в среднем"

Объясним различие между первыми двумя теоремами. В первой теореме наш метод не дает ничего для $p = 1$, кроме случая $n = 1$. Тем не менее, формально положим $p = 1$. Тогда в теореме 1 мы получим ограничение на поверхностный интеграл от модуля логарифма нашей функции ϕ, в то время как во втором случае мы фактически получаем ограниченность логарифмических интегралов всех срез-функций, что априори является более сильным условием (более подробно срез-функции описаны в книге [26]). Дополнительное замечание состоит в том, что при $n = 1$ особой разницы между рассматриваемыми двумя случаями нет, в том смысле, что в обоих случаях получается падение гладкости в два раза.

Нам представляется вероятным, что существуют версии доказанных в этой главе теорем, которые справедливы при более общих условиях, а именно в случае голоморфных функций, определенных на более общих областях в $\mathbb{C}^n$. Доказательство этих обобщений планируется провести в ближайшем будущем.

Замечание 1. *Отметим, что из результатов этой главы, наибольшую ценность и интерес представляют теоремы 2 и 3, тогда как теорема 1 доказывается прямым обобщением метода, описанного в статье [3].*

2.2 Доказательство теоремы 1

Начнём доказательство со следующего (технического) результата, который, тем не менее, мы назовем теоремой по причине некоторых нетривиальных (по крайней мере на наш взгляд) оценок, включенных в его доказательство.

Теорема 4. *Последующие оценки выполнены при выполнении условий теоремы 1.*

1. *Для всех анизотропных шаров $Q \subset \mathbb{S}^n$ содержащих точку $\mathbb{1}$,*

$$\nu(f, Q) \leq Cl(Q)^\alpha + 2\phi(\mathbb{1}). \tag{2.1}$$

2. *Если $1 \geq \phi(\mathbb{1}) > 0$, тогда для всех анизотропных шаров $Q \subset \mathbb{S}^n$, содержащих точку $\mathbb{1}$ и таких, что*

$$l(Q) \leq \left(\frac{\phi(\mathbb{1})}{C_0}\right)^{1/\alpha},$$

мы имеем

$$\nu(f, Q) \leq Cl(Q)^\alpha + C\frac{l(Q)^2}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{1}{\alpha}\left(2n+2-\frac{2n}{q}\right)-1}}, \tag{2.2}$$

где константа C зависит только от n, C_0 и B_p.

Доказательство. Поскольку f представляет собой внешнюю функцию, мы можем записать её в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi) - 1)\operatorname{Re}(\log f(\xi)) d\sigma(\xi)\right] \\ &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi) - 1)\log|f(\xi)| d\sigma(\xi)\right], \end{aligned} \tag{2.3}$$

где, напомним, через C обозначено ядро Коши для единичной сферы в n-мерном комплексном пространстве. Следовательно

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (\operatorname{Re}(2C(z,\xi) - 1) + i\operatorname{Im}(2C(z,\xi) - 1))\log|f(\xi)| d\sigma(\xi)\right] \\ &= \phi(z)\exp\left[i\int\limits_{\mathbb{S}^n} \operatorname{Im}(2C(z,\xi) - 1)\log\phi(\xi) d\sigma(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь оценим $\nu(f, Q)$ для некоторого шара такого, что $\mathbb{1} \in Q \subset \mathbb{S}^n$. Для начала выберем

$$a := \phi(\mathbb{1})e^{ic_0},$$

для некоторой положительной константы c_0. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\nu(f,Q) \leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\phi - \phi(\mathbb{1})|$$
$$+\frac{\phi(\mathbb{1})}{|Q|}\int\limits_Q \left|\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{S}^n} \mathrm{Im}\,(2C(z,\xi)-1)\log\phi(\xi)d\sigma(\xi)\right) - \exp(ic_0)\right| d\sigma(z)$$
$$\leq Cl(Q)^{\alpha} + 2\phi(\mathbb{1}),$$

и, таким образом, отсюда следует первое утверждение теоремы 4. Далее, мы положим

$$c_0 := \int\limits_{\mathbb{S}^n\setminus 2Q} \mathrm{Im}\,(2C(\mathbb{1},\xi)-1)\,(\log\phi(\xi) - \log\phi(\mathbb{1}))\,d\sigma(\xi).$$

Отсюда, благодаря тому, что интеграл функции $\log\phi(\mathbb{1})\cdot(2C(\mathbb{1},\xi)-1)$ по единичной сфере равен нулю, мы имеем

$$\nu(f,Q) \leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\phi - \phi(\mathbb{1})| + A, \tag{2.5}$$

где мы обозначили

$$A := \frac{\phi(\mathbb{1})}{|Q|}\Bigg[\int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{S}^n} \chi_{2Q}\cdot\mathrm{Im}\,(2C(z,\xi)-1)\cdot(\log\phi(\xi) - \log\phi(\mathbb{1}))\,d\sigma(\xi)d\sigma(z)$$
$$+\int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{S}^n\setminus 2Q} (\mathrm{Im}\,(2C(z,\xi)-1) - \mathrm{Im}\,(2C(\mathbb{1},\xi)-1))\big(\log\phi(\xi) - \log\phi(\mathbb{1})\big)d\sigma(\xi)d\sigma(z)\Bigg]$$
$$=: C_1 + D. \tag{2.6}$$

Благодаря ограниченности в L^2 сингулярного интеграла, представленного свёрткой с ядром Коши, см. [26], мы получаем привычную простую оценку для C_1 :

$$
\begin{aligned}
&C_1\\
&\leq \left(\frac{\phi(\mathbb{1})^2}{|Q|}\int\limits_{Q}\left(\int\limits_{\mathbb{S}^n}\chi_{2Q}\cdot \operatorname{Im}\left(2C(z,\xi)-1\right)\cdot\left(\log\phi(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})\right)d\sigma(\xi)\right)^2 d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\leq \phi(\mathbb{1})\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|\log\phi(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\qquad\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|\phi(\xi)-\phi(\mathbb{1})|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}\leq Cl(Q)^{\alpha}. \quad (2.7)
\end{aligned}
$$

Оценим теперь член D. Разложим единичную n-сферу следующим образом:

$$\mathbb{S}^n=\bigcup_{j=1}^{m}\Omega_j,\ \text{где } \Omega_j:=\{z\in\mathbb{S}^n : d(z,\mathbb{1})\in(2^j l(Q), 2^{j+1}l(Q))\}.$$

Здесь m является наименьшим натуральным числом таким, что $2^{m+1}Q\supset S$. Используем это разложение при оценке члена D:

$$D\leq\frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|}\int\limits_{Q}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Omega_j}|\log\phi(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|\cdot|\widetilde{C}(z,\xi)-\widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)|d\sigma(\xi)d\sigma(z), \quad (2.8)$$

где

$$\widetilde{C}(z,\xi):=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}\right)$$

представляет собой мнимую часть ядра Коши. Теперь разложим каждое из множеств Ω_j на два следующим образом:

$$E_j:=\{\xi\in\Omega_j : \phi(\xi)\geq\frac{\phi(\mathbb{1})}{2}\}\ \text{и}\ F_j:=\Omega_j\backslash E_j.$$

Для каждого j между 1 и m на множестве E_j справедлива следующая оценка:

$$|\log\phi(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|\leq\frac{C}{\phi(\mathbb{1})}\left(2^j l(Q)\right)^{\alpha}. \quad (2.9)$$

С другой стороны, если $\xi\in F_j$, то, благодаря тому что $\phi(\mathbb{1})\leq 1$, мы имеем неравенство

$$|\log\phi(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|\leq\log\frac{1}{\phi(\xi)}. \quad (2.10)$$

Поскольку $F_j = \emptyset$, как только $j \le k$, где $1 \le k \le m$ является наибольшим числом таким, что

$$2^k l(Q) \le \left(\frac{\phi(\mathbb{1})}{C_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

мы можем оценить слагаемое D следующим образом:

$$D \le \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} \int\limits_Q \left[\sum_{j=1}^m \frac{\left(2^j l(Q)\right)^\alpha}{\phi(\mathbb{1})} \int\limits_{E_j} |\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)| d\sigma(\xi) \right.$$
$$\left. + \sum_{j=k+1}^m \int\limits_{F_j} \log \frac{1}{\phi(\xi)} |\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)| d\sigma(\xi) \right] d\sigma(z) =: D_1 + D_2. \quad (2.11)$$

Оценим величины D_1 и D_2 по отдельности. Оценкам предпошлём лемму, взятую из книги [26]. В этой лемме устанавливается стандартная оценка ядра нашего сингулярного интегрального оператора, то есть функции $\widetilde{C}(z,\xi)$.

Лемма 1. *Для каждого $\delta > 0$ имеет место следующее неравенство*

$$|\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(u,v)| \le \frac{C(d(\xi,v)^\delta + d(z,u)^\delta)}{(d(\xi,z) + d(u,v))^{2n+\delta}}.$$

Теперь оценить член D_1 не представляет особого труда:

$$D_1 \le \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} |Q| \left[\frac{l(Q)^\alpha}{\phi(\mathbb{1})} \sum_{j=1}^m \frac{2^{j\alpha} l(Q) |\Omega_j|}{(2^j l(Q))^{2n+1}} \right] \le C l(Q)^\alpha. \quad (2.12)$$

Продолжим доказательство; оценим член D_2. Используем неравенство Гёльдера и лемму 1 для оценки величины D_2:

$$D_2 \le \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} |Q| \left[\sum_{j=k+1}^m ||\log \phi||_{L^p(\mathbb{S}^n)} ||\widetilde{C}(z,\cdot) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\cdot)||_{L^q(\Omega_j)} \right]$$
$$\le C\phi(\mathbb{1}) \sum_{j=k+1}^m \frac{l(Q)^2}{(2^j l(Q))^{2n+2-\frac{2n}{q}}} \le C \frac{l(Q)^2}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{1}{\alpha}\left(2n+2-\frac{2n}{q}\right)-1}}, \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$D \le C l(Q)^\alpha + C \frac{l(Q)^2}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{1}{\alpha}\left(2n+2-\frac{2n}{q}\right)-1}}. \quad (2.14)$$

Теперь неравенства (2.12) и (2.13) дают

$$\nu(f,Q) \le Cl(Q)^{\alpha} + C\frac{l(Q)^2}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{1}{\alpha}\left(2n+2-\frac{2n}{q}\right)-1}}$$

и теорема 4 доказана.

$\square$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Напомним её формулировку.

Теорема. *Предположим, что внешняя функция $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}$ такова, что для всех $t\in\mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t)-\phi(\mathbb{1})| \le C_0 d(t,\mathbb{1})^{\alpha},$$

для некоторого $\alpha\in(0,1)$, где $\phi := |f|, \mathbb{1} := (1,0,\dots,0), d(u,v) := |1-\langle u,v\rangle|^{1/2}$ анизотропная метрика на n-мерной единичной сфере $\mathbb{S}^n$ и, что

$$B_p := \int\limits_{\mathbb{S}^n} |\log\phi(z)|^p d\sigma(z) < \infty, \text{ для некоторого } p>1.$$

Тогда средняя осцилляция $\nu(f,Q)$, измеряющая гладкость, удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q)\left(:= \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |f(z)-a|\,d\sigma(z)\right) \le Cl(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $\phi(\mathbb{1})\le 1$. Действительно, предположим, что $\phi(\mathbb{1})>1$. Поскольку функция ϕ липшицева в точке $\mathbb{1}$, $\phi(\mathbb{1}) \le 2\max(\phi(\xi), C_0 d(t,\mathbb{1})^{\alpha})$ для всех $\xi\in\mathbb{S}^n$. Как следствие, мы получаем, что $0\le \log\phi(\mathbb{1}) \le \log 2 + |\log\phi(\xi)| + |\log C_0| + \alpha|\log d(\xi,\mathbb{1})|$. Далее, $(\log\phi(\mathbb{1}))^p \lesssim |\log C_0|^p + B_p + C$, где постоянная C зависит лишь от α, p и n. Отсюда следует, что $\phi(\mathbb{1}) \lesssim \exp(|\log C_0|^p + B_p + C)^{1/p}$. Поэтому можно изначально вместо f рассмотреть функцию $\widetilde{f}(z) = f(z)/\phi(\mathbb{1})$. Это вполне допустимо, так как функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет условию $\log|\widetilde{f}|\in L^p(\mathbb{S}^n)$, и при этом величина $\|\log|\widetilde{f}|\|_{L^p(\mathbb{S}^n)}$ контролируется постоянными B_p и C_0. Далее мы будем писать f вместо $\widetilde{f}$.

