

На правах рукописи

Пронько Андрей Георгиевич

**Корреляционные функции вершинных моделей с  
фиксированными граничными условиями и их  
приложения к задачам комбинаторики**

01.01.03 – Математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена в лаборатории математических проблем физики  
ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук».

**Официальные оппоненты:**

**Матвеев Владимир Борисович**, доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государствен-  
ный университет аэрокосмического приборостроения»

**Разумов Александр Витальевич**, доктор физико-математических на-  
ук, главный научный сотрудник ФГБУ «Институт физики высоких энергий  
имени А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский  
институт»

**Смирнов Федор Александрович**, доктор физико-математических наук,  
директор исследований первого класса Лаборатории теоретической физики и  
высоких энергий Национального центра научных исследований, Париж, Франция

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государствен-  
ный университет»

Защита состоится 16 октября 2017 года в 15.00 на заседании диссертационного  
совета Д 002.202.01 при ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математиче-  
ского института им. В. А. Стеклова Российской академии наук», расположенном  
по адресу: 191023, наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, Россия.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-  
Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Рос-  
сийской академии наук».

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.202.01,  
доктор физико-математических наук

Зайцев А. Ю.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Изучение свойств интегрируемых моделей двумерной статистической механики тесно связано с вычислением в точном виде их корреляционных функций [1–3]. В последние годы наблюдается возрастающий интерес, мотивированный различными математическими и физическими приложениями, к решеточным моделям заданных на конечных решетках и при фиксированных граничных условиях. Основной круг задач связанный с этими моделями — получение явных формул для статистических сумм и корреляционных функций в виде детерминантов или многократных интегралов от известных функций. Это позволяет, в частности, расширить список задач комбинаторики, которые могут целенаправленно решаться с помощью методов основанных на квантовой интегрируемости, а также исследовать явления разделения фаз, которые тесно связаны с проблемами теории протекания (огрубления, плавления).

Важным примером модели, для которой актуальны указанные задачи, является знаменитая шестивершинная модель, или модель квадратного льда. Заметную роль в изучении этой модели, и, в целом, на развитие всей теории интегрируемых моделей, сыграло ее решение в предположении периодических граничных условий, основанное на анзаце Бете, которое было дано в работах Либа [4] и Сазерленда [5]. Частный случай фиксированных граничных условий, при которых шестивершинная модель является интересным объектом изучения — это так называемые граничные условия типа доменной стенки. Шестивершинная модель с этими условиями определяется на конечной квадратной решетке образованной пересечением равного числа горизонтальных и вертикальных прямых, а сами условия означают, что состояния на внешних ребрах каждой из четырех сторон решетки находятся в сегнетоэлектрическом порядке, и имеют противоположную ориентацию на ее противоположных сторонах.

Исторически, шестивершинная модель с такими граничными условиями была введена Корепиным [6], в контексте доказательства гипотезы Годена для норм волновых функций Бете. Изергиным [7] было показано, что статистическая сумма модели представляется точно в виде определителя конечной матрицы. Это представление, известное как формула Изергина–Корепина, получила важные приложения в комбинаторике, в силу взаимно-однозначного соответствия между конфигурациями модели и матрицами чередующихся знаков. Впервые это было

продемонстрировано Купербергом в его доказательстве гипотезы Миллса–Роббинса–Рамси о числе матриц чередующихся знаков [8]. Обобщения для детальных перечислений матриц чередующихся знаков были даны в работах Зейльбергера [9], Разумова и Строганова [10], и ряда других авторов.

Современный интерес к шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки во многом обусловлен явлениями разделения фаз. В существенной степени эти явления проистекают от ограничения на разрешенные вершинные состояния — «правила льда», которое индуцирует макроскопически большие области сегнетоэлектрического порядка вблизи границ. Задачи, возникающие в связи с этими явлениями, заключаются в установлении предельных форм (интерфейсов) и изучения статистики случайных конфигураций (флуктуаций). Постановка этих задач восходит к классической работе Вершика и Керова об асимптотике мер Планшереля и предельной формы диаграмм Юнга [11]. Непосредственно шестивершинная модель, в простейшем частном случае — точке свободных фермионов, связана с замощениями домино адтекских алмаментов, комбинаторной задаче, активно исследовавшейся в работах Кеньона, Кона, Проппа и Элкиеса в связи с теоремой об «арктическом круге» [12, 13].

Наиболее интересной, и в тоже время трудной открытой задачей, является проблема вычисления трехмерной предельной формы шестивершинной модели в формулировке модели в терминах функции высоты [14]. Эта формулировка является естественным обобщением широко используемого подхода в задачах димеров на двудольных графах. В тоже время, шестивершинная модель существенным образом отличается от моделей димеров присутствием взаимодействия описываемого квантово-групповым (кроссинг) параметром, и сводится к димерам только в частном случае точки свободных фермионов. В более простой постановке задача о предельной форме сводится к нахождению арктической кривой — границы между областями разупорядочивания и сегнетоэлектрического порядка, которая также иногда называется замороженной границей предельной формы. В случае граничных условий типа доменной стенки арктическая кривая интересна также тем, что описывает предельную форму матриц чередующихся знаков.

В силу названных выше причин, главное место в диссертации, а именно шесть глав из семи, отведено шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в контексте задачи вычисления ее корреляционных функ-

ций. Одним из принципиально важных результатов является представление в терминах многократного контурного интеграла для нелокальной корреляционной функции — вероятности образования пустоты. Это представление играет ключевую роль для вывода параметрического уравнения для арктической кривой. Также тесно связан с вероятностью образования пустоты новый объект — так называемая шестивершинная модель на L-образной области. Вывод термодинамики этой модели на примере точки свободных фермионов, связанной с замощениям домино, позволил выявить интересную интерпретацию арктической кривой как кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при деформациях ацтекских алмазов путем вырезания прямоугольной области макроскопического размера в углу алмаза.

Наконец седьмая, последняя глава посвящена пятивершинной модели [15] на конечной квадратной решетке с фиксированными граничными условиями, такими что допустимые конфигурации модели находятся во взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) в ящике, которые также эквивалентны замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника. Плоские разбиения — это один из самых важных объектов комбинаторики [16]. Известно, что плоские разбиения в ящике демонстрируют явления разделения фаз, которые описываются аналогами теоремы об «арктическом круге» [17, 18]. Пятивершинная модель интересна тем, что задает интегрируемое обобщение плоских разбиений и имеет интерпретацию как модель взаимодействующих димеров на решетке типа «кирпичная кладка» [19]. В диссертации вычисляется одноточечная функция пятивершинной модели для случая фиксированных граничных условий в точке свободных фермионов, а также выводятся различные представления для статистической суммы, описывающей скалярное произведение бетевских векторов вне поверхности масс.

**Степень разработанности темы исследования.** Вычисление корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей, к которым принадлежат и вершинные модели статистической механики, в существенной степени, помимо собственно интегрируемости (уравнения Янга–Бакстера), основано на использовании трансляционной инвариантности. Это предполагает либо использование периодических (или более общих твистованных, совместных с интегрируемостью) граничных условий, в случае систем в конечном объеме, либо пренебрежение эффектами от границ, в случае систем в бесконечном объеме. Такие предпо-

ложения являются стандартными при вычислении корреляционных функций, например, одномерного бозе-газа и спиновой XXZ цепочки Гейзенберга [2, 3].

В случае вершинных моделей на конечных решетках с фиксированными граничными условиями трансляционная инвариантность нарушена изначально, на уровне определения модели. По этой причине вычисление корреляционных функций для таких моделей представляет из себя сложную математическую задачу, и требует развития новых методов, приспособленных для получения замкнутых выражений. Например, даже оригинальный метод, примененный Изергиным и Корепиным при выводе детерминантной формулы для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки оказывается не эффективен в случае корреляционных функций. Решение задачи удалось достигнуть путем развития нового подхода, основанного на выводе рекуррентных соотношений, которые выражают корреляционные функции в терминах статистических сумм на решетках меньшего размера. Это позволяет, после ряда преобразований, получать представления в терминах кратных контурных интегралов, весьма близких по структуре тем, что известны для корреляционных функций XXZ цепочки Гейзенберга [20, 21].

При исследовании проблемы вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки было также обнаружено, что существует ряд открытых задач связанных с формулой Изергина–Корепина в ее комбинаторном контексте. В частности, исследование этой формулы для однородной модели позволило выявить тесную связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из схемы Аски–Вильсона. Развитие этих связей на случай граничных корреляционных функций позволило дать новое, более простое доказательство известных результатов о детальных перечислениях, а также получить новый результат — вывести явное выражение для детальных 3-перечислений.

