На правах рукописи

Иванисвили Паата

Функция Беллмана, аппроксимация, исправление

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:
Кисляков Сергей Витальевич
доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН,
директор ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

Официальные оппоненты:
Шамоян Файзо Агитович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
ФГБОУ ВПО Брянского государственного университета
Васин Андрей Васильевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО Государственного университета морского и речного флота им. адмирала
С. О. Макарова

Ведущая организация:
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

Защита диссертации состоится “___” __________ 2014 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан “___” __________ 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук

А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Объект исследования и научные положения, выносимые на защиту. Основные объекты исследования — функция Беллмана в теории сингулярных интегральных операторов, мартингальное преобразование Бурхольдера и его возмущения, равномерная выпуклость нормированных пространств, вогнутые функции на плоскости, удовлетворяющие однородному уравнению Монжа–Ампера, исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье, J-замкнутость конечных наборов пространств типа Харди.

Первый результат, выносимый на защиту, — точные оценки квадратичного возмущения мартингального преобразования Бурхольдера.

Второй результат, который выносится на защиту, — исследование равномерной выпуклости нормированных пространств методом функции Беллмана: найдены точные константы.

Третий результат, подлежащий защите, — частичная характеризация вогнутых функции от двух переменных с данными граничными значениями, удовлетворяющих однородному уравнению Монжа–Ампера.

Четвертый результат — новый вариант теоремы об исправлении до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье.

Пятый результат — исследуется J-замкнутость для подпространств типа Харди в семействе BMO-регулярных квазибанаховых решеток измеримых функции на окружности.

Цели и задачи диссертации. В этой работе автор ставит перед собой цель продемонстрировать применения метода функции Беллмана к некоторым задачам гармонического анализа, доказать новый вариант теоремы об исправлении и рассмотреть одну аппроксимационную задачу, важную в теории интерполяции.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены методам функции Беллмана и более традиционными методами гармонического анализа.

Достоверность научных положений. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах и в препринтах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Актуальность, практическая ценность и область применения результатов. Новые сведения и закономерности, описанные в этой диссертации, могут быть использованы для получения новых результатов в этой области или в близких к ней, таких как теория функциональных пространств, теоремы вложения и т.д.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге, на конференции 20th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis и на конференции Harmonic and Complex Analysis and its Applications в Испании 2012-ом году, а также многократно на семинаре по функции Беллмана в лаборатории им. П. Л. Чебышева.

Публикации. Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в работах [PI3, PIOSVZ1, PIKI] и в препринтах [PIOSVZ, PI1,PI2,PISZ]. Первые 3 статьи напечатаны в журналах из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и 3-х параграфов, разбитых в общей сложности на 48 пунктов и занимает 138 страниц. Библиография содержит 65 наименований.

Содержание работы

Теория сингулярных интегральных операторов составляет существенную часть современного гармонического анализа. Разнообразные оценки этих операторов играют важную роль, например, в доказательствах существования решений дифференциальных уравнений. Известны разные способы вывода условий, необходимых и достаточных для тех или иных оценок таких операторов. Мы отметим относительно новый метод, который получил название "метод функции Беллмана" и был разработан недавно Ф. Назаровым, С. Треилем и А. Вольбергом. Идея этого метода восходит к несколько более раннему времени, однако тогда соответствующая техника не была сколько-нибудь тщательно развита. В настоящее время техника функции Беллмана стала очень популярной и в других неравенствах, не обязательно связанных с сингулярными интегралами напрямую (см. [PIOSVZ, PIOSVZ1, PI1, PI2]). Говоря в очень общих чертах, в основе этой техники лежит введение некоей минимальной функции, называемой функцией Беллмана, обладающей специальными свойствами самоподобия (зависящими от задачи). Эти свойства позволяют найти функцию Беллмана явно или, если явное вычисление невозможно, достаточно точно описать ее. Искомые оценки сводятся к вычислению конкретных значении найденной функции Беллмана. На практике часто функция Беллмана (как решение некой оптимальной задачи) удовлетворяет однородному уравнению Монжа–Ампера с данными граничными значениями и, тем самым, описывает поверхность специального вида. Соответственно, в §2.2 мы частично описываем и изучаем такие поверхности, в том числе, мы обобщаем результаты, полученные в работе [PIOSVZ] относительно минимальных вогнутых функции с данными граничными значениями (отметим, что, как правило, функции Беллмана именно таковы).