Пусть Q — анизотропный шар такой, что

$$l(Q)^{\gamma} \ge C\phi(\mathbb{1})$$

для некоторого $0 < \gamma \leq \alpha$. Тогда из первого утверждения теоремы 4 мы можем сделать заключение, что

$$\nu(f, Q) \leq C(l(Q)^{\alpha} + l(Q)^{\gamma}).$$

Далее, если

$$l(Q)^{\gamma} \leq C\phi(\mathbb{1})$$

для того же γ, то второе утверждение теоремы 4 даёт нам следующую оценку:

$$\nu(f, Q) \leq C(l(Q)^{\alpha} + l(Q)^{2-\gamma(\frac{1}{\alpha}\left(2n+2-\frac{2n}{q}\right)-1)}).$$

Выберем теперь γ так, чтобы вторые члены в обеих оценках были одинаковы по порядку:

$$\gamma = 2 - \frac{\gamma}{\alpha}\left(2n + 2 - \frac{2n}{q}\right) + \gamma.$$

Решая уравнение, получим

$$\gamma = \frac{\alpha}{n + 1 - \frac{n}{q}} = \frac{p\alpha}{n + p}.$$

$\square$

2.3 Доказательство теоремы 3

Докажем теперь точность теоремы 1, то есть теорему 3. Напомним её формулировку.

Теорема. *Пусть* $p \in (n, +\infty)$. *Тогда для каждого* $\delta > 0$ *существует такая внешняя функция* $f_0 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$, *что:* $\log|f_0| \in L^p(\mathbb{S}^n), |f_0| \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(\mathbb{1})$, *для всех неизотропных шаров* Q, *содержащих точку* $\mathbb{1}$, *выполняется*

$$\nu(f_0, Q) \lesssim l(Q)^{\frac{\alpha p}{p+n}},$$

где $l(Q)$ *— радиус* Q, *а также при этом*

$$f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p}{p+n}+\delta}(\mathbb{1})$$

“в среднем”.

Доказательство. Доказательству теоремы предпошлём следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$, *а функция* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *такова, что*

$$\log \varphi \in L^{\frac{p+\varepsilon}{n}}(\mathbb{T}).$$

Определим функцию $f_0 : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{C}$ *следующим образом:* $f_0(z_1, \ldots, z_n) = g(z_1)$, *где* $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ *задана так:*

$$g(z) = \exp\left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \cdot \log \varphi\left(e^{i\theta}\right) d\theta\right].$$

Тогда функция f_0 *удовлетворяет условию* $\log|f_0| \in L^p(\mathbb{S}^n)$.

Доказательство. Рассмотрим точку $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \overline{\mathbb{B}^n}$, где $\zeta_1 = r \cdot e^{i\beta}$. Проведем преобразование формулы для $\log|f|$, воспользовавшись определениями функций f_0 и g:

$$\begin{aligned}
\log|f_0(\zeta_1, ..., \zeta_n)| &= \log|g(\zeta_1)| \\
&= \log\left(\exp\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta} + \zeta_1}{e^{i\theta} - \zeta_1} \cdot \log\varphi\left(e^{i\theta}\right) d\theta\right]\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\beta - \theta)} \cdot \log\varphi\left(e^{i\theta}\right) d\theta \\
&= \log\varphi * P_r(\beta). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Тогда, согласно формуле 1.4.5 для интеграла функции, зависящей от меньшего числа переменных, из книги У.Рудина [26], получаем:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^n} |\log|f_0(\zeta)||^p d\sigma(\zeta) \\
&\qquad = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\right)^{n-2} \cdot r \cdot |\log\varphi * P_r(\beta)|^p d\beta dr \\
&\qquad = \int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{n-2} \cdot r \cdot ||\log\varphi * P_r||^p_{L^p(\mathbb{T})} dr \leq \ldots \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Используя неравенства Юнга, получаем:

$$\ldots \leq \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{n-2} \cdot ||\log\varphi||^p_{L^{\frac{p}{n}+\epsilon}(\mathbb{T})} \cdot ||P_r||^p_{L^q(\mathbb{T})} dr \leq \ldots,$$

где $q-$ решение уравнения

$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{\frac{p}{n}+\varepsilon}.$$

Оценим теперь норму ядра Пуассона $||P_r||_{L^q(\mathbb{T})}$ для $r \in (0,1)$ и $q \geq 1$. Сперва рассмотрим случай $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. В этом случае всё просто:

$$||P_r||^q_{L^q(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r^2\right)^q d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^q}$$

$$\lesssim \int_0^{2\pi} \frac{(1-r)^q\, d\theta}{(1-r)^{2q}} \lesssim \frac{1}{(1-r)^q} = \frac{1}{(1-r)^{q-1}} \cdot \frac{1}{1-r} \lesssim \frac{2}{(1-r)^{q-1}}.$$

Отныне предполагаем, что $r \in [\frac{1}{2}, 1)$. Будем пользоваться тем, что при $\theta \in [0, 2\pi]$, $1-\cos\theta \geq C_0 \cdot \theta^2$ для некоторой постоянной $C_0 > 0$:

$$||P_r||^q_{L^q(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r^2\right)^q d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^q}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r^2\right)^q d\theta}{\left((1-r)^2+2r\left(1-\cos\theta\right)\right)^q} \lesssim \int_0^{2\pi} \frac{(1-r)^q\, d\theta}{\left((1-r)^2+2rC_0\theta^2\right)^q}$$

$$= \int_A \frac{(1-r)^q\, d\theta}{\left((1-r)^2+2rC_0\theta^2\right)^q} + \int_B \frac{(1-r)^q\, d\theta}{\left((1-r)^2+2rC_0\theta^2\right)^q},$$

где через A и B мы обозначили множества

$$A = \{\theta \in [0, 2\pi) : (1-r)^2 \geq 2C_0 r\theta^2\}$$

и

$$B = \{\theta \in [0, 2\pi) : (1-r)^2 < 2C_0 r\theta^2\}$$

соответственно. Заметим, что $A \cap B = \emptyset$ и что $A \cup B = [0, 2\pi)$. Кроме того, тривиальным образом получаем, что $|A| \lesssim (1-r)$. Отсюда следует, что

$$||P_r||^q_{L^q(\mathbb{T})} \lesssim \int\limits_A \frac{(1-r)^q\, d\theta}{(1-r)^{2q}} + \int\limits_B \frac{(1-r)^q\, d\theta}{\theta^{2q}} \lesssim \frac{1}{(1-r)^{q-1}}.$$

Воспользуемся только что полученной оценкой и продолжим цепочку неравенств:

$$\ldots \lesssim \int\limits_0^1 (1-r)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{(1-r)^{q-1}}\right)^{\frac{p}{q}} dr.$$

Докажем, что число $p_1 := (n-2) - \frac{p}{q} \cdot (q-1)$ строго больше -1. Из определения числа q заключаем, что

$$p_1 = (n-2) - p \cdot \frac{(q-1)}{q}$$

$$= (n-2) - p \cdot \left(\frac{1}{p/n + \varepsilon} - \frac{1}{p}\right) = (n-2) - \frac{np - p - n\varepsilon}{p + n\varepsilon}$$

$$= \frac{n^2\epsilon - p - n\varepsilon}{p + n\varepsilon} = \frac{n^2\varepsilon}{p + n\varepsilon} - 1 > -1,$$

откуда и следует лемма. □

Обозначим

$$p_2 = \frac{p}{n} + \varepsilon.$$

Поскольку соответствующий одномерный результат точен (см. [4]), есть одномерная функция φ такая, что $\log \varphi \in L^{p_2}(\mathbb{T})$, $|\varphi| \in \mathrm{Lip}_\alpha(1)$, а также

$$\varphi \in \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p_2}{p_2+1}}(1)$$

"в среднем", и при этом соответствующая внешняя функция $\mathcal{O}_\varphi$ не лежит в $\mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p_2}{p_2+1}+\sigma}(1)$ для всякого $\sigma > 0$. Построим по методу, предложенному в лемме, функции f_0 и g (отметим, что согласно нашей конструкции, $g = \mathcal{O}_\varphi$). Тогда очевидно, что $|f_0| \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{1})$, и по лемме $\log|f_0| \in L^p(\mathbb{S}^n)$. Следовательно, по теореме 1,

$$f_0 \in \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p}{p+n}}(\mathbb{1})$$

"в среднем". Однако из выбора φ получаем, что

$$f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p_2}{p_2+1}+\sigma}(\mathbb{1})$$

“в среднем” для всякого $\sigma > 0$. С другой стороны,

$$\frac{p_2\alpha}{p_2+1} + \sigma = \frac{\left(\frac{p}{n}+\varepsilon\right)\cdot\alpha}{\left(\frac{p}{n}+\varepsilon\right)+1} + \sigma = \frac{p\alpha + \varepsilon\cdot\alpha\cdot n}{p+\varepsilon\cdot n + n} + \sigma = \frac{\alpha p}{p+n} + \tilde{\varepsilon},$$

где $\tilde{\varepsilon} \to 0$ при ε и σ, стремящихся к нулю. Выбирая ε и σ достаточно малыми, убеждаемся, что существует такая функция f_0, что

$$f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{p\alpha}{p+n}+\delta}(\mathbb{1})$$

“в среднем”, (где δ — такое как в условии теоремы) что и требовалось доказать. $\square$

2.4 Доказательство теоремы 2

Прежде всего, поскольку функция f непрерывна вплоть до границы, мы можем сделать следующее заключение:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{S}^n} \int\limits_{\mathbb{T}} |\log|f(\xi\lambda)|||d\lambda| \le B_0 < \infty. \tag{2.17}$$

Мы будем придерживаться подхода, изложенного в предыдущей части: сначала мы докажем техническую теорему, с помощью которой мы сможем получить требуемую оценку средней осцилляции $\nu(f,Q)$.

Теорема 5. *Следующие оценки справедливы при выполнении условий теоремы 2.*

1. *Для всех шаров $Q \subset \mathbb{S}^n$ в анизотропной метрике, содержащих точку $\mathbb{1}$, имеем*
$$\nu(f,Q) \le Cl(Q)^\alpha + \phi(\mathbb{1}), \tag{2.18}$$
где $l(Q)$ — радиус шара Q.

2. *Если $1 \ge \phi(\mathbb{1}) > 0$, тогда для всех анизотропных шаров $Q \subset \mathbb{S}^n$, содержащих точку $\mathbb{1}$ и таких, что*
$$l(Q) \le \left(\frac{\phi(\mathbb{1})}{C_0}\right)^{1/\alpha},$$
мы имеем
$$\nu(f,Q) \le Cl(Q)^\alpha + C\frac{l(Q)}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{2}{\alpha}-1}}, \tag{2.19}$$
где константа C зависит только от n, C_0 и B_0.