Что касается пятивершинной модели на конечной решетке с фиксированными граничными условиями, то, несмотря на ее связь с плоскими разбиениями, эта модель, как оказалось, мало привлекала внимание исследователей. К числу основных известных результатов можно отнести формулу для скалярного произведения бетевских векторов вне поверхности масс связанных с квантовой R-матрицей пятивершинной модели, которая имеет смысл статистической суммы для граничных условий типа «скалярное произведение» [22]. Однако, даже

вариант этой формулы для однородной модели, который наиболее интересен с точки зрения статистической механики, не был известен. Также практически не изученными остаются и корреляционные функции модели. По этой причине пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями является одной из интересных вершинных моделей, наряду с шестивершинной моделью, заслуживающих активного изучения.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Основная цель работы — это исследование влияния граничных условий на свойства интегрируемых решеточных систем классической статистической механики. Одной из основных задач работы является вычисление корреляционных функций шестивершинной модели и ее частных (вырожденных) случаев на решетках конечного размера при фиксированных граничных условиях. Другой задачей является выявление связей корреляционных функций этих моделей с известными объектами комбинаторики, такие как матрицы чередующихся знаков и плоские разбиения. Важным приложением результатов о корреляционных функциях является изучение явлений разделения фаз, обусловленных фиксированными граничными условиями. Одна из целей в этом направлении — найти уравнение арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, которая также описывает предельную форму матриц чередующихся знаков.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, а также методы вычисления корреляционных функций вершинных моделей с фиксированными граничными условиями, могут быть использованы для дальнейшего развития теории корреляционных функций решеточных моделей статистической механики и связанных с ними одномерных квантовых интегрируемых систем. Ожидается, что полученные результаты стимулируют дальнейшие исследования явлений разделений фаз, теории предельных форм, перечислений матриц чередующихся знаков, димерных моделей и связанных с ними задачами замощений конечных областей регулярными многогранниками. Кроме того, как было недавно обнаружено в экспериментах с графеновыми пленками, существует практическая реализация квадратного льда [23], поэтому результаты диссертации могут найти применение и при исследовании наноструктур.

**Методология и методы исследования.** Основным методом, используемым для вычисления корреляционных функций, является метод коммутаци-

онных соотношений для элементов квантовой матрицы монодромии (алгебры Янга–Бакстера), являющийся одним из компонентов квантового метода обратной задачи. Также используются методы: теории ортогональных полиномов, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории случайных матриц, теории функций комплексного переменного.

**Научная новизна и положения, выносимые на защиту.** Все основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Получены представления для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в терминах определителей Фредгольма.

2. Вычислены одно- и двухточечные граничные корреляционные функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, и показано, что двухточечные функции разрешимы в терминах одноточечных.

3. Установлена связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими ортогональными полиномами, а именно, что 1-, 2-, и 3-перечисления связаны с непрерывными полиномами Хана, полиномами Мейкснера–Поллачека, и дуальными непрерывными полиномами Хана, соответственно, при специальных значениях параметров этих полиномов.

4. Доказана теорема о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков.

5. Вычислены нелокальные корреляционные функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки — так называемые вероятность образования пустоты и вероятность конфигурации ряда — в терминах многократных контурных интегралов.

6. Найдена арктическая кривая шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, для всех значений параметров модели, при которых эта кривая существует. Частный случай этой кривой — это предельная форма матриц чередующихся знаков.

7. Получены различные представления для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов, а именно, в терминах: ганкелевых определителей, определителей Фредгольма, решения системы дифференциально-разностных уравнений типа уравнений Тоды,  $\tau$ -функции шестого уравнения Пенлеве.

8. Вычислена свободная энергия шестивершинной модели в точке свободных



фермионов на L-образной области.

9. Установлено, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при деформациях ацтекских алмантов путем вырезания прямоугольной области у угла алманта. Обнаруженный фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья из теории матричных моделей.

10. Вычислена одноточечная корреляционная функция пятивершинной модели с специальными фиксированными граничными условиями, при которых модель описывает плоские разбиения в ящике, что эквивалентно замощениям ромбами нерегулярного шестиугольника.

11. Вычислен однородный предел детерминантной формулы для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярного произведения» и показано, что эта величина является  $\tau$ -функцией шестого уравнения Пенлеве для специальных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации докладывались на регулярных семинарах лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН, семинарах Отделов Математики и Теоретической физики Университета г. Вупперталь (Германия), семинарах Национального института ядерной физики, г. Флоренция, семинарах Международного центра теоретической физики, г. Триест (Италия), а также на следующих семинарах и конференциях: международном семинаре «Classical and Quantum Integrable Systems» (Протвино, Россия, 2011), международной конференции «Integrable Lattice Models and Quantum Field Theories» (Бад Хоннеф, Германия, 2014), международном семинаре «Statistical Mechanics, Integrability and Combinatorics» (Флоренция, Италия, 2015), международной конференции «Boundary Degrees of Freedom and Thermodynamics of Integrable Models» (Натал, Бразилия, 2016).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 21 статья в рецензируемых журналах из списка ВАК [24–44].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 260 страниц, библиография включает 165 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** дается общая характеристика работы: обоснованы актуальность и степень разработанности темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, перечислены основные новые результаты.

**Первая глава** носит вводный характер. Обсуждаются базовые факты о шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки, которая является основным объектом исследования диссертации: определение модели, связь с объектами комбинаторики, представления для статистической суммы. А именно, рассматривается шестивершинная модель на конечной квадратной решетке образованной пересечением  $N$  вертикальных и  $N$  горизонтальных прямых, в стандартной формулировке в терминах стрелок на ребрах, см. Рис. 1. Граничные условия типа доменной стенки означают, что стрелки на всех внешних горизонтальных ребрах направлены извне решетки, а на всех внешних вертикальных ребрах — внутрь решетки. Больцмановские веса вершин  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , выбираются в виде  $w_1 = w_2 = a$ ,  $w_3 = w_4 = b$ ,  $w_5 = w_6 = c$  и используется параметризация

$$a = \sin(\lambda + \eta), \quad b = \sin(\lambda - \eta), \quad c = \sin 2\eta.$$

Важную роль для вычислений играет неоднородная версия модели, в которой веса вершины расположенной на пересечении  $\alpha$ -ой (справа) вертикальной и  $k$ -ой (сверху) горизонтальной прямых равны  $a_{\alpha k} = a(\lambda_\alpha, \nu_k)$ ,  $b_{\alpha k} = b(\lambda_\alpha, \nu_k)$ ,  $c_{\alpha k} = c$ , где  $a(\lambda, \nu) \equiv \sin(\lambda - \nu + \eta)$ ,  $b(\lambda, \nu) \equiv \sin(\lambda - \nu - \eta)$ . Статистическая сумма такой модели дается формулой Изергина–Корепина:

$$Z_N = \frac{\prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) b(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \det [\varphi(\lambda_\alpha, \nu_k)]_{\alpha, k=1, \dots, N}, \quad (1)$$

где  $d(\lambda, \lambda') \equiv \sin(\lambda - \lambda')$  и  $\varphi(\lambda, \nu) \equiv c[a(\lambda, \nu)b(\lambda, \nu)]^{-1}$ . В однородном пределе,  $\lambda_\alpha \rightarrow \lambda$ ,  $\nu_k \rightarrow 0$ ,  $\alpha, k = 1, \dots, N$ ,

$$Z_N = \frac{a^{N^2} b^{N^2}}{\prod_{n=0}^{N-1} (n!)^2} \det \left[ \partial_\lambda^{j+k-2} \varphi \right]_{j, k=1, \dots, N}, \quad \varphi \equiv \varphi(\lambda, 0) = \frac{c}{ab}. \quad (2)$$

Комбинаторные приложения шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки обусловлены ее тесной связью с замощениями домино адтекского диаманта (в точке свободных фермионов) и, особенно, с матрицами чередующихся знаков. Последние определяются как матрицы, элементы

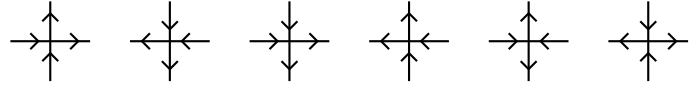


Рис. 1. Шесть конфигураций стрелок вокруг вершины

которых состоят из 1, 0 и  $-1$ , причем в каждой строке и каждом столбце ненулевые элементы чередуют знак, а первым и последним ненулевым элементом является 1. Конфигурации модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с матрицами чередующихся знаков при отождествлении вершин Рис. 1 с элементами  $0, 0, 0, 0, -1, 1$  [8]. Важной величиной является  $x$ -перечисление матриц чередующихся знаков

$$A(N; x) = \sum_{B \in \Lambda_N} x^{m(B)},$$

где  $m(B)$  число  $-1$  в элементах матрицы  $B$ , а  $\Lambda_N$  — множество матриц чередующихся знаков размера  $N \times N$ . В силу взаимно-однозначного соответствия,  $A(N; x)$  выражается через статистическую сумму (2):

$$A(N; x) = x^{-N/2} (1 - x/4)^{-N^2/2} Z_N \Big|_{\substack{\lambda=\pi/2 \\ \eta=\arcsin(\sqrt{x}/2)}}.$$

Большой интерес также представляют явления разделения фаз, частным случаем проявления которых является теорема об арктическом круге [12, 13]. Обобщение этого результата для шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, позволяет, в частности, найти уравнение кривой, описывающей предельную форму матриц чередующихся знаков.