В §2.2.2 мы докажем следующую локальную теорему, которая в качестве следствия позволяет строить глобальную картинку минимальных вогнутых функции. Рассмотрим кривую $\gamma(s) = (s, g(s), f(s)) : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ такую, что $\gamma(s) \in C^3([0,1])$. Потребуем, чтобы $g''(s) > 0$ при $s \in [0,1]$ и кручение τ_γ кривой $\gamma(s)$ меняло знак с $+$ на $-$ в некой точке $c \in (0,1)$, т.е. $\tau_\gamma(s) > 0$ при $s \in [0,c)$ и $\tau_\gamma(s) < 0$ при $s \in (c,1]$.

Теорема 1. *Выполняется одно из двух:*

1. *При каждом* $s \in [c,1]$ *уравнение*
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & s-a(s) \\ g'(s) & g'(a(s)) & g(s)-g(a(s)) \\ f'(s) & f'(a(s)) & f(s)-f(a(s)) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$
имеет единственное решение $a(s) \in [0,c]$*. Более того,* $a(s) \in C^1(c,1) \cap C[c,1]$*,* $a'(s) < 0$ *при* $s \in (c,1]$*,* $a(c) = c$ *и* $a(1) \geq 0$*.*
2. *При каждом* $s \in [0,c]$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $a(s) \in [c,1]$*. Более того,* $a(s) \in C^1(0,c) \cap C[0,c]$*,* $a'(s) < 0$ *при* $s \in [0,c)$*,* $a(c) = c$ *и* $a(0) \leq 1$*.*

Не умаляя общности, далее будем считать, что мы оказались в случае 1. Пусть T обозначает выпуклую оболочку кривой $(s, g(s))$, $s \in [a(1), 1]$. Ясно, что для каждой точки $x = (x_1, x_2) \in T$ существует единственная хорда $\ell(x)$ на плоскости с концами $(a(s), g(a(s)))$, $(s, g(s))$, которая содержит точку x. Таким образом, любая точка $x \in T$ однозначно определяет параметр $s \in [c,1]$. Для любой точки $x = (x_1, x_2) \in T$ определим функцию
$$B(x_1, x_2) = f(a(s))\frac{x_1 - a(s)}{s - a(s)} + f(s)\frac{s - x_1}{s - a(s)},$$

то есть B линейная функция на хордах с концами $(a(s), g(a(s)))$, $(s, g(s))$ и $B(s, g(s)) = f(s)$ при $s \in [a(1), 1]$.

Следствие 1. *Функция B удовлетворяет следующим условиям.*

1. *B определена в области T.*
2. *B вогнута в T.*
3. *$B(s, g(s)) = f(s)$ при $s \in [a(1), 1]$.*
4. *B является минимальной среди функции, удовлетворяющих условиям 1, 2, 3.*

Таким образом, в точках смены знака кручения граничной кривой $\gamma(s)$ мы можем строить локальные картинки и стараться их как-то гладко склеить, чтобы получить глобальную картинку. Данная идея послужила авторам из [PIOSVZ] для построения минимальной вогнутой функции $B(x_1, x_2)$ в параболической полосе с данными граничными значениями на одной параболе.

В качестве приложения результатов §2.2 мы находим точную функцию Беллмана для возмущения мартингального преобразования Бурхольдера и функцию Беллмана в задаче о равномерной выпуклости. Поговорим об этом подробно.