Доказательство. Без потери общности мы можем предположить, что $f(0)$ — действительное число. В общем случае это следует из того, что функция

$$g(z) = f(z) \cdot \frac{\overline{f(0)}}{|f(0)|}$$

удовлетворяет условию $g(0) \in \mathbb{R}$. Поскольку функция f аналитическая без нулей, мы можем написать для функций

$$f_r(\xi) := f(r\xi), r < 1,$$

следующее представление:

$$\begin{aligned} f_r(z) &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi) - 1)\operatorname{Re}(\log f_r(\xi)) d\sigma(\xi)\right] \\ &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi) - 1)\log \phi_r(\xi) d\sigma(\xi)\right], \quad (2.20) \end{aligned}$$

где C — ядро Коши для единичной сферы в n-мерном комплексном пространстве. И, следовательно,

$$\begin{aligned} f_r(z) &= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (\operatorname{Re}(2C(z,\xi) - 1) + i\operatorname{Im}(2C(z,\xi) - 1))\log \phi_r(\xi) d\sigma(\xi)\right] \\ &= \phi_r(z) \exp\left[i \int\limits_{\mathbb{S}^n} \operatorname{Im}(2C(z,\xi) - 1)\log \phi_r(\xi) d\sigma(\xi)\right] =: \phi_r(z) e^{iG(z)}, \quad (2.21) \end{aligned}$$

где мы для краткости обозначили

$$\phi_r(\xi) := \phi(r\xi) = |f(r\xi)| = |f_r(\xi)|.$$

Далее, оценим $\nu(f, Q)$ для некоторого анизотропного шара Q такого, что $\mathbb{1} \in Q \subset \mathbb{S}^n$. Сперва выберем

$$a := \phi(\mathbb{1}) e^{ic_0}$$

для некоторой положительной константы c_0. Отметим, что поскольку функция f непрерывна в любой точке ξ граничной сферы, мы можем сделать вывод о том, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $1 - \delta < r < 1$, то

$$|\phi_r(\xi) - \phi(\xi)| \le \varepsilon,$$

и
$$|f_r(\xi) - f(\xi)| \le \varepsilon.$$
Далее будем рассматривать только такие значения r. Отсюда мы получаем, что

$$\nu(f,Q) \le \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(z) - \phi(\mathbb{1})e^{ic_0}| \le \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(z) - f_r(z)| \\ + \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\phi_r(z)e^{iG(z)} - \phi(\mathbb{1})e^{ic_0}| \le \varepsilon + \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |(\phi_r(z) - \phi(\mathbb{1}))e^{iG(z)}| \\ + \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \phi(\mathbb{1})|e^{iG(z)} - e^{ic_0}| \le \varepsilon + Cl(Q)^\alpha + 2\phi(\mathbb{1}),$$

и, таким образом, первое утверждение теоремы 5 доказано.

Далее, положим:

$$c_0 := \int\limits_{\mathbb{S}^n\setminus 2Q} \mathrm{Im}\,(2C(\mathbb{1},\xi) - 1)\cdot(\log\phi_r(\xi) - \log\phi(\mathbb{1}))\,d\sigma(\xi).$$

Следовательно, благодаря тому, что интеграл функции $\log\phi(\mathbb{1})\cdot(2C(\mathbb{1},\xi) - 1)$ по единичной сфере равен нулю, мы получаем

$$\nu(f,Q) \le \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\phi - \phi(\mathbb{1})| + A + \varepsilon, \tag{2.22}$$

где мы ввели обозначение

$$A := \frac{\phi(\mathbb{1})}{|Q|}\Bigg[\int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{S}^n} \chi_{2Q}\cdot \mathrm{Im}\,(2C(z,\xi) - 1)\cdot(\log\phi_r(\xi) - \log\phi(\mathbb{1}))\,d\sigma(\xi)d\sigma(z) + \\ \int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{S}^n\setminus 2Q} (\mathrm{Im}\,(2C(z,\xi)-1) - \mathrm{Im}\,(2C(\mathbb{1},\xi)-1))\big(\log\phi_r(\xi) - \log\phi(\mathbb{1})\big)d\sigma(\xi)d\sigma(z)\Bigg] \\ =: C_1 + D. \tag{2.23}$$

Благодаря ограниченности в L^2 сингулярного интеграла, представленного свёрткой с ядром Коши, мы получаем простую оценку для C_1 :

$$
\begin{aligned}
&C_1 \\
&\leq \left(\frac{\phi(\mathbb{1})^2}{|Q|}\int\limits_Q\left(\int\limits_{\mathbb{S}^n}\chi_{2Q}\cdot \mathrm{Im}\,(2C(z,\xi)-1)\cdot(\log\phi_r(\xi)-\log\phi(\mathbb{1}))\,d\sigma(\xi)\right)^2 d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \phi(\mathbb{1})\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q|\log\phi_r(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q|\phi_r(\xi)-\phi(\mathbb{1})|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Cl(Q)^\alpha+\varepsilon, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

в которой последнее неравенство следует из того, что функция ϕ является α-липшицевой в точке $\mathbb{1}$, а также из ограничений, наложенных на r.

Теперь оценим член D. Для этого введём следующее разложение единичной n-сферы:

$$\mathbb{S}^n=\bigcup_{j=1}^m\Omega_j, \text{ где } \Omega_j:=\{z\in\mathbb{S}^n : d(z,\mathbb{1})\in(2^j l(Q),2^{j+1}l(Q))\}.$$

Здесь m — наименьшее натуральное число такое, что $2^{m+1}Q\supset S$. Далее, используем это разложение для оценки члена D:

$$D\leq\frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|}\int\limits_Q\sum_{j=1}^m\int\limits_{\Omega_j}|\log\phi_r(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|\cdot|\widetilde{C}(z,\xi)-\widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)|d\sigma(\xi)d\sigma(z), \quad (2.25)$$

где

$$\widetilde{C}(z,\xi):=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}\right)$$

представляет собой мнимую часть ядра Коши. Разложим каждое из множеств Ω_j на два следующим образом:

$$E_j:=\{\xi\in\Omega_j:\phi(\xi)\geq\frac{\phi(\mathbb{1})}{2}\} \text{ и } F_j:=\Omega_j\backslash E_j.$$

Для каждого j между 1 и m на множестве E_j справедлива следующая оценка:

$$|\log\phi_r(\xi)-\log\phi(\mathbb{1})|\leq\varepsilon+\frac{2}{\phi(\mathbb{1})}|\phi(\xi)-\phi(\mathbb{1})|\leq\varepsilon+\frac{C}{\phi(\mathbb{1})}\left(2^j l(Q)\right)^\alpha. \quad (2.26)$$

С другой стороны, если $\xi \in F_j$, то имеем следующее неравенство:

$$|\log \phi_r(\xi) - \log \phi(\mathbb{1})| \leq \varepsilon + C \log \frac{1}{\phi(\xi)}. \tag{2.27}$$

Поскольку $F_j = \emptyset$, как только $j \leq k$, где $1 \leq k \leq m$ является наибольшим числом таким, что

$$2^k l(Q) \leq \left(\frac{\phi(\mathbb{1})}{C_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

мы получаем

$$D \leq \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} \int\limits_Q \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(2^j l(Q)\right)^\alpha}{\phi(\mathbb{1})} \int\limits_{E_j} |\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)| d\sigma(\xi) + \varepsilon \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k+1}^{m} \int\limits_{F_j} \log \frac{1}{\phi(\xi)} |\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)| d\sigma(\xi) \right] d\sigma(z) =: D_1 + D_2 + C\varepsilon. \tag{2.28}$$

Оценим D_1 и D_2 по отдельности. При этом оценка члена D_1 не составляет труда:

$$D_1 \leq \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} |Q| \left[\frac{l(Q)^\alpha}{\phi(\mathbb{1})} \sum_{j=1}^{m} \frac{2^{j\alpha} l(Q) |\Omega_j|}{(2^j l(Q))^{2n+1}} \right] \leq C l(Q)^\alpha. \tag{2.29}$$

Теперь перейдем к члену D_2. Во-первых, из определения функций f_r и из неравенства (2.17) следует, что для всех $\xi \in \mathbb{S}^n$, $r < 1$ и $\rho \in [-\pi, \pi)$ имеем

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} |\log \phi(\xi_1 e^{i\theta}, \ldots, \xi_n e^{i\theta})| d\theta \leq B_0.$$

Выберем $\rho := 2^j l(Q)$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$ и затем проинтегрируем последнюю строку по переменной ξ по множеству Q_j:

$$CB_0 \rho^{2n} \geq \int\limits_{Q_j} \int\limits_{-\rho/2}^{\rho/2} |\log \phi(\xi_1 e^{i\theta}, \ldots, \xi_n e^{i\theta})| d\theta d\sigma(\xi)$$

$$\geq \int\limits_{-\rho/2}^{\rho/2} \int\limits_{Q_j} |\log \phi(\xi_1 e^{i\theta}, \ldots, \xi_n e^{i\theta})| d\sigma(\xi) d\theta. \tag{2.30}$$

Для каждого $\theta \in (-\rho/2, \rho/2)$ и каждого $\xi \in Q_j$ определим вектор z как $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_j := \xi_j e^{i\theta}$. Далее, определим функцию F_θ при помощи следующей формулы:

$$F_\theta(\xi) = z.$$

Наконец, проведём следующую замену переменных $z := F_\theta(\xi)$. Теперь из неравенства (2.30) следует, что

$$CB_0\rho^{2n} \geq \int\limits_{-\rho/2}^{\rho/2} \int\limits_{F_\theta(Q_j)} |\log\phi(z)| \cdot |e^{i\theta}|^n d\sigma(z) d\theta = \int\limits_{-\rho/2}^{\rho/2} \int\limits_{F_\theta(Q_j)} |\log\phi(z)| d\sigma(z) d\theta. \tag{2.31}$$

Мы утверждаем, что

$$\frac{1}{2} Q_j \subseteq F_\theta(Q_j).$$

Чтобы доказать это, рассмотрим точку $\xi \in \frac{1}{2}Q_j$. Для того, чтобы показать, что $\xi \in F_\theta(Q_j)$, достаточно доказать, что $\xi e^{-i\theta} \in Q_j$, так как в последнем случае можно записать $\xi = (\xi e^{-i\theta})e^{i\theta}$. Проверим, что выполняется неравенство $|1 - \xi_1 e^{-i\theta}| \leq \rho$, с помощью неравенства треугольника:

$$|1 - \xi_1 e^{-i\theta}| \leq |1 - \xi_1| + |\xi||1 - e^{-i\theta}| \leq \frac{\rho}{2} + |\theta| \leq \rho,$$

и из этого следует необходимое утверждение.

Выражение (2.31) теперь даёт

$$\int\limits_{Q_j} |\log\phi(z)| d\sigma(z) \leq CB_0\rho^{2n-1} \leq CB_0(2^j l(Q))^{2n-1}. \tag{2.32}$$

Благодаря неравенству (2.32), мы можем получить искомую оценку члена D_2:

$$\begin{aligned} D_2 &\leq \frac{C\phi(\mathbb{1})}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{j=k+1}^{m} \int\limits_{Q_j} \log\frac{1}{\phi(\xi)} |\widetilde{C}(z,\xi) - \widetilde{C}(\mathbb{1},\xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(z) \\ &\leq \frac{CB_0\phi(\mathbb{1})}{|Q|} |Q| \sum_{j=k+1}^{m} (2^j l(Q))^{2n-1} \frac{l(Q)}{(2^j l(Q))^{2n+1}} \leq \frac{l(Q)}{\phi(\mathbb{1})^{\frac{2}{\alpha}-1}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Теперь теорема 5 последует из неравенств (2.32), (2.29) и (2.28) после устремления ε к нулю.

$\square$

Благодаря результату, полученному только что, теорема 2 может быть доказана таким же образом, как и теорема 1.

Доказательство. По причинам, описанным в самом начале доказательства теоремы 1, мы можем считать, что $\phi(\mathbb{1}) \leq 1$.

Пусть Q — анизотропный шар такой, что

$$l(Q)^\gamma \geq C\phi(\mathbb{1})$$

для некоторого $0 < \gamma \leq \alpha$. Тогда из первого утверждения теоремы,

$$\nu(f, Q) \leq C(l(Q)^\alpha + l(Q)^\gamma).$$

Далее, если

$$l(Q)^\gamma \leq C\phi(\mathbb{1})$$

для того же γ, то

$$\nu(f, Q) \leq C(l(Q)^\alpha + l(Q)^{1-\gamma(\frac{2}{\alpha}-1)}).$$

Выберем теперь γ так, чтобы вторые члены в обеих оценках были одинаковы по порядку:

$$\gamma = 1 - \frac{2\gamma}{\alpha} + \gamma.$$

Решая уравнение, получим $\gamma = \alpha/2$.