Новые результаты в первой главе касаются эквивалентных представлений для статистической суммы. Путем преобразования определителя в (2), выводятся представления в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов интегрируемого типа (которые играют важную роль, в частности, в теории интегрируемых моделей [2]). Статистическая сумма также допускает представление в терминах определителя Фредгольма  $N \times N$  матрицы

$$Z_N = a^{N^2} e^{-i(\lambda-\eta)N} \det(I - e^{-2i\eta} W), \quad (3)$$

где матрица  $W$  имеет элементы

$$W_{jk} = (c/a)^{j+k-1} \sum_{n=0}^{\min(j,k)-1} \binom{j-1}{n} \binom{k-1}{n} (b/c)^{2n+1}, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Определитель в (3), как было недавно обнаружено в работах других авторов, возникает в некоторых задачах связанных с плоскими разбиениями и при вычислении компонент основных состояний квантовых интегрируемых цепочек. Эквивалентность представлений (2) и (3), таким образом, позволяет находить комбинаторные связи с  $x$ -перечислениями матриц чередующихся знаков.

Результаты первой главы опубликованы в работах [25, 26].

В **второй главе** приводится формулировка шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в рамках квантового метода обратной задачи и вычисляются граничные корреляционные функции. Базовым объектом формулировки модели в рамках квантового метода обратной задачи является квантовый L-оператор  $L_{\alpha,k}(\lambda_\alpha, \nu_k)$ , который сопоставляется вершине лежащей на пересечении  $\alpha$ -ой вертикальной и  $k$ -ой горизонтальной прямых и который действует нетривиально в прямом произведении пространств  $\mathcal{V}_\alpha = \mathbb{C}^2$  и  $\mathcal{H}_k = \mathbb{C}^2$ ,

$$L_{\alpha,k}(\lambda_\alpha, \nu_k) = a_{\alpha,k} \frac{1 + \tau_\alpha^z \sigma_k^z}{2} + b_{\alpha,k} \frac{1 - \tau_\alpha^z \sigma_k^z}{2} + c_{\alpha,k} (\tau_\alpha^- \sigma_k^+ + \tau_\alpha^+ \sigma_k^-). \quad (4)$$

Здесь  $\tau_\alpha^l$  and  $\sigma_k^l$  ( $l = +, -, z$ ) обозначают операторы действующие как матрицы Паули в  $\mathcal{V}_\alpha$  и  $\mathcal{H}_k$ , соответственно, и тождественно в остальных пространствах. Упорядоченное произведение вдоль  $\alpha$ -ой вертикальной прямой дает «вертикальную» матрицу монодромии

$$\begin{aligned} T_\alpha^V(\lambda_\alpha) &= L_{\alpha,N}(\lambda_\alpha, \nu_N) \cdots L_{\alpha,2}(\lambda_\alpha, \nu_2) L_{\alpha,1}(\lambda_\alpha, \nu_1) \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) & B_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) \\ C_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) & D_{1,\dots,N}^V(\lambda_\alpha) \end{pmatrix}_{[\mathcal{V}_\alpha]} \end{aligned} \quad (5)$$

причем операторы  $A_{1,\dots,N}^V(\lambda) = A_{1,\dots,N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$ , и т.д., действуют в  $\mathcal{H}_{1,\dots,N} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$ . Обозначая через  $|\uparrow_k^V\rangle, |\downarrow_k^V\rangle$  базисные векторы пространства  $\mathcal{H}_k$ , введем состояния  $|\uparrow_{1,\dots,N}^V\rangle = \bigotimes_{k=1}^N |\uparrow_k^V\rangle, |\downarrow_{1,\dots,N}^V\rangle = \bigotimes_{k=1}^N |\downarrow_k^V\rangle$ , которые являются состояниями «все спины вверх» и «все спины вниз», соответственно, в пространстве  $\mathcal{H}_{1,\dots,N}$ . Статистическая сумма может быть определена как матричный элемент  $Z_N = \langle \downarrow_{1,\dots,N}^V | B_{1,\dots,N}^V(\lambda_N) \cdots B_{1,\dots,N}^V(\lambda_1) | \uparrow_{1,\dots,N}^V \rangle$ .

Коммутационные соотношения между операторами — элементами матрицы монодромии — описываются соотношением сплетения

$$R_{\alpha,\alpha'}(\lambda, \lambda') [T_\alpha^V(\lambda) \otimes T_{\alpha'}^V(\lambda')] = [T_\alpha^V(\lambda') \otimes T_{\alpha'}^V(\lambda)] R_{\alpha,\alpha'}(\lambda, \lambda'), \quad (6)$$

которое основано на аналогичном соотношении для L-операторов [1, 2]. Здесь  $R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda') \in \text{End}(\mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{V}_{\alpha'})$  есть квантовая R-матрица

$$R_{\alpha\alpha'}(\lambda, \lambda') = \begin{pmatrix} f(\lambda', \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\lambda', \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\lambda', \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda', \lambda) \end{pmatrix}_{[\mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{V}_{\alpha'}]},$$

где

$$f(\lambda', \lambda) = \frac{\sin(\lambda - \lambda' + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda')}, \quad g(\lambda', \lambda) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \lambda')}.$$

В частности, из 16 соотношений содержащихся в (6) в последующих вычислениях используется коммутативность  $B$ -операторов,  $[B(\lambda), B(\lambda')] = 0$ , и соотношение

$$A(\lambda) B(\lambda') = f(\lambda, \lambda') B(\lambda') A(\lambda) + g(\lambda', \lambda) B(\lambda) A(\lambda'), \quad (7)$$

где  $A(\lambda) = A_{1,\dots,N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$ ,  $B(\lambda) = B_{1,\dots,N}^V(\lambda; \nu_1, \dots, \nu_N)$ .

Обозначим  $T(\lambda) \equiv T_\alpha^V(\lambda)$  и рассмотрим следующее разложение матрицы монодромии (5):  $T(\lambda) = T_2(\lambda)T_1(\lambda)$ , где  $T_2(\lambda) = L_{\alpha,N}(\lambda, \nu_N) \cdots L_{\alpha,2}(\lambda, \nu_2)$  и  $T_1(\lambda) = L_{\alpha,1}(\lambda, \nu_1)$ . Обозначим через  $A_1(\lambda)$ ,  $A_2(\lambda)$  и т.д. матричные элементы матриц  $T_1(\lambda)$ ,  $T_2(\lambda)$ , соответственно,

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} A_i(\lambda) & B_i(\lambda) \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку  $B(\lambda) = A_2(\lambda)B_1(\lambda) + B_2(\lambda)D_1(\lambda)$ , из (4) следует, что

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} b(\lambda, \nu_1)B_2(\lambda) & 0 \\ cA_2(\lambda) & a(\lambda, \nu_1)B_2(\lambda) \end{pmatrix}_{[\mathcal{H}_1]}.$$

Нижнетреугольная структура оператора  $B(\lambda)$  как матрицы в  $\mathcal{H}_1$  означает, что произведение нескольких  $B$ -операторов имеет аналогичный вид:

$$B(\lambda_n) \cdots B(\lambda_1) = \begin{pmatrix} E_{11}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & 0 \\ E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & E_{22}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{pmatrix}_{[\mathcal{H}_1]}. \quad (8)$$

Диагональные элементы, с точностью до простых множителей, равны оператору

$B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_1)$ , а недиагональный элемент дается выражением:

$$E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\beta=\alpha+1}^n a(\lambda_\beta, \nu_1) \cdot c \cdot \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} b(\lambda_\beta, \nu_1) \\ \times B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_{\alpha+1}) A_2(\lambda_\alpha) B_2(\lambda_{\alpha-1}) \cdots B_2(\lambda_1).$$

Рассмотрим разложение состояния  $|\uparrow\rangle = |\uparrow_{1,\dots,N}^V\rangle$  в виде  $|\uparrow\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle$ , где  $|\uparrow_1\rangle = |\uparrow_1^V\rangle$ ,  $|\uparrow_2\rangle = \bigotimes_{k=2}^N |\uparrow_k^V\rangle$  и, аналогично, для состояния  $|\downarrow\rangle = |\downarrow_{1,\dots,N}^V\rangle$ . Из (8) имеем

$$\langle \downarrow_1 | B(\lambda_n) \cdots B(\lambda_1) | \uparrow \rangle = E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) | \uparrow_2 \rangle \quad (9)$$

и, поскольку,  $A_2(\lambda) | \uparrow_2 \rangle = \prod_{k=2}^N a(\lambda, \nu_k) | \uparrow_2 \rangle$ , коммутационное соотношение (7) позволяет выразить правую часть (9) в терминах только  $B_2$ -операторов действующих на вектор  $|\uparrow_2\rangle$ :

$$E_{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) | \uparrow_2 \rangle = c \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n b(\lambda_\beta, \nu_1) f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{k=2}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) \\ \times B_2(\lambda_n) \cdots B_2(\lambda_{\alpha+1}) B_2(\lambda_{\alpha-1}) \cdots B_2(\lambda_1) | \uparrow_2 \rangle. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) выражают вектор построенный действием  $B$ -операторов в терминах векторов построенных действием  $B_2$ -операторов, и поэтому эти формулы могут рассматриваться как рекуррентные соотношения по  $N$ , числу узлов решетки. Выбирая подходящее значение  $n$  (числа  $B$ -операторов) и компоненту этого вектора, можно получать рекуррентные соотношения для различных скалярных величин, таких как статистическая сумма или корреляционные функции. В каждом конкретном случае явное решение этих рекуррентных соотношений обусловлено тем, что начальными условиями рекурсий оказываются статистические суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки на решетках меньшего размера. В частности, можно показать, что формула Изергина–Корепина является решением соответствующего рекуррентного соотношения в случае статистической суммы.