Рассмотрим вероятностное пространство $([0, 1], \mathcal{B}, dx)$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра. Пусть $\mathcal{M}_n$ — σ-алгебра, порожденная диадическими интервалами

$$I_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{(j+1)}{2^n}\right), \quad 0 \le j \le 2^n - 1.$$

Таким образом, $\mathcal{M}_n$ состоит из объединений диадических интервалов $I_{n,j}$, $\mathcal{M}_0 = \{\emptyset, [0, 1]\}$ и $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$. Для данной $\mathbb{R}$-значной функции $F \in L^1([0, 1])$, положим

$$F_n = \sum_j \langle F \rangle_{I_{n,j}} \mathbb{1}_{I_{n,j}}$$

где $\langle F \rangle_J = \frac{1}{|J|} \int_J F$ для интервала $J \subseteq [0, 1]$. Мы говорим, что последовательность $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ — диадический мартингал, построенный по функции F.

Тогда

$$F_n = F_0 + \sum_{k=1}^{n} (F_k - F_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} dF_k,$$

где $dF_0 = F_0$ и $dF_k = (F_k - F_{k-1})$. Определим мартингальное преобразование следующим образом:

$$G_n = G_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k dF_k,$$

где G_0 — число и последовательность $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ состоит из чисел ± 1. Вновь спросим, существует ли универсальная константа C_p такая, что $\|G_n\|_p \leq C_p \|F_n\|_p$ для всех $n \geq 0$.

В работе [5] Д.Бурхольдер доказал, что если $|G_0| \leq |F_0|$, то для любого числа p, $1 < p < \infty$, имеет место неравенство

$$\|G_n\|_{L^p} \leq (p^* - 1)\|F_n\|_{L^p} \quad \forall n \geq 0, \tag{2}$$

где $p^* - 1 = \max\{p - 1, \frac{1}{p-1}\}$, и константа $p^* - 1$ в неравенстве (2) точна. За более подробной информацией об оценке (2) мы ссылаем читателя к работам [5], [6].

В [4] более общая оценка была получена методом функции Беллмана с использованием однородного уравнения Монжа–Ампера, а именно, оценка (2) достигается тогда и только тогда, когда

$$|G_0| \leq (p^* - 1)|F_0|. \tag{3}$$

В [3] изучалось квадратичное возмущение мартингального преобразования. А именно, при тех же предположениях (3) было доказано, что при $2 \leq p < \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\|(G_n^2 + \tau^2 F_n^2)^{1/2}\|_{L^p} \leq ((p^* - 1)^2 + \tau^2)^{1/2}\|F_n\|_{L^p}, \quad \forall n \geq 0, \tag{4}$$

где константа $((p^* - 1)^2 + \tau^2)^{1/2}$ точна. Было также объявлено, что аналогичное точное неравенство имеет место при $1 < p < 2$, $|\tau| \leq 0.5$. Случай $1 < p < 2$, $|\tau| > 0.5$ оставался открытым. В настоящей диссертации (см. также [PI2]) доказывается более общий результат. Во-первых, отметим, что доказательство анонсированного в [3] результата про оценку возмущения мартингального преобразования в случае $1 < p < 2$, $|\tau| \leq 0.5$ неверно, потому что построенная функция Беллмана не удовлетворяет необходимому условию вогнутости. Мы найдем точную константу $C = C(p, \tau, |F_0|/|G_0|)$ в оценке $\|(G_n^2 + \tau^2 F_n^2)^{1/2}\|_p \leq C\|F_n\|_p$, где $1 < p < 2$ и τ — любое вещественное число. Более того, мы не накладываем условия вида $|G_0| \leq (p^* - 1)|F_0|$.

Стоит отметить, что одним из главных результатов данной работы является нахождение выражения для следующей функции Беллмана

$$H(x_1,x_2,x_3)=\sup_{F,G}\left\{\int_0^1 (G^2+\tau^2F^2)^{p/2}\ :\right.$$
$$\left.\int_0^1 F=x_1,\ \int_0^1 G=x_2,\ \int_0^1 |F|^p=x_3\ |dG_n|=|dF_n|,\ n\ge 1\right\}.$$

при $1<p<2$ и $\tau\in\mathbb{R}$, а точные оценки, упомянутые выше, непосредственно следуют из конкретных значений построенной функции. Мы не выписываем здесь достаточно громоздкое явное выражение для функции Беллмана. Оно приведено в §2.4 диссертации. Здесь мы выпишем только точную константу для возмущения мартингального преобразования.