$\square$

Глава 3

K-замкнутость "вещественных" классов Харди

3.1 Введение

Определение 4. Подпара (F_0, F_1) пары (E_0, E_1) квази-банаховых пространств называется ***K-замкнутой*** если любое разложение

$$f = e_0 + e_1, e_i \in E_i \text{ вектора } f \in F_0 + F_1$$

порождает разложение

$$f = f_0 + f_1 \ c\ f_i \in F_i,$$

где

$$||f_i||_{F_i} \leq C||e_i||_{E_i}, i = 1, 2.$$

Зададим "вещественное" пространство Харди для значений показателя

$$\frac{n-1}{n} < p < \infty.$$

Определение 5. Рассмотрим системы сопряжённых гармонических функций $(h_0, h_1, \dots h_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t>0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{n} |h_j(x,t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty.$$

Такое векторное поле всегда порождается единственным распределением ϕ на $\mathbb{R}^n$, и при этом h_0 представляет собой интеграл Пуассона от ϕ а $h_j, 1 \le j \le n$ суть интегралы Пуассона от функций $\mathcal{R}_j\phi$, где $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ суть преобразования Рисса. Также функции $h_0, \dots, h_n$ имеют граничные значения $u_0, \dots, u_n$ почти всюду при t, стремящемся к нулю. Отображение

$$(h_0, \dots, h_n) \to (u_0, \dots, u_n)$$

является "изометрическим" вложением пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) := (L^p(\mathbb{R}^n) \oplus \dots \oplus L^p(\mathbb{R}^n))$, если выражение в определении 5 принять за норму в H^p. Образ этого вложения мы будем обозначать символом $\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$ и называть ***"вещественным" классом Харди***.

Замечание 2. *Заметим, что если $p \ge 1$, то ϕ и u_0 совпадают как распределения (более того, распределение $\mathcal{R}_j\phi$ равно $u_j, 1 \le j \le n$), однако для $p < 1$ это не будет выполняться в общем случае. Кроме того, в этом случае u_j не обязательно будут распределениями; подробнее это описано в книге [15].*

Основным результатом этой главы является доказательство K-замкнутости в случае пары $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$ для показателей

$$\frac{n-1}{n} < r < p \le \infty.$$

Замечание 3. *Заметим, что теорема 6 является важным результатом в теории интерполяции пространств Харди. Её доказательство требует применения различных методов гармонического анализа и теории интерполяции. Мы также уверены, что схема доказательства теоремы 6 может быть в дальнейшем использована при получении результатов в теории интерполяции классов Харди на более общих пространствах.*

3.2 Доказательство теоремы 6

Теорема 6. *Пара "вещественных" пространств Харди $(\mathbb{H}^{p_1}(\mathbb{R}^n), \mathbb{H}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ является K-замкнутой в паре пространств Лебега $(\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ если*

$$\frac{n-1}{n} < p_1 < p_2 \le \infty.$$

Доказательство. Начнём доказательство со случая показателя $p_2 = \infty$. Мы утверждаем, что этот случай последует автоматически, как только мы разберемся со случаем конечных показателей и как только пространство $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{R}^n)$

будет задано надлежащим образом — а именно, с помощью двойственности, как описано в работе [23], где пространства Харди включаются в некий более общий контекст. Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что K-замкнутость для пары показателей, один из которых ограничен и больше 1, а другой бесконечен, следует по двойственности из метода Бургейна. Случай, когда один из показателей бесконечен, а другой больше, чем $(n-1)/n$, следует из предыдущего случая методом склейки шкал (см. [23], [10] и следующий абзац).

Далее, заметим, что достаточно доказать теорему для

$$\frac{n-1}{n} < p_1 < 1, p_2 = 2.$$

Действительно, если это выполнено, то случай показателей $p_2 < 2$ последует из формулы Холмстедта, это доказано в работе [10]. Для рассмотрения показателя $p_2 > 2$, следует зафиксировать q с $1 < q < 2$ и отметить, что пара $(\mathbb{H}^q(\mathbb{R}^n), \mathbb{H}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ является K-замкнутой в $(\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ (просто по причине ограниченности сингулярных интегральных операторов, см. объяснения в параграфе 4.2 работы [23]). Поскольку интервалы $(p_1, 2)$ и (p_1, p_2) перекрываются, то теорема 1.2. из работы [23] о "склейке шкал" может быть применена для получения требуемого результата.

В дальнейшем мы будем полагать, что $(n-1)/n < p_1 < 1, p_2 = 2$. Тем не менее, мы сохраним обозначение p_2 потому, что некоторые наши нетривиальные вычисления верны для произвольного показателя $p_2 > 1$. Учитывая тот факт, что $L^2(\mathbb{R}^n)$ является плотным линейным подпространством $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, мы можем предположить, что f лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. статью [21]).

Для удобства переформулируем теперь утверждение, к которому сводится теорема, более подробно. Пусть $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \mathcal{R}_i f = \alpha_i + \beta_i$, где $\mathcal{R}_i$ суть преобразования Рисса и пусть

$$||(f, \alpha_1, \dots, \alpha_n)||_{L^{p_1} \oplus \dots \oplus L^{p_1}} = \mu,$$

$$||(0, \beta_1, \dots, \beta_n)||_{L^{p_2} \oplus \dots \oplus L^{p_2}} = \nu.$$

Нам необходимо показать, что существуют функции $w \in H^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ и $v \in H^{p_2}(\mathbb{R}^n)$, такие что $f = w + v$ и, более того, $||w||_{H^{p_1}} \le C\mu, ||v||_{H^{p_2}} \le C\nu$.

Рассмотрим множество

$$A := \{x : \sup_{(y,t) \in \Gamma_x} |f * P_t(y, t)| > \lambda\},$$

где Γ_x — конус раствора Cn (C - константа) с вершиной в точке x, то есть

$\Gamma(x) := \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : ||y-x|| \leq Ct\}$, а

$$\lambda = \left(\frac{\nu^{p_2}}{\mu^{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-p_1}}.$$

Лемма 3. *Выполняется следующее неравенство:*

$$|A|^{\frac{p_1}{p_2}} \leq C\left(\frac{\nu^{p_1}}{\lambda^{p_1}} + \left(\frac{\mu^{p_1}}{\lambda^{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right).$$

Доказательство. Здесь мы используем субгармоническое свойство градиента так называемой системы сопряжённых гармонических функций (см. книгу [15]) а также тот факт, что $\mathcal{R}_i f = \alpha_i + \beta_i$. Введём обозначение

$$\delta := \frac{n-1}{n}.$$

Запишем

$$F := \left(U_f, U_{\mathcal{R}_1 f}, \ldots, U_{\mathcal{R}_n f}\right),$$

где

$$U_g(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

представляет собой интеграл Пуассона от функции g. Используем тот факт, что модуль $|F|^\delta$ субгармоничен, а также принцип максимума модуля для субгармонических функций (см. книгу [19]) для того, чтобы получить

$$|F|^\delta(x,t) \leq \inf_{t_0>0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F|^\delta(x-y,t_0)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i=1}^n (\mathcal{R}_i f(x-y))^2 + f(x-y)^2\right)^{\frac{\delta}{2}}\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

После элементарных вычислений получаем:

$$|f * P_t(y,t)|^\delta \leq C\left(|\tilde{\alpha}|^\delta * P_t(y,t) + |\tilde{\beta}|^\delta * P_t(y,t)\right),$$

где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ некоторые функции такие, что $||\tilde{\alpha}||_{L^{p_1}} \leq C\mu, ||\tilde{\beta}||_{L^{p_2}} \leq C\nu$. Взяв супремум по конусу Γ_x, получим:

$$\sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^\delta \leq CM|\tilde{\alpha}|^\delta + M|\tilde{\beta}|^\delta,$$

где M является максимальной функцией Харди–Литтлвуда. Возведя последнюю строку в степень p_1/δ, мы получим следующее неравенство:

$$\sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^{p_1} \leq C(M|\tilde{\alpha}|^{\delta})^{\frac{p_1}{\delta}} + C(M|\tilde{\beta}|^{\delta})^{\frac{p_1}{\delta}}. \tag{3.1}$$

Обозначим:

$$A_N := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq N\}.$$

Нам это необходимо, потому что априори число $|A|$ может оказаться равным ∞, в то время как мера множества A_N конечна. Теперь проинтегрируем (3.1) по множеству A_N, воспользуясь неравенством Гёльдера а также тем фактом, что оператор $f \mapsto Mf$ ограничен как оператор действующий из L^p в L^p для $p > 1$:

$$\int_{A_N} \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^{p_1}\,dx \leq C\int_{A_N} (M|\tilde{\alpha}|^{\delta})^{\frac{p_1}{\delta}} + C\int_{A_N} (M|\tilde{\beta}|^{\delta})^{\frac{p_1}{\delta}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\alpha}|^{p_1} + C|A_N|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \left(\int_{A_N} \left(M|\tilde{\beta}|^{\delta}\right)^{\frac{p_2}{\delta}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \leq C\mu^{p_1} + C|A_N|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\nu^{p_1}.$$

Полученная оценка может быть переписана в следующем виде

$$C\mu^{p_1} + C|A_N|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\nu^{p_1} \geq \int_{A_N} \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^{p_1}\,dx \geq \lambda^{p_1}|A_N|. \tag{3.2}$$

Последнее неравенство в (3.2) справедливо, так как $A_N \subseteq A$. Мы хотим показать, что выполняется неравенство

$$|A_N|^{\frac{p_1}{p_2}} \leq C\left(\frac{\nu^{p_1}}{\lambda^{p_1}} + \left(\frac{\mu^{p_1}}{\lambda^{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right),$$

с константой C, не зависящей от N. Тогда такое же неравенство будет выполняться и для множества $|A|$.

Далее нам потребуется следующая элементарная лемма.

Лемма 4. *Предположим, что $t > 0$, $n > 1$ и $0 \leq t^n a + tb - c$, где $a, b, c > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{t} \leq 2\left(\frac{b}{c} + \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что можно считать, что выполняется либо

$$t^n\frac{a}{c} \geq \frac{1}{2},$$

либо

$$t\frac{b}{c} \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что либо

$$\frac{1}{t} \leq 2\frac{b}{c},$$

либо

$$\frac{1}{t} \leq \left(2\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

В обоих случаях

$$\frac{1}{t} \leq 2\left(\frac{b}{c} + \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\right).$$

□

Далее, применяя лемму 4 со значениями $c = \lambda^{p_1}, a = \mu^{p_1}, b = \nu^{p_1}$ и

$$t = \frac{1}{|A|^{\frac{p_1}{p_2}}},$$

получим следующую оценку на меру множества A_N:

$$|A_N|^{\frac{p_1}{p_2}} \leq C\left(\frac{\nu^{p_1}}{\lambda^{p_1}} + \left(\frac{\mu^{p_1}}{\lambda^{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right).$$

Для завершения доказательства леммы 3 теперь достаточно воспользоваться равенством

$$\lambda = \left(\frac{\nu^{p_2}}{\mu^{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-p_1}}$$

и выполнить простые вычисления. □

Наконец, после того как мы оценили величину $|A|$, можно выполнить необходимое разложение функции f. Следует отметить, что конструкция, представленная ниже, напоминает конструкцию атомного разложения в пространствах H^p при $p < 1$, как оно представлено в книге [15].

Сначала рассмотрим следующую формулу:

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy,$$

где

$$u(y,t) = f * P_t(y,t), \psi_t = \frac{1}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right),$$

и где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ является радиальной функцией с моментами, исчезающими до порядка $[n(1/p-1)]$, и такой, что $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq \{||x|| \leq 1\}$. Под этим мы имеем ввиду, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)x^\tau dx = 0$$

для каждого мультииндекса τ, такого что $|\tau| \leq [n(1/p-1)]$. На функцию ψ накладывается еще следующее условие, которое, собственно, и гарантирует выписанное выше интегральное представление: если $\phi_0(s) := \hat{\psi}(\xi)$ (где ξ — любой вектор, такой что $||\xi|| = s$), то

$$\int\limits_0^\infty e^{-2\pi s}\phi_0(s)ds = -\frac{1}{2\pi}.$$

Разобьём множество A с помощью теоремы Уитни:

$$A = \bigcup_{i\geq 1} A_i.$$

В этом разбиении A_i суть кубы в $\mathbb{R}^n$, чьи внутренности попарно не пересекаются и такие, что расстояние от A_i до границы A сравнимо с диаметром A_i (то есть, имеется следующая двусторонняя оценка: $1/C \operatorname{diam}(A_i) \leq \operatorname{dist}(\partial A, A_i) \leq C \operatorname{diam}(A_i)$, где C — константа, зависящая только от n), см. [15].