Простым примером корреляционных функций, которые могут быть вычислены описанным методом, являются граничные корреляционные функции. Во второй главе рассматриваются одноточечные корреляционные функции  $H_N^{(r)}$  и  $G_N^{(r)}$ ,  $r = 1, \dots, N$ , определяемые следующим образом. Функция  $H_N^{(r)}$  является

вероятностью того, что  $r$ -ый узел справа в первом сверху горизонтальном ряду решетки является вершиной шестого типа, и может быть определена формулой

$$H_N^{(r)} = Z_N^{-1} \langle \Downarrow | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) \pi_1^- B(\lambda_r) \pi_1^+ B(\lambda_{r-1}) \dots B(\lambda_1) | \Uparrow \rangle,$$

где  $\pi_k^\pm = (1 \pm \sigma_k^z)/2$ . Функция  $G_N^{(r)}$  является граничной горизонтальной поляризацией,

$$G_N^{(r)} = Z_N^{-1} \langle \Downarrow | B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) \pi_1^- B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) | \Uparrow \rangle,$$

и описывает вероятность того, что стрелка на горизонтальном ребре первого ряда расположенного между  $r$ -ой и  $(r+1)$ -ой (справа) вертикальными линиями направлена влево. Например, в случае функции  $H_N^{(r)}$ , рекуррентное соотношение приводит к выражению через статистические суммы на  $(N-1) \times (N-1)$  решетках:

$$H_N^{(r)} = Z_N^{-1} c \prod_{\alpha=r+1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=1}^{r-1} b(\lambda_\alpha, \nu_1) \times \sum_{\beta=1}^r \prod_{k=2}^N a(\lambda_\beta, \nu_k) \frac{g(\lambda_\beta, \lambda_r)}{f(\lambda_\beta, \lambda_r)} \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^r f(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1], \quad (11)$$

где квадратные скобки обозначают независимость величины от указанных параметров,  $Z_{N-1}[\lambda_\alpha; \nu_1] \equiv Z_{N-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \setminus \{\lambda_\alpha\}; \{\nu_2, \dots, \nu_N\})$ . Подстановка в (11) формулы Изергина–Корепина (1) дает

$$H_N^{(r)} = \frac{c \prod_{k=2}^N d(\nu_1, \nu_k)}{\prod_{\alpha=1}^r a(\lambda_\alpha, \nu_1) \prod_{\alpha=r}^N b(\lambda_\alpha, \nu_1) \det \mathcal{M}} \begin{vmatrix} v_r(\lambda_1) & \varphi(\lambda_1, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda_1, \nu_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_r(\lambda_N) & \varphi(\lambda_N, \nu_2) & \dots & \varphi(\lambda_N, \nu_N) \end{vmatrix},$$

где  $\mathcal{M}_{\alpha k} = \varphi(\lambda_\alpha, \nu_k)$ , а функция  $v_r(\lambda)$  дается формулой

$$v_r(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha=r+1}^N d(\lambda_\alpha, \lambda) \prod_{\alpha=1}^{r-1} e(\lambda_\alpha, \lambda)}{\prod_{k=2}^N b(\lambda, \nu_k)},$$

и  $e(\lambda, \lambda') \equiv \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta)$ . В однородном пределе

$$H_N^{(r)} = K_{N-1}(\partial_\varepsilon) [\omega(\varepsilon)]^{N-r} [\varrho(\varepsilon)]^{N-1} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (12)$$

где  $\omega(\varepsilon)$  и  $\varrho(\varepsilon)$  суть функции

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda + \eta)}{\sin(\lambda - \eta)} \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - 2\eta)}, \quad \varrho(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda - \eta)}{\sin 2\eta} \frac{\sin(\varepsilon - 2\eta)}{\sin(\varepsilon + \lambda - \eta)},$$

а полином  $K_n(x)$  определяется формулой

$$K_n(x) = n! \varphi^{n+1} \frac{\Delta_n^{(1)}(x)}{\Delta_n}, \quad (13)$$

где величины  $\Delta_n^{(1)}(x)$  и  $\Delta_n \equiv \Delta_n^{(0)}$  есть частные случаи  $(n+1) \times (n+1)$  определителей вида

$$\Delta_n^{(s)}(x_1, \dots, x_s) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-s} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-s+1} & x_1 & x_2 & \dots & x_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-s} & x_1^n & x_2^n & \dots & x_s^n \end{vmatrix}, \quad c_i \equiv \partial_\lambda^i \varphi. \quad (14)$$

Для функции  $G_N^{(r)}$  имеют место аналогичные формулы.

Основной результат второй главы заключается в том, что граничная двухточечная функция  $H_N^{(r_1, r_2)}$ , описывающая вероятность того, что  $r_1$ -ой узел (справа) первого (сверху) ряда и  $r_2$ -ой узел последнего ряда одновременно содержат вершины шестого типа, выражается в терминах одноточечной (теорема 2.3):

$$H_N^{(r_1, r_2)} = \sum_{j=1}^N (H_N^{(r_1-j+1)} H_{N-1}^{(N-r_2+j)} - H_N^{(r_1-j)} H_{N-1}^{(N-r_2+j)} - H_{N-1}^{(r_1-j)} H_N^{(N-r_2+j+1)} + H_{N-1}^{(r_1-j)} H_N^{(N-r_2+j)}),$$

где  $H_N^{(r)}$ ,  $r = 1, \dots, N$ , является граничной одноточечной функцией (12), и  $H_N^{(r)} \equiv 0$ ,  $r \neq 1, \dots, N$ .

Результаты второй главы опубликованы в работах [24, 29].

В **третьей главе** рассмотрены приложения к перечислениям матриц чередующихся знаков. Канонический метод изучения ганкелевых матриц, основанный на теории ортогональных полиномов, подсказывает записать элементы матрицы в (2) в виде  $\partial_\lambda^{j+k-2} \varphi = \int_{\mathbb{R}} x^{j+k} \mu(x) dx$ . При  $\eta \in (0, \pi/2)$ ,  $\lambda \in (\eta, \pi/2 - \eta)$ , выражение для функции  $\mu(x)$  — веса ортогональности ассоциированных полиномов — дается подынтегральным выражением в представлении

$$\varphi = \int_{\mathbb{R}} e^{(\lambda - \pi/2)x} \frac{\sinh \eta x}{\sinh \frac{\pi}{2} x} dx. \quad (15)$$

Из (15) следует, что при определенных значениях параметров определитель в (2) может быть явно вычислен в следующих случаях, благодаря связи с



классическими полиномами из таблицы Аски–Вильсона: а) при  $\eta = \pi/4$  и  $\lambda \in (\pi/4, 3\pi/4)$ , в терминах полиномов Мейкснера–Поллачека; б) при  $\eta = \pi/6$  и  $\lambda = \pi/2$ , в терминах непрерывных полиномов Хана; в) при  $\eta = \pi/3$  и  $\lambda = \pi/2$ , в терминах дуальных непрерывных полиномов Хана. В контексте матриц чередующихся знаков эти случаи соответствуют 2-, 1-, и 3-перечислениям.

Обнаруженная связь с полиномами позволяет выводить формулы и для детальных перечислений матриц чередующихся знаков. В этих перечислениях подсчет идет по набору матриц имеющих (единственный) элемент 1 первой строки в заданной  $r$ -ой позиции (столбце),  $r = 1, \dots, N$ , что в контексте шести-вершинной модели соответствует граничной корреляционной функции (12). В указанных трех случаях полином (13) известен явно и конечно-разностное уравнение для этого полинома позволяет вывести для (12) рекуррентное соотношение по  $r$ . В случае 2- и 1-перечислений это соотношение оказывается двухчленным и элементарно решается, что в случае детальных 1-перечислений позволило дать технически простое доказательство известного результата. В случае 3-перечислений соответствующее рекуррентное соотношение оказывается значительно сложнее; его решение удастся построить путем ряда преобразований производящей функции (в частности, с использованием кубического преобразования для гипергеометрической функции Гаусса).