Положим

$$u(z)\stackrel{\text{def}}{=}\tau^p(p-1)\left(\tau^2+z^2\right)^{(2-p)/2}-\tau^2(p-1)+(1+z)^{2-p}-z(2-p)-1.$$

Теорема 2. *Пусть $1<p<2$, а последовательность $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ является мартингальным преобразованием мартингала $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $\beta'=\frac{|G_0|-|F_0|}{|G_0|+|F_0|}$. Следующие оценки точны.*

1. *Если $u\left(\frac{1}{p-1}\right)\le 0$, то*

$$\|(\tau^2F_n^2+G_n^2)^{1/2}\|_{L^p}\le\left(\tau^2+\max\left\{\left|\frac{G_0}{F_0}\right|,\frac{1}{p-1}\right\}^2\right)^{\frac12}\|F_n\|_{L^p},\quad\forall n\ge 0.$$

2. *Если $u\left(\frac{1}{p-1}\right)>0$, то*

$$\|(\tau^2F_n^2+G_n^2)^{1/2}\|_p^p\le C(\beta')\|F_n\|_p^p,\quad\forall n\ge 0,$$

где $C(\beta')$ — непрерывная невозрастающая функция, определенная следующим образом:

$$C(\beta')\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\left(\tau^2+\frac{|G_0|^2}{|F_0|^2}\right)^{p/2}, & \beta'\ge s_0;\\ \dfrac{\tau^p}{1-\frac{2^{2-p}(1-s_0)^{p-1}}{(\tau^2+1)(p-1)(1-s_0)+2(2-p)}}, & \beta'\le -1+\frac{2}{p};\\ C(\beta') & \beta'\in(-1+2/p,s_0);\end{cases}$$

где $s_0\in(-1+2/p,1)$ является решением уравнения $u\left(\frac{1+s_0}{1-s_0}\right)=0$.

Явное выражение для функции $C(\beta')$ на интервале $(-1+2/p,s_0)$ довольно громоздко. Читатель может найти значение функции $C(\beta')$ в пункте (ii) теоремы 2.4.

Замечание. *Условие* $u\left(\frac{1}{p-1}\right) \le 0$ *всегда выполняется, например, если* $|\tau| \le 0.822$*. Таким образом, мы еще раз получаем результат Бурхольдера в предельном случае, когда* $\tau = 0$*. Отметим, что, хотя доказательство неравенства* (4)*, предъявленное в* [3]*, неверно, анонсированный результат в случае* $1 < p < 2$, $|\tau| < 0.5$ *остается верным в силу теоремы* 2*.*

В качестве еще одного приложения результатов §2.2 мы строим функцию Беллмана в задаче о равномерной выпуклости. Это понятие было введено в 1936-м году Дж. А. Кларксоном (см. [1]). Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется равномерно выпуклым, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что если $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x - y\| \ge \varepsilon$, то $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta$.

Определим *модуль равномерной выпуклости* формулой

$$\delta_X(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\left(1 - \frac{\|f+g\|}{2}\right) \; : \; f, g \in X, \;\; \|f\| = 1, \; \|g\| = 1, \; \|f - g\| \ge \varepsilon\right\}.$$

В 1955 году, О. Ханнер (см. [2]) нашел точное значение величины $\delta_{L^p}(\varepsilon)$ при $p \in (1, \infty)$. В действительности результат восходит к Бёрлингу.