Как следствие, получаем следующее разложение функции f:

$$f(x) = \int\limits_{\bigcup\limits_{i\geq 1}\hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus\bigcup\limits_{i\geq 1}\hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy,$$

где $\hat{A}_i$ — "коробка", натянутая над A_i (а именно $\hat{A}_i := \{(x,t) : x \in A_i, 0 \leq t \leq |A_i|^{1/n}\}$). Теперь мы готовы дать определение функциям w и v:

$$w(x) = \int\limits_{\bigcup\limits_{i\geq 1} \hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy,$$

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \bigcup\limits_{i\geq 1} \hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy.$$

Удостоверимся в требуемых свойствах функций w и v.

1). Оценка нормы $||v||_{L^{p_2}}$. Пусть $\phi \in L^{p_2'}(\mathbb{R}^n)$, $||\phi|| = 1$. Запишем

$$\langle v, \phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v\phi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \hat{A}} \phi(x)\frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdydx = \ldots,$$

где

$$\hat{A} := \bigcup_{i\geq 1} \hat{A}_i.$$

Продолжим, заменяя переменные и используя неравенство Гёльдера

$$\ldots = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \hat{A}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi_t(x-y)dx\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)dtdy = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \hat{A}} \phi * \psi_t(y)\frac{\partial u}{\partial t}(y,t)dtdy$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\phi * \psi_t(y)|^2 \frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \hat{A}} t\,|\nabla u(y,t)|^2\,dydt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для оценки первого из интегралов, представленных выше, воспользуемся тождеством Парсеваля:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\phi * \psi_t(y)|^2 \frac{dydt}{t}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi * \psi_t(y)|^2 \frac{dydt}{t}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 \cdot \left|\hat{\psi}(t\xi)\right|^2 \frac{d\xi dt}{t} \leq C||\phi||_2^2.$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся соотношением $\Delta u = 0$ (оно выполняется, поскольку u — гармоническая функция). Запишем:

$$|\nabla u|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2}\Delta(u^2).$$

Далее, пользуясь второй формулой Грина, запишем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A}} t\,|\nabla u(y,t)|^2\,dydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A}} t\Delta u^2(y,t)dydt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial(\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A})} \frac{\partial}{\partial n}(t)u^2 - \frac{\partial}{\partial n}(u^2)t \le \dots,$$

где $\partial/\partial n$ представляет собой нормальную производную. Продолжим оценку:

$$\dots \le \int\limits_{\partial(\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A})} \left(t|u|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| + \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\right) =: \int\limits_I + \int\limits_{II}\left(t|u|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| + \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\right),$$

где множества I и II задаются следующим образом:

$$I := \{(y,t)\in\partial(\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A}) : t = 0\},$$
$$II := \{(y,t)\in\partial(\mathbb{R}_+^{n+1}\backslash\hat{A}) : t > 0\}.$$

Теперь будем оценивать последовательно два эти интеграла. Интеграл по множеству I может быть легко ограничен сверху, благодаря выбору λ :

$$\int\limits_I \left(t|u|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| + \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\right) = \int\limits_I \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right| \le \int\limits_I \frac{1}{2}u^2$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash A} \frac{1}{2}|f|^2 \le C\lambda^{2-p_1}\mu^{p_1} = C\nu^2.$$

Для оценки второго интеграла заметим сначала, что $|u(x,t)| \le \lambda$ при $(x,t) \in II$. Это так, потому что все A_i обладают тем свойством, что расстояние от A_i до границы A сравнимо с диаметром A_i. Более детально, пусть $(x,t) \in \hat{A}_k$ для некоторого k. Заметим, что существует точка

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{i \ge 1} A_i$$

такая, что $\operatorname{dist}(x_0, A_k) \asymp |A_k|^{1/n}$. Это означает, что точка (x,t) лежит в конусе раствора Cn с вершиной в точке x_0. Следовательно, $|u(x,t)| \le \lambda$.

Докажем теперь, что

$$t \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) \right| \le C\lambda$$

при $(x,t) \in II$. Для этого достаточно доказать, что $t\,|\nabla u(x,t)| \le C\lambda$ для $(x,t) \in II$. Мы проведём оценку для производной $t\,|\partial u/\partial t|$, оставшиеся производные могут быть оценены аналогично. Заметим, что существует шар $B_{x,t}$ с центром в точке (x,t), радиуса t/C такой, что он содержится в некотором конусе с вершиной в x_0 для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash A$, а именно в множестве

$$\Gamma(x_0) := \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : ||y - x_0|| \le Ct\}.$$

Действительно, основание для этого в том, что $(x,t) \in II$ удовлетворяет

$$t \ge \frac{\operatorname{diam}(A_k)}{5}.$$

Теперь очевидно, что если мы возьмем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash A$ такую, что

$$\operatorname{dist}(x_0, A_k) = 5 \operatorname{diam}(A_k)$$

и конус раствора Cn с центром в точке x_0, то он будет содержать шар радиуса $t/2$ с центром в точке (x,t). Как только мы нашли такой шар, мы можем воспользоваться следующей версией теоремы Грина:

$$\int_{B_{x,t}} \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\partial B_{x,t}} u,$$

из чего мы делаем вывод, что

$$|t| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = \left| \frac{2^n}{t^{n-1}} \int_{B_{x,t}} \frac{\partial u}{\partial t} \right| = \left| \frac{2^n}{t^{n-1}} \int_{\partial B_{x,t}} u \right| \le C|u(x,t)| \le C\lambda.$$

Наконец, мы можем закончить оценку второго интеграла:

$$\int\limits_{II} \left(|u|t \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| + \frac{1}{2} u^2 \left| \frac{\partial t}{\partial n} \right| \right) \leq \int\limits_{II} |u||t| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| + \int\limits_{II} C\lambda^2 \leq \lambda \int\limits_{II} t \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| + C\lambda^2 |A|$$

$$\leq C\lambda^2 |A| + \lambda^2 C|A| = C\lambda^2|A| \leq C\nu^2.$$

Как следствие, мы получили следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \hat{A}} t \left| \nabla u(y,t) \right|^2 dydt \leq C\nu^2,$$

откуда и следует требуемая оценка на скалярное произведения $\langle v, \phi \rangle$:

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq C\nu ||\phi||_2.$$

Значит, $||v||_2 \leq C\nu$.

2). Теперь остаётся проанализировать функцию w. Очевидно, что носителем функции w является множество A. Сначала оценим $\int_{\mathbb{R}^n} |w|^{p_1}$, используя неравенство Гёльдера и одно неравенство о среднем значении:

$$\int\limits_A |w|^{p_1} = \int\limits_A |f - v|^{p_1} \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_1} + C \int\limits_A |v|^{p_1} \leq C\mu^{p_1} + C|A|^{1 - \frac{p_1}{p_2}} \nu^{p_2} \leq C\mu^{p_1}.$$

Теперь оценим величину $||w||_{H^{p_1}}$. Вспомним, что

$$w(x) = \int\limits_{\bigcup\limits_{i \geq 1} \hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) \psi_t(x-y) dtdy,$$

где $A = \bigcup_i A_i$, как и в прошлом пункте, есть разложение Уитни множества A, причем “коробка” $\hat{A}_i$ натянута над A_i. Рассмотрим множества A^k, определённые для $k = 1, 2, 3, \ldots$ следующим образом:

$$A^k := \{x : \sup_{(y,t) \in \Gamma_x} |f * P_t(y,t)| > 2^k \lambda\},$$

а также множество $A_0 := A$. Далее, для каждого A_k запишем его разложение Уитни:

$$A_i^k := \bigcup_{i \geq 1} A_i^k.$$

Теперь для каждого k возьмем объединение “коробок” над A_i^k, то есть рассмотрим множества

$$\hat{A}^k := \bigcup_{i\geq 1} \hat{A}_i^k \text{ и } T_j^k := \hat{A}_j^k \setminus \hat{A}^{k+1}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{j,k} T_j^k = \hat{A}^0 = \hat{A}(=: \bigcup_{i\geq 1} \hat{A}_i).$$

Перепишем определение функции w в удобном для нас виде:

$$w(x) = \int\limits_{\bigcup\limits_{i\geq 1} \hat{A}_i} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{T_j^k} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy.$$

Обозначим

$$g_{j,k}(x) = \int\limits_{T_j^k} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dtdy.$$

Очевидно, что носителем функции $g_{j,k}$ является множество A_j^k. Также можно заметить, что

$$\int\limits_{T_j^k} g_{j,k}(x)dx = 0.$$

Для оценки H^{p_1}–нормы функции w ограничим сперва L^2–норму функций $g_{j,k}$ сверху. Точнее, докажем следующие неравенства:

$$||g_{j,k}||_2 \leq C|A_{j,k}|^{\frac{1}{2}} 2^k \lambda.$$

Будем действовать подобно тому, как мы оценивали v. Рассмотрим функцию $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ такую, что $||\phi||_2 = 1$, и оценим скалярное произведение $\langle g_{j,k}, \phi\rangle$:

$$|\langle g_{j,k}, \phi\rangle| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{j,k}\phi\right| \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\phi * \psi_t(y)|^2 \frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{T_{j,k}} t\,|\nabla u(y,t)|^2\, dydt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C||\phi||_2 \left(\int\limits_{T_{j,k}} t\,|\nabla u(y,t)|^2\, dydt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C||\phi||_2 \left(\int\limits_{\partial T_{j,k}} t|u|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| + \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценки, написанные выше, во многом подобны тем, которые были использованы в случае оценки величины $\langle v, \phi \rangle$. Поэтому мы оставляем их без комментариев. Далее, отметим что $\left|\frac{\partial t}{\partial n}(x,t)\right| \leq C$ для $(x,t) \in \partial T_{j,k}$. Благодаря методам, подобным тем, что были применены при оценках v, может быть доказано, что $|u(x,t)| \leq 2^{k+1}\lambda$ для $(x,t) \in \partial T_{j,k}$ и что $t|\partial u/\partial n| \leq 2^{k+1}\lambda C$ для $(x,t) \in \partial T_{j,k}$. Из написанного выше следует, что

$$\left(\int\limits_{\partial T_{j,k}} t|u|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| + \frac{1}{2}u^2\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(|\partial T_{j,k}|2^{2k}\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \leq C|A_{j,k}|^{\frac{1}{2}}2^k\lambda.$$

Наконец, мы можем завершить оценку величины $\langle g_{j,k}, \phi \rangle$:

$$|\langle g_{j,k}, \phi \rangle| \leq C||\phi||_2|A_{j,k}|^{\frac{1}{2}}2^k\lambda.$$

В результате мы имеем:

$$w(x) = \sum_{j,k} g_{j,k}(x) = \sum_{j,k} \lambda_j^k a_{j,k}(x),$$

где $\lambda_j^k := C2^k\lambda|A_{j,k}|^{1/p_1}$ и $a_{j,k} := g_{j,k}/\lambda_j^k$. Свойства функций $g_{j,k}$ позволяют заключить, что функции $a_{j,k}$ являются атомами. Мы отсылаем читателя к книге [15], где даётся определение и обсуждаются свойства атомов. Далее,

$$||w||_{H^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1} \leq C\sum_{j,k}|\lambda_j^k|^{p_1} = C\sum_{j,k}2^{kp_1}\lambda^{p_1}|A_{j,k}| = C\lambda^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty}2^{kp_1}\Big(\sum_j |A_{j,k}|\Big)$$

$$= C\lambda^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty}2^{kp_1}|A^k| \leq C\int\limits_{A_0}\sup_{(y,t)\in\Gamma_x}|f * P_t(y,t)|^{p_1}dx \leq \dots .$$

Поскольку

$$A^k = \{x : \sup_{(y,t)\in\Gamma_x}|f * P_t(y,t)| > 2^k\lambda\},$$

получаем следующее тождество:

$$|A^k| = |\{x : \sup_{(y,t)\in\Gamma_x}|f * P_t(y,t)|^{p_1} > 2^{kp_1}\lambda^{p_1}\}|.$$

Рассматривая неравенства

$$2^{(k+1)p_1}\lambda^{p_1}|A^{k+1}| \leq \frac{2^{p_1}}{2^{p_1}-1}\left(2^{(k+1)p_1} - 2^{kp_1}\right)|A^{k+1}|$$

и складывая их, получаем:

$$\lambda^{p_1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kp_1} |A^k| \leq C \int\limits_{A_0} \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^{p_1} dx.$$

Теперь мы можем завершить оценку нормы $||w||^{p_1}_{H^{p_1}(\mathbb{R}^n)}$:

$$\ldots = C \int\limits_{A} \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} |f * P_t(y,t)|^{p_1} dx \leq C\mu^{p_1} + C|A|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \nu^{p_1} \leq C\mu^{p_1}.$$

□

Замечание 4. *Кажется правдоподобным, что значение $p = (n-1)/n$ в теореме 6 не является точным. Однако при*

$$p \leq \frac{n-1}{n}$$

пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$ более не описываются гармоническими векторным полями: соответствующее описание сопряжено с более сложной системы дифференциальных уравнений (см. [18]). Таким образом, даже формулировка задачи о K-замкнутости будет другой в этом случае.