Основным результатом является выражение для детальных 3-перечислений  $A(r, N; 3)$  (теорема 3.1):

$$A(r, 2m + 2; 3) = \frac{B_{2m}^{(r-1)} + B_{2m}^{(r-2)}}{2} A(2m + 2; 3),$$

$$A(r, 2m + 3; 3) = \frac{2B_{2m}^{(r-1)} + 5B_{2m}^{(r-2)} + 2B_{2m}^{(r-3)}}{9} A(2m + 3; 3),$$

где  $B_{2m}^{(r)} = 0$ , если  $r \neq 0, 1, \dots, 2m$ , и

$$B_{2m}^{(r)} = \frac{(2m + 1)! m!}{3^m (3m + 2)!} \sum_{\ell=\max(0, r-m)}^{\lfloor r/2 \rfloor} (2m + 2 - r + 2\ell) \binom{3m + 3}{r - 2\ell} \times \binom{2m + \ell - r + 1}{m + 1} \binom{m + \ell + 1}{m + 1} 2^{r-2\ell},$$

если  $r = 0, 1, \dots, 2m$ .

Результаты третьей главы опубликованы в работах [27, 28, 30].



справедливого для функции  $f(z)$  регулярной в точке  $z = 0$ ,

$$K_{N-1}(\partial_\varepsilon) f(\omega(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{(z-1)^{N-1}}{z^N} h_N(z) f(z) dz,$$

где  $C_0$  — простой контур вокруг точки  $z = 0$ , лежащий в ее малой окрестности,  $h_N(z) = \sum_{r=1}^N H_N^{(r)} z^{r-1}$ , а  $H_N^{(r)}$  — граничная корреляционная функция (12), вероятность образования пустоты представима в виде  $s$ -кратного контурного интеграла. Основной результат состоит в том, что для  $F_N^{(r,s)}$  справедливо представление (теорема 4.4):

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2} Z_s}{s! a^{s(s-1)} c^s (2\pi i)^s} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1]^{s-1}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)^2 \times \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s \frac{1}{t^2 z_j z_k - 2t\Delta z_j + 1} h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) dz_1 \cdots dz_s, \quad (17)$$

где  $\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$ ,  $t = b/a$ ,  $u_j \equiv -(z_j - 1)/[(t^2 - 2t\Delta)z_j + 1]$ ,  $j = 1, \dots, s$ , и

$$h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) = \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{z_k - z_j} \det \left[ z_k^{s-j} (z_k - 1)^{j-1} h_{N-s+j}(z_k) \right]_{j,k=1, \dots, s}.$$

Также обсуждаются аналогичные вычисления для другой нелокальной корреляционной функции — вероятности конфигурации ряда, которая позволяет в принципе вычислять различные корреляционные функции, и, в частности, вероятность образования пустоты.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [32, 38].

**В пятой главе** приводится вывод арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа стенки. Арктическая кривая описывает пространственное разделение разупорядочивания и сегнетоэлектрического порядка. В шестивершинной модели явления разделения фаз обусловлены правилом льда, которое индуцирует макроскопически большие области порядка внутри решетки, если, например, граничные условия выбраны согласованными с сегнетоэлектрическим порядком, а параметры модели соответствуют разупорядоченной фазе. Разделение фаз возникает в термодинамическом пределе, который определяется как скейлинговый предел. Для шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки заданной по определению на  $N \times N$

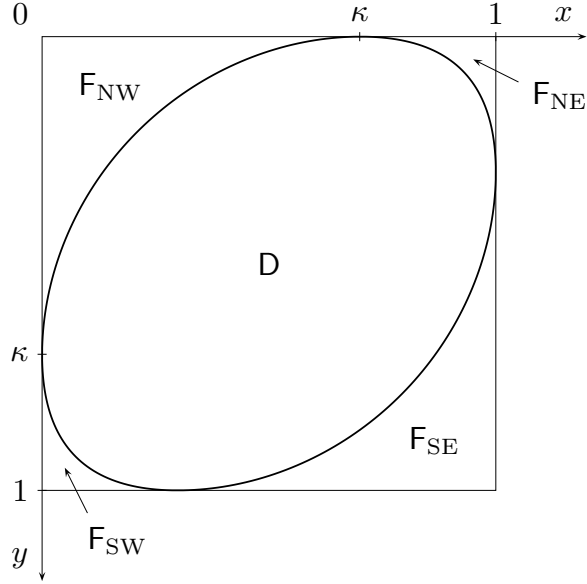


Рис. 2. Четыре области сегнетоэлектрического порядка  $F_i$  ( $i = \text{NW}, \text{NE}, \text{SE}, \text{SW}$ ) и одна область разупорядочивания  $D$  в скейлинговом пределе, в модели в разупорядоченной фазе.

решетке, нужный предел достигается, когда  $N \rightarrow \infty$ , а решетка масштабируется на квадрат с длиной стороны 1. Типичные конфигурации ограничены граничными условиями таким образом, что существуют макроскопические области сегнетоэлектрического порядка около границ.

В случае модели с весами в разупорядоченной фазы, имеется пять областей в скейлинговом пределе: четыре области сегнетоэлектрического порядка  $F_{\text{NW}}, F_{\text{NE}}, F_{\text{SE}}, F_{\text{SW}}$  в четырех углах квадрата, и одна область разупорядочивания  $D$  в центре, см. Рис. 2. Кривая отделяющая область разупорядочивания является некоторой гладкой кривой  $\mathcal{A}$ , называемой арктической кривой. Арктическая кривая и единичный квадрат имеют четыре точки касания, по одной на сторону квадрата. Арктическая кривая состоит из четырех дуг

$$\mathcal{A} = \Gamma_{\text{NW}} \cup \Gamma_{\text{NE}} \cup \Gamma_{\text{SE}} \cup \Gamma_{\text{SW}},$$

где  $\Gamma_i$  отделяет область  $F_i$  ( $i = \text{NW}, \text{NE}, \text{SE}, \text{SW}$ ) от внутренней области разупорядочивания  $D$ . В силу преобразований кроссинг-симметрии и отражения относительно диагонали, кривые  $\Gamma_{\text{NE}}, \Gamma_{\text{SE}}, \Gamma_{\text{SW}}$  строятся по кривой  $\Gamma_{\text{NW}}$ .

Основным объектом исследования является представление для вероятности образования пустоты (17) в пределе  $N, r, s \rightarrow \infty$ , причем

$$x = \frac{N - r}{N}, \quad y = \frac{s}{N}, \quad x, y \in [0, 1].$$

В указанном пределе вероятность образования пустоты стремиться к некоторой

предельной функции

$$F(x, y) = \lim_{N, r, s \rightarrow \infty} F_N^{(r, s)}.$$

Поскольку  $F_N^{(r, s)}$  описывает вероятность сегнетоэлектрического порядка в верхней левой  $(N - r) \times s$  части решетки, естественно ожидать, что

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in \mathbf{D} \cup \mathbf{F}_{\text{NE}} \cup \mathbf{F}_{\text{SE}} \cup \mathbf{F}_{\text{SW}} \\ 1 & (x, y) \in \mathbf{F}_{\text{NW}}. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом, кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$  может быть найдена из условия на значения величин  $r/N$  и  $s/N$ , которые соответствуют скачку от 0 до 1 вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе.

Использование представления (17) для вероятности образования пустоты допускает следующее объяснение ее скачкообразного (в виде функции Хевисайда) поведения в скейлинговом пределе. Рассмотрим величину  $I_N^{(r, s)}$ , где  $r, s \in \{1, \dots, N\}$ , которую определим тем же выражением, что и в (17), но с заменой всех контуров интегрирования  $C_0 \mapsto C_1^-$ , где  $C_1^-$  обозначает замкнутый отрицательно-ориентированный контур содержащий точку  $z = 1$  и лежащий в ее малой окрестности. Можно строго доказать, с использованием эквивалентного представления в терминах несимметричной формы подынтегрального выражения (см. лемму 4.3), что  $I_N^{(r, s)} = 1$ . Это свойство, а именно, что вычет по всем переменным в точке  $z = 1$  подынтегрального выражения интеграла (17) равен 1, и тот факт, что по каждой переменной полюс в точке  $z = 1$  является полюсом порядка  $s$  (числа интегрирований), позволяет выдвинуть гипотезу, что кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$  есть уравнение на параметры многократного интеграла, при выполнении которого почти все корни системы уравнений перевала конденсируются в точке  $z = 1$ .