Глава 4

Свойство $\log f \in \mathrm{BMO}$ в терминах преобразований Рисса

4.1 Введение

В статье [22] на странице 695 доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $f > 0$ *— измеримая на* $\mathbb{T}$ *функция (где* $\mathbb{T}$ *— единичная окружность). Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ *если и только если существуют числа* $c > 1$ *и* $0 < \rho < 1$*, а также функция* $w > 0$ *такие, что* $f/c \le w \le cf$ *и* $|\mathcal{H}(w^\rho)| \le cw^\rho$*, где* $\mathcal{H}$ *— преобразование Гильберта на* $\mathbb{T}$*, то есть,*

$$\mathcal{H}(f)(x) = v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\mathrm{tg}(\frac{x-t}{2})}\,dt.$$

Лемма 5 относится лишь к единичной окружности $\mathbb{T}$. На случай прямой лемма 5 переносится без особого труда с помощью пересадки меры. Однако, этот метод не работает в случае многомерного пространства. В связи с этим возникают вопросы о нахождении аналогичного результата для пространства $\mathbb{R}^n$. Естественной, как нам кажется, переформулировкой леммы 5 для многомерного случая является следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Пусть* $f > 0$ *— измеримая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$*, если и только если существуют числа* $c > 1$ *и* $0 < \rho < 1$*, а также функция* $w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n), p_0 > 1$ *такие, что* $f/c \le w \le cf$ *и* $|\mathcal{R}_j(w^\rho)| \le cw^\rho$ *для* *всех j от 1 до n, где* $\mathcal{R}_j$ — *j-ое преобразование Рисса в* $\mathbb{R}^n$, *то есть*

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = c_n v.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)\, dt,$$

где $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/\pi^{(n+1)/2}$.

Указанное распространение результата леммы 5 на случай пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ нам удалось доказать лишь частично (только достаточность). В полной же общности, тем не менее, было доказано схожее с приведенной гипотезой утверждение. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $f > 0$ — *измеримая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *если и только если существуют положительные функции* $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f = (g_1/g_2)^\alpha$ *и при этом* $|\mathcal{R}_j g_i| \le c g_i$ *для всех j от* 1 *до* n, *и* $i \in \{1, 2\}$.

Доказательству теоремы 7 и посвящена эта глава.

Замечание 5. *Подобный интерес к многомерным аналогам леммы 5 связан с тем, что эта лемма серьёзно используется в теории интерполяции одномерных аналитических классов Харди (см. [22]). Кроме того, стоит отметить, что доказанная в этой главе теорема 7 уже получила интерполяционные следствия, см. [5].*

Замечание 6. *Ознакомившись с доказательством теоремы 7, читатель, несомненно, убедится, что достаточность в нём представляет основной интерес, тогда как необходимость доказывается аналогично лемме 5.1 из книги [15].*

Дадим определение классов Макенхаупта, которые мы будем использовать в ходе доказательства.

Определение 6. Будем говорить, что вес $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ принадлежит ***классу Макенхаупта*** $A_p, p > 1$ если максимальный оператор Харди–Литтлвуда действует непрерывно на пространстве $L^p(\omega(x)dx)$, то есть если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \omega(x) dx \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx,$$

для всех $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ с константой C, не зависящей f. По определению, зададим

$$A_\infty := \bigcup_{p<\infty} A_p.$$

Хорошо известно внутреннее описание таких весов, которое мы не воспроизводим. См.[15] по поводу дальнейшей информации про такие классы.

4.2 Две основные леммы

Сформулируем и докажем две основные леммы, которыми впоследствии воспользуемся. Первой из двух лемм мы будет пользоваться при доказательстве достаточности в теореме 7, вторая лемма будет в точности необходимостью из теоремы 7.

Лемма 6 (“Достаточность”). *Пусть* $f > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *для некоторого* $p > 1$, *пусть также* $|\mathcal{R}_j f| \leq cf$ *для всех* j *от* 1 *до* n, *тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Введём вспомогательную систему сопряжённых гармонических функций $F = (U_f, U_{\mathcal{R}_1 f}, \ldots, U_{\mathcal{R}_n f})$, где

$$U_g(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \frac{tdy}{(t^2 + |y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

есть интеграл Пуассона функции g.

Поскольку $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, функция

$$|F|(x,t) = \left(\sum_{j=1}^{n} U^2_{\mathcal{R}_j f}(x,t) + U_f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

субгармонична в степени ε для любого ε больше $(n-1)/n$ (см. [15], с.286). Введём некоторые обозначения для $t_0 > 0$:

$$G_{t_0}(x) := |F|^{\varepsilon}(x, t_0);$$

$$H_{t_0} := U_{G_{t_0}};$$

$$U_{t_0}(x,t) := |F|^{\varepsilon}(x, t_0 + t).$$

Заметим, что $H_{t_0}(x,t)$ — гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, которая при $t = 0$ равна $G_{t_0}(x)$. Далее, $U_{t_0}(x,t)$ — субгармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, $U_{t_0}(x,t)|_{t=0} = G_{t_0}(x)$. Рассмотрим функцию $W(x,t) := U_{t_0}(x,t) - H_{t_0}(x,t)$. Отметим, что $W_{t_0}(x,t)$ непрерывна при $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, убывает к нулю на бесконечности и на границе меньше либо равна нулю. Следовательно, выполнен принцип максимума для области $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и субгармонической функции $W(x,t)$

(см. [19], с. 64). Из этого вытекает, что, поскольку $H_{t_0}(x,t)$ мажорирует $U_{t_0}(x,t)$ на границе, $H_{t_0}(x,t)$ мажорирует U_{t_0} везде в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, то есть для любой точки $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ верно: $U_{t_0}(x,t)\le H_{t_0}(x,t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|F|^\varepsilon(x,t_0+t)&\\ &\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{t_0}(x-y)\frac{tdy}{(t^2+|g|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\\ &=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|F|^\varepsilon(x-y,t_0)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Далее, переходя к пределу при $t_0\to 0$, получим:

$$\begin{aligned}|F|^\varepsilon(x,t)&\le\inf_{t_0>0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|F|^\varepsilon(x-y,t_0)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\\ &\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n((\mathcal{R}_jf)(x-y))^2+(f(x-y))^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство верно по теореме Фату. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}&\left((U_f(x,t))^2+\sum_{j=1}^n\left(U_{\mathcal{R}_jf}(x,t)\right)^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\\ &\qquad\le C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}f^\varepsilon(y)\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned}$$

Опустим в левой части неравенства второе слагаемое, поскольку оно положительно:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^\varepsilon\le C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}f^\varepsilon(y)\frac{tdt}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Введём новые обозначения: $\varepsilon:=1/q$; $f^\varepsilon=f_1$; $f=f_1^q$; $q>1$. Тогда получим, что:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_1(y)^q\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\le C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_1(y)\frac{tdt}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q.\tag{4.2}$$

Далее зафиксируем куб $Q \subset \mathbb{R}^n$. Пусть Q^N - образ куба Q при гомотетии с центром гомотетии в центре куба, и коэффициентом гомотетии N, который будет выбран чуть позже. Положим t в неравенстве (4.2) равным l, длине ребра куба Q, а x его центру. Рассмотрим левую и правую части неравенства (4.2) по отдельности. Для начала разберёмся с левой частью, сперва разделив множество интегрирования на два: на куб Q^N и на его дополнение, а затем применив элементарные оценки на ядро Пуассона:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \int\limits_{Q^N} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{(N^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_{Q^N} f_1^q(y)dy\cdot\frac{1}{|Q|} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Теперь приступим к оценке правой части неравенства (4.2). Сначала разделим множество интегрирования на два, как это было сделано при оценивании левой части, а потом воспользуемся элементарным неравенством для степенной функции:

$$\begin{aligned}C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\ &= C_1\left(\int\limits_{Q^N} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\ &\leq C_1 2^{q-1}\left(\int\limits_{Q^N} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\ &\quad + C_1 2^{q-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \leq \ldots .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Обозначим первое слагаемое в (4.4) через A и запишем:

$$\ldots \leq A + C_1 2^{q-1} \cdot ||\varphi_N||^q_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y) \frac{\varphi_N(y)dy}{||\varphi_N||_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \right)^q \leq \ldots ,$$

где функция φ_N устроена следующим образом:

$$\varphi_N(y) = \begin{cases} \frac{l}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{если } y \in \mathbb{R}^n \backslash Q^N; \\ 0, & \text{если } y \in Q^N. \end{cases}$$

Продолжим преобразования, применив неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \ldots \leq A + C_1 2^{q-1} \cdot ||\varphi_N||^q_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1^q(y) \frac{\varphi_N(y)dy}{||\varphi_N||_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \\ = A + C_1 2^{q-1} \cdot ||\varphi_N||^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash Q^N} f_1^q(y) \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь можно выбрать N, при этом нам потребуются два свойства. Во-первых, необходимо, чтобы величина $C_1 2^{q-1} \cdot ||\varphi||^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ не превосходила 1. Во-вторых, чтобы при этом N не зависело от Q. Для этого оценим норму

$$\begin{aligned} ||\varphi_N||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash Q^N} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ \leq \int\limits_{|x-y| \geq \frac{Nl}{2}} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \ldots . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Разобьём множество интегрирования на концентрические кубы и продолжим оценку:

$$\begin{aligned} \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{|x-y| \in [\frac{Nli}{2}, \frac{Nl(i+1)}{2}]} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ < \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{|x-y| \in [\frac{Nli}{2}, \frac{Nl(i+1)}{2}]} \frac{ldy}{(l^2+\frac{N^2l^2i^2}{4})^{\frac{n+1}{2}}} = \ldots . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим меру множеств интегрирования сверху и закончим оценку:

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{l}{l^{n+1}(1+\frac{N^2 i^2}{4})^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{C_3\left(N^n l^n (i+1)^n - N^n l^n i^n\right)}{2^n} \right]$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_4}{N} \cdot \frac{i^{n-1}}{i^{n+1}} = \frac{C_5}{N}, \tag{4.8}$$

где C_5 зависит только от n. Далее, чтобы $C_1 2^{q-1} \cdot ||\varphi_N||^{q-1}$ было меньше 1, достаточно потребовать, чтобы N было больше, чем $2C_5(C_1)^{1/(q-1)}$. Именно такие N мы и будем рассматривать.

Завершим теперь наши оценки, сравнив неравенства (4.3) и (4.5):

$$\frac{1}{(N^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{Q^N} f_1^q(y)dy \cdot \frac{1}{|Q|} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q^N} f_1^q(y) \frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\le C_1 2^{q-1} \left(\int\limits_{Q^N} f_1(y) \frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right)^q + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q^N} f_1^q(y) \frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{1}{|Q^N|} \int\limits_{Q^N} f_1^q(y)dy \le C_6 \left(\frac{1}{|Q^N|} \int\limits_{Q^N} f_1(y)dy \right)^q.$$

Как мы можем заметить, получилось обратное неравенство Гёльдера для функции f_1 и куба Q^N. Поскольку N не зависит от Q, мы можем изначально взять вместо Q куб $Q^{1/N}$ и получить обратное неравенство Гёльдера для функции f_1 и любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$. Следовательно, ([15], с. 403) $f_1 \in A_\infty$. Из этого следует ([15], с. 409), что $\log f_1 = \log f^\epsilon \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. □

Замечание 7. *Из только что доказанной леммы следует достаточность в гипотезе, приведенной в начале этой главы.*

Замечание 8. *В только что доказанной лемме условие $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ не столь важно. Конкретнее, величина $||\log f||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ в условиях леммы не зависит от p и от нормы функции f в $L^p(\mathbb{R})$. Упомянутая норма зависит лишь от размерности пространства n, а также от константы c из неравенств $|\mathcal{R}_j f| \le cf$.*

Лемма 7 (“Необходимость”). *Пусть $f > 0$ - измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция, такая, что $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существуют $\alpha \in \mathbb{R}, g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n), g_i > 0; i \in 1,2$ такие, что $f = (g_1/g_2)^\alpha$ и $|\mathcal{R}_j g_i| \leq c g_i$ для всех j от 1 до n и $i \in \{1,2\}$.*

Доказательство. Так как $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, то существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f = v^\alpha$ и $v^2 \in A_2$ (см. [15], с. 409). Как следствие получаем, что функции $v, 1/v, 1/v^2$ принадлежат классу Макенхаупта A_2.

Рассмотрим оператор S, определенный следующим образом:

$$S(g)(x) = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j g(x)| + \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j (gv)(x)| \cdot \frac{1}{v(x)}.$$

Докажем, что S — непрерывный как оператор: 1) из $L^2(v)$ в $L^2(v)$, 2) из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, 3) из $L^2(v^2)$ в $L^2(v^2)$.

Оценим сначала квадрат нормы Sg в $L^2(v)$, предположив, что $g \in L^2(v)$:

$$||Sg||^2_{L^2(v)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j g(x)| + |\mathcal{R}_j (gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 v(x) dx$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j g(x)|^2 v(x) dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j (gv)(x)|^2 \frac{1}{v(x)} dx \leq \dots .$$

Заметим, что поскольку $\mathcal{R}_j$ — непрерывный оператор из $L^2(v)$ в $L^2(v)$ (см. [15], с.411), верна оценка $||\mathcal{R}_j g||^2_{L^2(v)} \leq c ||g||^2_{L^2(v)}$. Также, так как $\mathcal{R}_j$ непрерывен из $L^2(1/v)$ в $L^2(1/v)$ (ибо $1/v \in A^2$), и так как $gv \in L^2(1/v)$, то

$$||\mathcal{R}_j (gv)||^2_{L^2(\frac{1}{v})} \leq c ||gv||^2_{L^2(\frac{1}{v})}.$$

Закончим теперь цепочку неравенств:

$$\dots \leq C ||g||^2_{L^2(v)} + C ||gv||^2_{L^2(\frac{1}{v})} = C ||g||^2_{L^2(v)},$$

и необходимая оценка следует.

Похожим образом оценивается квадрат нормы функции Sg в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при условии, что $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$||Sg||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j g(x)| + |\mathcal{R}_j (gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 dx$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j g(x)|^2 dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j (gv)(x)|^2 \frac{1}{v(x)^2} dx \leq \ldots .$$

Так как $\mathcal{R}_j$ — непрерывный оператор из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то выполняется неравенство $||\mathcal{R}_j g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c||g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Также, поскольку $1/v^2 \in A_2$, а $gv \in L^2(1/v^2)$ (ибо $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$), получаем, что

$$||\mathcal{R}_j(gv)||^2_{L^2(\frac{1}{v^2})} \leq c||gv||^2_{L^2(\frac{1}{v^2})}.$$

Продолжим цепочку неравенств:

$$\ldots \leq C||g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C||gv||^2_{L^2(1/v^2)} = c_0||g||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

и необходимая оценка следует.

Наконец, оценим $||Sg||^2_{L^2(v^2)}$ считая, что $g \in L^2(v^2)$:

$$||Sg||^2_{L^2(v)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j(g)(x)| + |\mathcal{R}_j(gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 v(x)^2 dx$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j(g)(x)|^2 v(x)^2 dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{R}_j(gv)(x)|^2 dx \leq \ldots .$$

Так как оператор $\mathcal{R}_j$ непрерывен из $L^2(v^2)$ в $L^2(v^2)$ (где $v^2 \in A_2$), а $g \in L^2(v^2)$, то $||\mathcal{R}_j g||^2_{L^2(v^2)} \leq c||g||^2_{L^2(v^2)}$. Аналогично, поскольку оператор $\mathcal{R}_j$ непрерывен из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $gv \in L^2(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что $||\mathcal{R}_j(gv)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c||gv||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Воспользуясь этим, закончим цепочку неравенств:

$$\ldots \leq C||g||^2_{L^2(v^2)} + C||gv||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = c_1||g||^2_{L^2(v^2)},$$

что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к доказательству леммы. Нам достаточно представить нашу функцию v как частное функций g_1 и g_2, где $g_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $|\mathcal{R}_j g_i| \leq c g_i$ при всех j от 1 до n и $i \in \{1, 2\}$. Определим последовательность функций $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом :

1). f_0-любая функция, обладающая следующими свойствами: $f_0 > 0, f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), f_0 \in L^2(v), f_0 \in L^2(v^2)$ (в качестве f_0 можно взять, например, характеристическую функцию единичного шара B).

2). $f_k(x) := Sf_{k-1}(x)$ при $1 \leq k$. (Отметим, что согласно уже доказанному

справедливы включения $f_k \in L^2(\mathbb{R}^n), f_k \in L^2(v), f_k \in L^2(v^2))$.
Теперь определим функцию g_2 таким образом:

$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k(x),$$

где β подобрано так, чтобы g_2 принадлежала $L^2(\mathbb{R}^n)$. Это вполне возможно, так как при $\beta \leq 1/(2c_0)$ соответствующий ряд абсолютно сходится:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k ||f_k(x)||_{L^2(R^n)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c^k ||f_0(x)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} ||f_0(x)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f_0(x)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Далее, получаем выражение для g_1:

$$g_1(x) = v(x) g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v(x) \beta^k f_k(x).$$

Покажем, что при $\beta \leq 1/(2c_1)$ функция g_2 принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$. Снова докажем, что соответствующий ряд абсолютно сходится в $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k ||v(x) f_k(x)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k ||f_k(x)||_{L^2(v^2)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c_1^k ||f_0(x)||_{L^2(v^2)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} ||f_0(x)||_{L^2(v^2)} = ||f_0(x)||_{L^2(v^2)} < \infty.$$

Докажем, наконец, что g_1 и g_2 таковы, что $|\mathcal{R}_j(g_i)| \leq c g_i$ для всех j от 1 до n, и $i \in \{1{,}2\}$. Сначала разберёмся с g_2:

$$|\mathcal{R}_j(g_2)| = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |\mathcal{R}_j(f_k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |S(f_k)|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_{k+1} \leq \frac{f_0}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} g_2.$$

Теперь докажем соответствующее утверждение для функции g_1:

$$|\mathcal{R}_j g_1| = |\mathcal{R}_j(vb)| = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |\mathcal{R}_j(vf_k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |S(f_k)| v$$

$$= v \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_{k+1} \leq v \left(\frac{f_0}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k f_k \right) = \frac{v}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} vb = \frac{1}{\beta} g_1.$$

□

Замечание 9. *Отметим, что схожие с леммой 7 утверждения выполняются, если преобразования Рисса заменить любым сингулярным интегральным оператором или максимальным оператором. Доказательства соответствующих утверждений аналогичны доказательству леммы 7.*

Замечание 10. *Схожее с леммой 6 утверждение выполняется, если преобразования Рисса заменить максимальным оператором. Доказательство в случае максимального оператора, в отличие от леммы 6, мгновенно следует из известных фактов (см. [15]).*

4.3 Доказательство теоремы 7

Напомним еще раз формулировку основного результата этой главы.

Теорема. *Пусть $f > 0$ — измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, если и только если существуют положительные функции $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такие, что $f = (g_1/g_2)^\alpha$ и при этом $|\mathcal{R}_j g_i| \leq c g_i$ для всех j от 1 до n, и $i \in \{1, 2\}$.*

Доказательство. "$\Rightarrow$"
В точности лемма 7.
"$\Leftarrow$"
Из леммы 6 мы знаем, что $\log g_i \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ при $i \in \{1, 2\}$, при этом $\log f = \alpha \log g_1 - \alpha \log g_2 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. □

Глава 5

Описание пространств Трибеля–Лизоркина посредством разложений Литтлвуда–Пэли

5.1 Введение

В книге Л. Графакоса [17] на страницах 73–75 (теорема 6.5.6. и следствие 6.5.7) автор устанавливает описание пространств Трибеля–Лизоркина $\mathfrak{F}^{0,p}_{q,\varphi}$ при $q, p < \infty$ посредством разложения Пэли–Литтлвуда. Заметим, что разложения Пэли–Литтлвуда, используемые Графакосом, обязательно "порождены" сдвигами и двоичными растяжениями какой-то функции из класса Шварца. Стоит также отметить, что в той же книге Л. Графакоса, на странице 73 подчёркивается, что упомянутая характеризация пространств Трибеля–Лизоркина является более сложным вопросом, чем соответствующая характеризация для пространств Бесова–Липшица.

В данной главе мы устанавливаем характеризацию части шкалы пространств Трибеля–Лизоркина, $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$, посредством обрезанных разложений вида Пэли–Литтлвуда, заданных классом операторов свертки, на преобразования Фурье ядер которых наложены условия в духе теоремы Хёрмандера-Михлина. Поскольку сдвиги и растяжения функции из класса Шварца удовлетворяют этим условиям, наш результат позволяет получить характеризацию пространств $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$ в более общей постановке, чем в упомянутой теореме из книги [17].

5.2 Доказательство основной теоремы

Доказательству основного результата этой главы предпошлём одно замечание и напомним одно определение.

Замечание 11. *Мы будем обозначать через* φ *набор гладких функций на* $\mathbb{R}^d$, $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, *таких, что*

1) $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \le |x| < 2^{n+1}\}$,

2) $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(x) = 1$ *при всех* $x \neq 0$,

3) $2^{-nd} \int_{\mathbb{R}^d} |D^{\alpha} \varphi_n(\xi)| d\xi \le K_{\varphi} \cdot 2^{-n|\alpha|}$ *при всех* $0 \le |\alpha| \le d+1$.

Определение 7. Зададим пространство ***Трибеля-Лизоркина*** $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$, где $p \in (1, +\infty)$ так: $f \in \mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$ тогда и только тогда, когда

$$||f||_{\varphi}^{p} := \sup_{Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_{n,\varphi} f(x)|^p dx \right) < \infty,$$

где sup берется по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^d$, $l(Q)$ — длина ребра куба Q, а операторы $\Delta_{n,\varphi}$ задаются следующим образом:

$$\widehat{\Delta_{n,\varphi} f}(x) = \varphi_n(x) \cdot \widehat{f(x)}.$$

Теорема 8. *Пусть* $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— два набора, удовлетворяющие условиям 1)–3) из замечания. Тогда*

$$||f||_{\varphi} \lesssim ||f||_{\psi},$$

где постоянная в эквивалентности зависит лишь от p *и* K_{ψ}.