Свойства, перечисленные выше, вместе с ожидаемым предельным выражением (18), означают, что кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$  может быть найдена с помощью условия конденсации практически всех корней уравнений перевала в точке  $z = 1$ . Пусть  $n_c$  и  $n_u$  обозначают число конденсированных и неконденсированных корней, соответственно,  $n_c + n_u = s$ . Конденсация почти всех корней означает, что

$$\frac{n_c}{s} \sim 1, \quad \frac{n_u}{s} \sim 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Более того, как хорошо известно из теории матричных моделей с логарифмическими потенциалами (типа модели Пеннера), набор неконденсированных корней

должен содержать как минимум пару совпадающих. В нашем случае, такая пара неконденсированных корней может лежать в произвольной точке  $w$  на вещественной оси на интервале  $w \in [1, \infty)$ . Значение  $w$  зависит от положения точки  $(x, y)$ , лежащей на кривой  $\Gamma_{\text{NW}}$ . Таким образом,  $w$  естественным образом параметризует кривую  $\Gamma_{\text{NW}}$ , от точки касания  $(\kappa, 0)$  до касания  $(0, \kappa)$ , при монотонном возрастании  $w \in [1, \infty)$ .

В результате применения условия (19) система уравнений перевала упрощается к набору из  $n_u$  идентичных и несвязанных уравнений  $F(z_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ , где функция  $F(z)$  дается выражением

$$F(z) = \frac{y}{z-1} - \frac{1-x}{z} - \frac{yt^2}{t^2z - 2\Delta t + 1} + \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln h_N(z)}{N} \right)'. \quad (20)$$

Чтобы получить явно уравнение кривой  $\Gamma_{\text{NW}}$ , нужно потребовать, чтобы функция  $F(z)$  имела двойной нуль в точке  $z = w$ , где  $w \in [1, \infty)$ . Это условие можно сформулировать как требование выполнения следующей системы из двух уравнений на неизвестные  $x$  и  $y$ :

$$F(w) = 0, \quad F'(w) = 0, \quad w \in [1, \infty), \quad (21)$$

Для каждого значения  $w \in [1, \infty)$ , скейлинговые координаты  $x$  и  $y$  (которые являются функциями  $w$ ) соответствуют точке арктической кривой,  $(x, y) \in \Gamma_{\text{NW}}$ . Иными словами, решение системы (21) дает уравнение арктической кривой в параметрическом виде, где  $w$  играет роль параметра.

Явное выражение для последнего слагаемого в (20) для модели в разупорядоченной фазе находится из следующей  $N \rightarrow \infty$  асимптотики (предложение 5.1):

$$\ln h_N(\gamma(\xi)) = N \ln \left( \frac{\sin \alpha(\lambda - \eta) \sin(\xi + \lambda - \eta) \sin \alpha \xi}{\alpha \sin(\lambda - \eta) \sin \alpha(\xi + \lambda - \eta) \sin \xi} \right) + o(N),$$

где

$$\gamma(\xi) = \frac{\sin(\lambda + \eta) \sin(\xi + \lambda - \eta)}{\sin(\lambda - \eta) \sin(\xi + \lambda + \eta)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\pi - 2\eta}.$$

В случае антисегнетоэлектрической фазы имеет место аналогичная формула.

Основной результат заключается в том, что, например, для модели в разупорядоченной фазе кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$  в параметрической форме записывается в виде:

$$x = X(\zeta), \quad y = Y(\zeta), \quad \zeta \in [0, \pi - \lambda - \eta], \quad (22)$$

где функции  $X(\zeta) = X(\zeta; \lambda, \eta)$ ,  $Y(\zeta) = Y(\zeta; \lambda, \eta)$  связаны соотношением  $X(\zeta) = Y(\pi - \lambda - \eta - \zeta)$ , и

$$Y(\zeta) = \frac{\sin^2 \zeta \sin^2(\zeta + 2\eta) \sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin(\zeta + \lambda + \eta)}{\sin 2\eta \sin(\lambda - \eta) [\sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin \zeta + \sin(\zeta + \lambda + \eta) \sin(\zeta + 2\eta)]} \times \left\{ \frac{\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)}{\sin^2 \zeta \sin(\zeta + \lambda + \eta) \sin(\zeta + \lambda - \eta)} + \frac{\sin(2\zeta + 2\lambda)}{\sin(\zeta + \lambda - \eta) \sin(\zeta + \lambda + \eta)} \frac{\alpha \sin \alpha(\lambda - \eta)}{\sin \alpha \zeta \sin \alpha(\zeta + \lambda - \eta)} - \frac{\alpha^2 \sin \alpha(2\zeta + \lambda - \eta) \sin \alpha(\lambda - \eta)}{\sin^2 \alpha \zeta \sin^2 \alpha(\zeta + \lambda - \eta)} \right\}. \quad (23)$$

Из этого результата видно, что в ситуации общего положения арктическая кривая является трансцендентной кривой. Формулы аналогичные (22), (23) также получены и для антисегнетоэлектрической фазы.

При частных значениях параметров кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$  является алгебраической, и задается в виде явного уравнения. Например, при  $\eta = \pi/6$ ,  $\lambda = \pi/2$ , что соответствует 1-перечислениям матриц чередующихся знаков ( $\Delta = 1/2$ ,  $t \equiv b/a = 1$ ), эта кривая дается уравнением:

$$4x(1 - x) + 4y(1 - y) + 4xy = 1, \quad x, y \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (24)$$

Интересно отметить, что кривая описываемая уравнением в формуле (24) для произвольных значений координат может быть определена как эллипс, вписанный в квадрат  $[0, 2] \times [0, 2]$  с точками касания  $(x, y) = (1/2, 0), (0, 1/2)$ . Таким образом, кривая  $\Gamma_{\text{NW}}$ , по которой строится предельная форма матриц чередующихся знаков, есть дуга эллипса лежащая между этими двумя точками.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [31, 33, 35–37].

**Шестая глава** посвящена вычислению главного члена асимптотики в термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, в случае весов удовлетворяющих условию свободный фермионов  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ключевую роль играют эквивалентные представления для вероятности образования пустоты. Вероятность образования пустоты  $F_N^{(r,s)}$ , которая была введена и вычислена в терминах многократного интеграла в четвертой главе, здесь обозначается как  $F_{r,s,q}$ . Новый параметр  $q \geq 0$  введен так, что  $N = r + s + q$ , при этом «замороженная» область имеет размер  $s \times (s + q)$ , а размер всей решетки задается

параметром  $r$ . В точке свободных фермионов, а именно, для модели с весами  $a/c = \sqrt{1-\alpha}$ ,  $b/c = \sqrt{\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , интеграл (17) вычисляется в терминах определителя (предложение 6.1):

$$F_{r,s,q} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{q!}{(q+k)!k!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{s(s-1)/2}} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[ \sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m \right]. \quad (25)$$

Дальнейшие преобразования этой формулы дают различные эквивалентные представления, в частности, в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов интегрируемого типа. Из этих представлений, в свою очередь, следует, что вероятность образования пустоты также удовлетворяет системе уравнений типа цепочки Тоды. Последние фактически являются преобразованиями Шлезингера классической интегрируемой системы, для которой вероятность образования пустоты  $F_{r,s,q}$  является  $\tau$ -функцией. Действительно, можно показать (теорема 6.3), что

$$F_{r,s,q} = C_{r,s,q} \alpha^{rs} (1-\alpha)^{r(r+q)} \tau(\alpha),$$

где величина  $C_{r,s,q}$  не зависит от  $\alpha$ , а функция  $\tau(\alpha)$  является  $\tau$ -функцией Джимбо–Мивы шестого уравнения Пенлеве.

Полученные эквивалентные представления интересны тем, что позволяют исследовать асимптотику вероятности образования пустоты в термодинамическом пределе  $r, s, q \rightarrow \infty$ ,  $s+q = [xN]$ ,  $s = [yN]$ , где  $x, y \in [0, 1]$  фиксированны, и, кроме того,  $x \geq y$ . Главный член асимптотики вероятности образования пустоты  $F_{r,s,q}$  описывается функцией

$$\varphi(x, y) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \ln F_{N-s-q, s, q}. \quad (26)$$

Функция  $\varphi(x, y)$  неотрицательна во всей области своего определения,  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x \geq y$ . Чтобы сформулировать результат, рассмотрим единичный квадрат, точки которого параметризуются переменными  $x, y \in [0, 1]$ . Как следует из (26), областью определения функции  $\varphi(x, y)$  является треугольная область ограниченная тремя прямыми:  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 1 - x$ . Рассмотрим эллипс, заданный уравнением

$$\frac{(1-x-y)^2}{\alpha} + \frac{(x-y)^2}{1-\alpha} = 1. \quad (27)$$

Обозначим через  $\mathcal{D}_I$  и  $\mathcal{D}_{II}$  области треугольника, которые лежат извне и внутри эллипса, соответственно, и которые разделены дугой  $\mathcal{A}$  эллипса (27) лежащей



между точкой касания эллипсом границы единичного квадрата,  $(x, y) = (1 - \alpha, 0)$ , и точкой пересечения эллипса с прямой  $x = y$ ,  $(x, y) = (\frac{1 - \sqrt{\alpha}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{2})$ . Дуга  $\mathcal{A}$  описывается уравнением

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{(1 - x)(1 - y)} - \sqrt{xy}, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 - \alpha. \quad (28)$$

Основной результат заключается в том, что в области  $\mathcal{D}_I$  функция  $\varphi(x, y)$  тождественно равна нулю, а в области  $\mathcal{D}_{II}$  дается формулой (теорема 6.6):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & xy \ln \frac{h}{\eta} - \frac{(1 - x - y)^2}{2} \ln \frac{1 - h}{1 - \eta} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + h}{1 + \eta} \\ & + (1 - x)y \ln \frac{y + (1 - x)h}{y + (1 - x)\eta} + x(1 - y) \ln \frac{x + (1 - y)h}{x + (1 - y)\eta} \\ & - (1 - x)x \ln \frac{x + (1 - x)h}{x + (1 - x)\eta} - (1 - y)y \ln \frac{y + (1 - y)h}{y + (1 - y)\eta} \\ & - \frac{(x - y)^2}{2} \ln \frac{x + y + (2 - x - y)h}{x + y + (2 - x - y)\eta}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$h = h(x, y) \equiv \sqrt{\frac{xy}{(1 - x)(1 - y)}}$$

и  $\eta = \eta(x, y; \alpha)$  есть единственный на интервале  $[0, 1]$  корень уравнения

$$\alpha \frac{(1 + \eta)^2 (x + (1 - x)\eta) (y + (1 - y)\eta)}{(1 - \eta)^2 (y + (1 - x)\eta) (x + (1 - y)\eta)} = 1, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_{II}.$$

Полученный результат также описывает свободную энергию модели на L-образной области, которая также эквивалентна замощениям домино на ацтекских алмазах с вырезанным углом прямоугольной формы в угла алмаза.

Из (29) следует, что имеет место фазовый переход на дуге  $\mathcal{A}$ . Для заданной точки  $(x, y)$  справедлива следующая оценка для функции  $\varphi(x, y)$  как функции параметра  $\alpha$  в окрестности значения  $\alpha = \alpha_c$ :

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \alpha < \alpha_c \\ C(\alpha - \alpha_c)^3 + O((\alpha - \alpha_c)^4) & \alpha > \alpha_c, \end{cases} \quad (30)$$

где  $\alpha_c = (\sqrt{(1 - x)(1 - y)} - \sqrt{xy})^2$ , см. (28), и  $C = C(x, y) > 0$ . Поскольку параметр  $\alpha$  описывает больцмановские веса, полученный результат, таким образом, означает наличие фазового перехода третьего рода при  $\alpha = \alpha_c$ .

Аналогичным образом, фазовый переход третьего рода можно рассматривать как определенное поведение функции  $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$  по переменным  $x$  и  $y$ , при фиксированном  $\alpha$ . А именно, функция  $\varphi(x, y) = \varphi(x, y; \alpha)$  имеет скачок своей третьей нормальной производной на дуге  $\mathcal{A}$ , с первой и второй нормальными производными равными нулю. Из (29), аналогично (30), можно получить, что для заданной точки  $(x, y) \in \mathcal{D}_{\text{II}}$ , лежащей на расстоянии  $t$  от кривой  $\mathcal{A}$ , имеет место поведение

$$\varphi(x, y) \propto t^3, \quad t \rightarrow 0^+, \quad (31)$$

где константа пропорциональности положительная. Таким образом, из (31) следует, что кривая (28), а значит и весь арктический эллипс (27), является кривой фазового перехода третьего рода в пространстве параметров модели. Этот фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Гросса–Виттена–Вадья и Дугласа–Казакова, хорошо известными в теории матричных моделей, и обусловлен тем обстоятельством, что представление (25) имеет непосредственную интерпретацию как статистическая сумма дискретного кулоновского газа (матричная модель с дискретным спектром) с двумя потенциальными стенками.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [40, 41, 43, 44].

**Седьмая глава** посвящена пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, при которых конфигурации модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) в ящике. Для пятивершинной модели используется ее определение в терминах непересекающихся линий протекающих по ребрам решетки, которые вводятся по правилу, что если стрелка направлена вниз или влево, то на этом ребре есть линия, а если вправо или вверх, то ребро пустое. Пятивершинная модель, таким образом, определяется как специальный случай шестивершинной модели, у которой вторая вершина на Рис. 1 запрещена.

Пятивершинная модель рассматривается с двумя типами фиксированных граничных условий. Первый тип заключается в том, что модель рассматривается на  $N \times M$  решетке,  $N = c + b$ ,  $M = a + b$ , причем последние  $b$  горизонтальных ребер левой границы и последние  $b$  вертикальных ребер линий верхней границы содержат линии, а остальные внешние ребра являются пустыми. Конфигурации этой модели находятся в взаимно-однозначном соответствии с плоскими разбиениями в ящике размера  $a \times b \times c$ . Более того, взвешенное перечисление плоских разбиений в ящике, которые суммируются с весом  $q^{V(\lambda)}$ , где  $V(\lambda)$  есть

объем диаграммы  $\lambda$ ,  $V(\lambda) = \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{ij}$ , соответствует статистической сумме пятивершинной модели, у которой веса в вершине образованной пересечением  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца равны  $w_1 = q^{i+j}$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 1$ . Случай  $q = 1$  соответствует однородной модели и однородному перечислению плоских разбиений.

Для указанной модели вычислена одноточечная корреляционная функция  $G(m, n)$  описывающая вероятность того, что на горизонтальном ребре соединяющем вершины с координатами  $(m, n)$  и  $(m + 1, n)$  содержится линия (стрелка направлена влево). В рамках интерпретации плоских разбиений как замощений шестиугольника ромбами, эта корреляционная функция описывает перечисление замощений ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом. Поскольку указанный выбор весов удовлетворяет условию свободных фермионов ( $w_1 w_2 + w_3 w_4 = w_5 w_6$ ), статистическая сумма и корреляционные функции, для модели на  $N \times M$  решетке, выражаются в терминах матричных элементов операторов являющихся экспонентами от квадратичных форм  $N + M$  фермионов. Вычисления основаны на «фермионизации» модели с помощью преобразования Йордана-Вигнера и формулировке модели в терминах фермионной трансфер-матрицы, которая адаптирована к наложению фиксированных граничных условий. Для функции  $G(m, n)$  получено выражение:

$$G(m, n) = \sum_{k=\max\{0, m-a, b-n\}}^{b-1} q^{(k+n-b)(k+a-m+1)} \frac{(q; q)_{a+k} (q; q)_{c+k}}{(q; q)_k (q; q)_{a+c+k}} \\ \times \begin{bmatrix} a+b+c+k-n-m \\ a+k-m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k+n+m-b-1 \\ k+n-b \end{bmatrix}_q \\ \times {}_3\phi_2 \left( \begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-a+m}, q^{-k-a-c} \\ q^{-a-b-c-k+m+n}, q^{-k-a} \end{matrix} \middle| q; q \right) {}_3\phi_2 \left( \begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-n+b}, q^{-k-a-c} \\ q^{-k-n-m+b+1}, q^{-k-c} \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

где  $(x, q)_k \equiv \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q^l x)$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$ , и  ${}_3\phi_2 \left( \begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| q; z \right)$  — базисный гипергеометрический ряд.

Второй тип граничных условий заключается в том, что модель рассматривается на  $M \times 2N$  решетке, причем первые  $N$  вертикальных ребер нижней границы и последние  $N$  вертикальных ребер линий верхней границы содержат линии, а остальные внешние ребра являются пустыми. Указанные граничные условия интересны тем, что в формализме квантового метода обратной задачи

статистическая сумма выражается в виде скалярного произведения бетевских векторов вне поверхности масс [22].

Весы модели выбираются в виде  $w_1 = a$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = w_4 = b$ ,  $w_5 = w_6 = c$ , и рассматривается горизонтально неоднородная модель, параметризуемая функциями  $a(u) = (u - u^{-1})/\Delta$ ,  $b(u) = u$ ,  $c(u) = 1$  в терминах двух наборов параметров:  $v_1, \dots, v_N$  и  $u_1, \dots, u_N$ . Весы  $j$ -го вертикального ряда,  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , являются соответствующими функциями параметра  $v_j$ , а  $(N + j)$ -го вертикального ряда,  $a_{N+j}$ ,  $b_{N+j}$ ,  $c_{N+j}$ , — функциями параметра  $u_j$ :  $f_j = f(v_j)$ ,  $f_{N+j} = f(u_j)$ ,  $f \in \{a, b, c\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Для статистической суммы справедливо представление

$$Z = \frac{1}{\Delta^{(M-N)N}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_k u_j v_k v_j}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det Q, \quad (32)$$

где  $N \times N$  матрица  $Q$  имеет элементы

$$Q_{jk} = \frac{[v_j(u_k - u_k^{-1})]^M (u_k v_j^{-1})^{N-1} - [u_k(v_j - v_j^{-1})]^M (v_j u_k^{-1})^{N-1}}{u_k v_j^{-1} - v_j u_k^{-1}}.$$

Формула (32) допускает переход к условию свободных фермионов  $b_j = c_j$ , что соответствует пределу  $\Delta \rightarrow 0$ , если положить  $v_j = \exp(\Delta \nu_j / 2)$ ,  $u_j = \exp(\Delta \mu_j / 2)$ . Если далее положить  $\nu_j = q^j$ ,  $\mu_j = q^{N+j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , то тогда (32) дает число плоских разбиений в  $N \times N \times (M - N)$  ящике, взвешенных с весом  $q^{V(\lambda)}$ .