Доказательство. Обозначим: $S_{n,\varphi} := \check{\varphi}_n$ и $P_n := S_{n-1} + S_n + S_{n+1}$. Тогда получаем, что

$$\Delta_{n,\varphi} f(x) = S_{n,\varphi} * f(x) = S_{n,\varphi} * P_{n,\psi} * f(x).$$

Действительно, это следует из того, что $\sum_n \psi_n = 1$, а также того, что $\operatorname{supp}\,\psi_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leq |x| < 2^{n+1}\}$. Зафиксируем куб $Q \subset \mathbb{R}^d$ и приступим к оценкам.

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} |\Delta_{n,\varphi} f\,(x)\,|^p dx$$
$$= \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} |f * S_{n,\varphi} * P_{n,\psi}\,(x)\,|^p dx$$
$$\leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} \left|\int\limits_{2Q} f * P_{n,\psi}\,(y) \cdot S_{n,\varphi}\,(x-y)\,dy\right|^p dx$$
$$+ \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus 2Q} f * P_{n,\psi}\,(y) \cdot S_{n,\varphi}\,(x-y)\,dy\right|^p dx, \quad (5.1)$$

где за $2Q$ мы обозначили куб с таким же центром, как и у куба Q, но у которого ребро в два раза длиннее.

Сначала оценим первый из интегралов:

$$I := \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} \left|\int\limits_{2Q} f * P_{n,\psi}\,(y) \cdot S_{n,\varphi}\,(x-y)\,dy\right|^p dx$$
$$\lesssim \frac{1}{|Q|}\sum_{n \geq -\log_2 l(Q)} ||\Delta_{n,\varphi}\left(\left(f * P_{n,\psi}\right) \cdot \chi_{2Q}\right)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \dots . \quad (5.2)$$

Пользуясь неравенством Юнга, мы заключаем, что для всех $g \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ выполняется следующее неравенство:

$$||\Delta_{n,\varphi}\, g||_{L^p(\mathbb{R}^d)} = ||S_{n,\varphi} * g||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq ||S_{n,\varphi}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \cdot ||g||_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Далее отметим, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$ верны неравенства

$$|S_{n,\varphi}\,(x)\,| \lesssim 2^{nd}$$

и

$$|S_{n,\varphi}\,(x)\,| \lesssim 2^{-n} \cdot |x|^{-(d+1)}.$$

Действительно, первая оценка получается следующим образом:

$$|S_{n,\varphi}\,(x)\,| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_n\,(\xi) \cdot e^{-i<x,\xi>} d\xi\right| \leq ||\varphi_n||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{nd}.$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что достаточно доказать, что

$$|x_j^{d+1} \cdot S_{n,\varphi}(x)| \lesssim 2^{-n}$$

для каждого $j \in [1, \ldots, d]$. Докажем это так: будем оценивать левую часть этого неравенства, используя свойства преобразования Фурье и условие 11 с соответствующим мультииндексом d_j

$$|x_j^{d+1} \cdot S_{n,\varphi}(x)| = |x_j^{d+1} \cdot \check{\varphi}_n| \lesssim |\widehat{D^{d_j}\varphi_n}(x)|$$

$$\lesssim ||D^{d_j}\varphi_n(x)||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{nd-n|d_j|} = 2^{nd-n(d+1)} = 2^{-n},$$

и вторая оценка следует.

Заметим, что из этих оценок следует, что

$$||S_{n,\varphi}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \int\limits_{\{x:|x|\le 2^{-n}\}} |S_{n,\varphi}(x)|dx + \int\limits_{\{x:|x|>2^{-n}\}} |S_{n,\varphi}(x)|dx$$

$$\lesssim 2^{nd} \cdot 2^{-nd} + \int\limits_{\{x:|x|>2^{-n}\}} 2^{-n} \cdot |x|^{-(d+1)}dx \lesssim 1.$$

Продолжим оценку слагаемого I:

$$I \lesssim \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{n \ge -\log_2 l(2Q)} \int\limits_{2Q} |f * P_{n,\psi}(\xi)|^p d\xi$$

$$\lesssim \frac{1}{|2Q|} \int\limits_Q \sum_{n \ge -\log_2 l(2Q)} \int\limits_{2Q} |f * S_{n,\psi}(\xi)|^p d\xi \lesssim ||f||_{\psi}.$$

Займемся теперь оставшимся выражением из (5.1), которое обозначим J:

$$J := \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{n \ge -\log_2 l(Q)} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus 2Q} f * P_{n,\psi}(y) \cdot S_{n,\varphi}(x-y)\, dy \right|^p dx.$$

Сначала оценим внутреннее выражение:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus 2Q} |f * P_{n,\psi}(y) \cdot S_{n,\varphi}(x-y)\, dy \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_i} |f * P_{n,\psi}(y)| \cdot |S_{n,\varphi}(x-y)| dy \le \ldots,$$

где $\Omega_i = (i+1)\,Q \backslash iQ$. Воспользуемся оценкой $|S_n(x)| \leq 2^{-n} \cdot |x|^{-(d+1)}$ и запишем

$$\ldots \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_i} \frac{2^{-n} \cdot |f * P_{n,\psi}(y)|}{(i \cdot l(Q))^{d+1}} dy \leq \frac{2^{-n}}{l(Q)^{d+1}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{||f||_{\psi} \cdot |\Omega_i|}{i^{d+1}}$$

$$\leq \frac{2^{-n} \cdot l(Q)^d}{l(Q)^{d+1}} \cdot ||f||_{\psi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \lesssim \frac{2^{-n}}{l(Q)} \cdot ||f||_{\psi},$$

где в последней оценке мы воспользовались недоказанной пока леммой.

Лемма 8. *Пусть множество Ω_i — такое, как выше. Тогда*

$$\frac{1}{|\Omega_i|} \int\limits_{\Omega_i} |f * P_{n,\psi}(y)|\, dy \lesssim ||f||_{\psi}.$$

Доказательство. Разрежем множество Ω_i на попарно неперекрывающиеся кубы $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$, каждый из которых — образ куба Q при параллельном переносе. Тогда их будет порядка $N \lesssim i^{n-1}$ штук. Заметим также, что для каждого $j \in [1, \ldots, N]$,

$$\left(\frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} |f * P_{n,\psi}(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} |f * S_{n-1,\psi}(y)|^p + |f * S_{n,\psi}(y)|^p + |f * S_{n+1,\psi}(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim ||f||_{\psi}.$$

Пользуясь этой оценкой, а также неравенством Гёльдера, запишем

$$\int\limits_{\Omega_i} |f * P_{n,\psi}(y)|\, dy = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{Q_j} |f * P_{n,\psi}(y)|\, dy$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} |f * P_{n,\psi}(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |Q_j| \leq ||f||_{\psi} \cdot N \cdot |Q_j|$$

$$\lesssim ||f||_{\psi} \cdot i^{d-1} \cdot |Q| \lesssim ||f||_{\psi} \cdot |\Omega_i|.$$

□

Закончим оценку выражения J:

$$J \lesssim \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{n\geq -\log_2 l(Q)} \frac{||f||_\psi^p 2^{-np}}{l\,(Q)^p}dx \lesssim ||f||_\psi^p \cdot \frac{l\,(Q)^p}{l\,(Q)^p} \lesssim ||f||_\psi^p,$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Заключение

В заключении подведём итоги данной диссертационной работы.

1. Во-первых, мы установили количественный характер падения локальной гладкости внешней функции в шаре по отношению к локальной гладкости её модуля.

2. Во-вторых, мы доказали, что аналитическая в шаре и непрерывная вплоть до границы функция с α-липшицевым модулем в некоторой точке на сфере, является $\alpha/2$ липшицевой "в среднем" в этой же точке.

3. В-третьих, мы доказали K-замкнутость пары "вещественных" многомерных пространств Харди $(H^p(\mathbb{R}^n), H^q(\mathbb{R}^n))$ в соответствующей паре пространств Лебега (L^p, L^q) при $(n-1)/n \le p \le q \le \infty$.

4. В-четвёртых, мы получили характеризацию условия $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ в терминах поточечных оценок для преобразований Рисса.

5. В-пятых, нами была установлена более общая характеризация вида Литтлвуда–Пэли пространства Трибеля–Лизоркина $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$.

Список публикаций автора по теме диссертации

[V1] И. Васильев, *О локальной гладкости аналитической функции и её модуля на границе шара: анонс*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 467, вып. 46, с. 30–33, (2018).

[V2] I. Vasilyev, *Some remarks on K-closedness for the couples of real Hardy spaces*, Journal of Functional Analysis, vol. 270, no. 2, p. 705–717, (2016).

[V3] И. Васильев, *Свойство* $\log(f) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *в терминах преобразований Рисса*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 202, вып. 41, с. 59–69, (2013).

Список литературы

[1] С. Бочкарёв, *Ряды Валле-Пуссена в пространствах* ВМО, L_1, *и* $H^1(D)$, *и мультипликативные неравенства*, Труды МИАН, вып. 210, с. 41–64, (1995).

[2] И. Васильев и А. Целищев, *Об эквивалентной норме на пространстве* ВМО, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 456, вып. 45, с. 37–54, (2017).

[3] А. Васин, С. Кисляков и А. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью её модуля*, Алгебра и анализ, т. 25, вып. 3, с. 52–85, (2013).

[4] А. Медведев, *Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью её модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции*, Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 434, вып. 43, с. 101–115, (2015).

[5] Д. Руцкий, A_1*-регулярность и ограниченность преобразований Рисса в банаховых решётках измеримых функций*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, вып. 44, с. 113–122, (2016).

[6] В. Хавин и Ф. Шамоян, *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 19, вып. 1, с. 237–239, (1970).

[7] Н. Широков, *Гладкость голоморфной в шаре функции и её модуля на сфере*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, вып. 44, с. 123–128, (2016).

[8] Н. Широков, *Достаточные условия для гёльдеровской гладкости функций*, Алгебра и анализ, т. 25, вып. 3, с. 200–206, (2013).

[9] E. Abakumov, O. El-Fallah, K. Kellay and T. Ransford, *Cyclicity in the harmonic Dirichlet space*, Conference on Harmonic and Functional, Analysis,

Operator Theory and Applications, Theta Foundation International Book Series of Mathematical Texts 22, p. 1–11, (2017).

[10] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, (1976), 209 p.

[11] J. Bourgain, *Some consequences to Pisier's approach to interpolation*, Isr. J.Math, vol. 77, (1992), p. 165–185.

[12] J. Brennan, *Approximation in the mean by polynomials on non-Carathéodory domains*, Ark. Mat., vol. 15, no. 1-2, (1977), p. 117–168.

[13] J. Bruna and J. Ortega, *Closed Finitely Generated Ideals in Algebras of Holomorphic Functions and Smooth to the Boundary in Strictly Pseudoconvex Domains*, Mathematische Annalen, vol. 268, (1984), p.137–157.

[14] R. DeVore, R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 47, no. 293, (1984), p. 1–115.

[15] J. Garcia-Cuerva and J. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, (1985), p. ii–viii, 1–604.

[16] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, 3 edition. Springer, (2014), 636 p.

[17] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, 3 edition. Springer, (2014), 870 p.

[18] C. Fefferman and E. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math., Issue 1, vol. 129, (1972), p. 137–193.

[19] W. Hayman, and P. Kennedy, *Subharmonic functions*, Acad. Press, London etc., (1976), 284 p.

[20] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Engelewood Cliffs, NJ, (1962).

[21] S. Kislyakov and N. Kruglyak, *Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals*, Birkhäuser, (2013), 322 p.

[22] S. Kislyakov and T. Gamelin, *Uniform algebras as Banach spaces*, Handbook of Banach Spaces (W.B.Johnson and J.Lindedstrauss (ed)), Elsevier Science, (2001), p. 671–706.

[23] S. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf., vol. 13, (1999), p. 102–140.

[24] J. Mashreghi and M. Shabankhah, *Zero sets and uniqueness sets with one cluster point for the Dirichlet space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 357, no. 2, (2009), p. 498–503.

[25] G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations. I*, Pacific J. Math., vol. 155, no. 2, (1992), p. 341–368.

[26] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$*, Springer-Verlag, New York, (1980), 436 p.

[27] N. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary*, Springer-Verlag, (1988), 214 p.

[28] B. Taylor and D. Williams, *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*, Michigan Math. J., vol. 18, no. 2, (1971), p. 129–139.