В случае общей пятивершинной модели в однородном пределе,  $u_j \rightarrow u$ ,  $v_j \rightarrow u$ ,  $j = 1, \dots, N$ , формула (32) описывает перечисление плоских разбиений с весом  $x^{-J_V(\lambda)}$ , где  $x \equiv u^2$ , а функция  $J_V(\lambda)$  принимает значения равные числу скачков вдоль вертикальных рядов в плоском разбиении  $\lambda$ :

$$J_V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \theta(\lambda_{i,j} - \lambda_{i+1,j}),$$

где  $\theta(n) = 0$ , если  $n = 0$ , и  $\theta(n) = 1$ , если  $n > 0$ . В связи с этой интерпретацией возникает задача вычисления однородного предела в формуле (32). Основной результат седьмой главы состоит в том, что для статистической суммы однородной модели, в частности, справедливо следующее представление:

$$Z = \frac{1}{\Delta^{N(M-N)}} \binom{M}{N}^N \prod_{j=1}^N \frac{N!}{(N+j-1)!} \prod_{k=1}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N-1)!} \times \frac{1}{x^{\frac{N(N-1)}{2}}} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x \partial_x)^{j+k-2} p(x)], \quad (33)$$

где функция  $p(x)$  дается формулой

$$p(x) = (x-1)^{M-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -N, N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| x\right).$$

Преобразование Эйлера гипергеометрической функции и замена переменной  $t = x/(x-1)$  дает следующее выражение для элементов матрицы в (33):

$$(x\partial_x)^{j+k-2}p(x) = \delta^{j+k-2}(t-1)^b {}_2F_1\left(\begin{matrix} -N, M+N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| t\right), \quad \delta \equiv t(t-1)\partial_t, \quad (34)$$

Формула (34) означает, что (33) является  $\tau$ -функцией шестого уравнения Пенлеве для частных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

Результаты седьмой главы опубликованы в работах [34, 39, 42].

В **заключении** кратко обсуждаются полученные результаты.

## Цитированная литература

1. Baxter R. J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. — San Diego, CA : Academic Press, 1982.
2. Korepin V. E., Bogoliubov N. M., Izergin A. G. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. — Cambridge : Cambridge University Press, 1993.
3. Jimbo M., Miwa T. Algebraic analysis of solvable lattice models. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. — Vol. 85 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics.
4. Lieb E. H. The residual entropy of square ice // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 162–172.
5. Sutherland B. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 103–104.
6. Korepin V. E. Calculations of norms of Bethe wave functions // Comm. Math. Phys. — 1982. — Vol. 86. — P. 391–418.
7. Изергин А. Г. Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 2. — С. 331–334.
8. Kuperberg G. Another proof of the alternative-sign matrix conjecture // Int. Math. Res. Not. — 1996. — Vol. 1996. — P. 139–150.
9. Zeilberger D. Proof of the refined alternating sign matrix conjecture // New York J. Math. — 1996. — Vol. 2. — P. 59–68.

10. Разумов А. В., Строганов Ю. Г. О детальном перечислении некоторых классов симметрии матриц чередующихся знаков // ТМФ. — 2004. — Т. 141, № 3. — С. 323–347.
11. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика мер Планшереля симметрических групп и предельная форма диаграмм Юнга // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — С. 1024–1027.
12. Cohn H., Elkies N., Propp J. Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond // Duke Math. J. — 1996. — Vol. 85. — P. 117–166.
13. Cohn H., Kenyon R., Propp J. A variational principle for domino tilings // J. Amer. Math. Soc. — 2001. — Vol. 14. — P. 297–346.
14. Reshetikhin N. Lectures on the integrability of the six-vertex model // Exact methods in low-dimensional statistical physics and quantum computing. — Oxford Univ. Press, Oxford, 2010. — P. 197–266.
15. Noh J. D., Kim D. Interacting domain walls and the five-vertex model // Phys. Rev. E. — 1994. — Vol. 49. — P. 1943–1961.
16. Andrews G. E. The Theory of Partitions. — Cambridge University Press, 1998.
17. Cohn H., Larsen M., Propp J. The shape of a typical boxed plane partition // New York J. Math. — 1998. — Vol. 4. — P. 137–165.
18. Borodin Al., Gorin V., Rains E. M.  $q$ -Distributions on boxed plane partitions // Selecta Math. (N. S.). — 2010. — Vol. 16. — P. 731–789.
19. Huang H. Y., Wu F. Y., Kunz H., Kim D. Interacting dimers on the honeycomb lattice: An exact solution of the five-vertex model // Physica A. — 1996. — Vol. 228. — P. 1–32.
20. Kitanine N., Maillet J.-M., Slavnov N. A., Terras V. Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol. 641. — P. 487–518.
21. Boos H. E., Korepin V. E., Smirnov F. A. Emptiness formation probability and Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equation // Nucl. Phys. B. — 2003. — Vol. 658. — P. 417–439.
22. Боголюбов Н. М. Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 3. — С. 58–78.
23. Algara-Siller G., Lehtinen O., Wang F. C. et al. Square ice in graphene nanocapillaries // Nature. — 2015. — Vol. 519. — P. 443–445.

## Список работ автора по теме диссертации

24. Bogoliubov N. M., Pronko A. G., Zvonarev M. B. Boundary correlation functions of the six-vertex model // *J. Phys. A.* — 2002. — Vol. 35. — P. 5525–5541.
25. Colomo F., Pronko A. G. On some representations of the six vertex model partition function // *Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 315. — P. 231–236.
26. Colomo F., Pronko A. G. On the partition function of the six-vertex model with domain wall boundary conditions // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. 1987–2002.
27. Colomo F., Pronko A. G. On the refined 3-enumeration of alternating sign matrices // *Adv. in Appl. Math.* — 2005. — Vol. 34. — P. 798–811.
28. Colomo F., Pronko A. G. Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2005. — Vol. 2005. — P. P01005 (33 pp.).
29. Colomo F., Pronko A. G. On two-point boundary correlations in the six-vertex model with domain wall boundary conditions // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2005. — Vol. 2005. — P. P05010 (21 pp.).
30. Colomo F., Pronko A. G. The role of orthogonal polynomials in the six-vertex model and its combinatorial applications // *J. Phys. A.* — 2006. — Vol. 39. — P. 9015–9033.
31. Colomo F., Pronko A. G. The Arctic Circle revisited // *Contemp. Math.* — 2008. — Vol. 458. — P. 361–376.
32. Colomo F., Pronko A. G. Emptiness formation probability in the domain-wall six-vertex model // *Nucl. Phys. B.* — 2008. — Vol. 798. — P. 340–362.
33. Colomo F., Pronko A. G. The limit shape of large alternating-sign matrices // *SIAM J. Discrete Math.* — 2010. — Vol. 24. — P. 1558–1571.
34. Капитонов В. С., Пронько А. Г. Пятивершинная модель и плоские разбиения в ящике // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2008. — Т. 360. — С. 162–179.
35. Colomo F., Pronko A. G. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model // *J. Stat. Phys.* — 2010. — Vol. 138. — P. 662–700.
36. Colomo F., Pronko A. G., Zinn-Justin P. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model in its anti-ferroelectric regime // *J. Stat. Mech. Theory Exp.* — 2010. — Vol. 2010. — P. L03002 (11 pp.).
37. Colomo F., Nofereni V., Pronko A. G. Algebraic arctic curves in the domain-

- wall six-vertex model // *J. Phys. A.* — 2011. — Vol. 44. — P. 195201 (13 pp.).
38. Коломо Ф., Пронько А. Г. Подход к вычислению корреляционных функций в шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки // *ТМФ.* — 2012. — Т. 171. — С. 254–270.
39. Капитонов В. С., Пронько А. Г. Взвешенные перечисления плоских разбиений в ящике и неоднородная пятивершинная модель // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2012. — Т. 398. — С. 125–144.
40. Пронько А. Г. О вероятности образования пустоты в свободнофермионной шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2012. — Т. 398. — С. 179–208.
41. Colomo F., Pronko A. G. Third-order phase transition in random tilings // *Phys. Rev. E.* — 2013. — Vol. 88. — P. 042125 (11 pp.).
42. Пронько А. Г. Пятивершинная модель и перечисления плоских разбиений // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2015. — Т. 433. — С. 204–223.
43. Colomo F., Pronko A. G. Thermodynamics of the six-vertex model on an *L*-shaped domain // *Comm. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 339. — P. 699–728.
44. Kitaev A. V., Pronko A. G. Emptiness formation probability of the six-vertex model and the sixth Painlevé equation // *Comm. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 345. — P. 305–354.