Теорема A. *Если* $p \ge 2$*, то*

$$\delta_{L^p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}.$$

Если $1 < p < 2$*, то* $\delta_{L^p}(\varepsilon)$ *является решением следующего уравнения:*

$$\left(1 - \delta_{L^p}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left|1 - \delta_{L^p}(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\right|^p = 2.$$

Для того, чтобы найти точное значение константы равномерной выпуклости $\delta(\varepsilon)$, Ханнер доказал два неравенства, носящие сейчас его имя:

$$\begin{aligned}(\|f\| + \|g\|)^p + |\|f\| - \|g\||^p &\ge \|f+g\|^p + \|f-g\|^p, \quad p \ge 2;\\ (\|f\| + \|g\|)^p + |\|f\| - \|g\||^p &\le \|f+g\|^p + \|f-g\|^p, \quad p \in [1, 2].\end{aligned}$$

Мы предъявим короткое доказательство, где функция Беллмана возникает естественным образом (см. также [PI1, PISZ]). Например, при $1 < p < \infty$ мы найдем выражение для следующей функции:

$$B(x_1, x_2, x_3) = \sup_{f,g \in L^p}\left\{\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p \; : \; \|f\|^p = x_1, \; \|g\|^p = x_2, \; \|f-g\|^p = x_3\right\}.$$

Приведем точную формулу для функции Беллмана выписанную §2.7. Определим следующую выпуклую область

$$\Lambda = \{x_1, x_2 \geq 0,\ x_1^{1/p} + x_2^{1/p} \geq 1,\ x_2^{1/p} + 1 \geq x_1^{1/p},\ 1 + x_1^{1/p} \geq x_2^{1/p}\}.$$

Обозначим $(g(s), f(s)) = (|1 - s^{1/p})|^p, (1 - /2 + s^{1/p})^p)$ при $s \in [2^{-p}, \infty)$. При каждом $s \in [1, \infty)$ найдем величину $a(s) \in (2^{-p}, 1]$ такую что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & s - a(s) \\ g'(s) & g'(a(s)) & g(s) - g(a(s)) \\ f'(s) & f'(a(s)) & f(s) - f(a(s)) \end{vmatrix} = 0.$$

В §2.7 мы докажем что на самом деле $\alpha(s) \in C^1(1, \infty) \cap C[1, \infty)$, $a(1) = 1, a'(s) < 0$ и $\lim_{s \to \infty} a(s) = 2^{-p}$. Легко заметить, что для любой точки $y = (y_1, y_2)$ из внутренности области $\{x_1 \geq x_2\} \cap \Lambda$ существует единственная хорда $\ell(y)$ на плоскости с концами в точках $(s, g(s))$, $(a(s), g(a(s))$, где $s \in (1, \infty)$, которая содержит эту точку. Другими словами, семейство хорд с концами $(s, g(s))$, $(a(s), g(a(s))$ при $s \in (1, \infty)$ заполняют внутренность области $\{x_1 \geq x_2\} \cap \Lambda$, т.е. образуют *фолиацию*. Таким образом возникает однозначное соответствие между точками $y \in \{x_1 \geq x_2\} \cap \Lambda$ и значениями параметра $s = s(y)$, который определяет конец хорды, содержащей точку y. Определим функцию $K(y_1, y_2)$ в области Λ следующим образом: если $p > 2$, то

$$K(y_1, y_2) = \begin{cases} f(s) + t_1(s)(y_1 - s) + t_2(s)(y_2 - g(s)), & y_1 > y_2, \\ K(y_2, y_1), & y_1 < y_2, \end{cases}$$

где $s = s(y)$, $t_2(s) = \frac{f'(a(s)) - f'(s)}{g'(a(s)) - g'(s)}$ и $t_1(s) = f'(s) - g'(s)t_2(s)$. При $y_1 = y_2$ и $(y_1, y_2) \in \partial\Lambda$ мы продолжаем функцию K по непрерывности. При $p \leq 2$ положим $K(y) = f(s^*)$, где $s^* \in [2^{-p}, \infty)$ является единственным решением уравнения $y_1 + y_2 = s^* + g(s^*)$.

Теорема 3.

$$B(x_1, x_2, x_3) = x_3 K\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Стоит отметить, что

$$\delta_{L^p}(\varepsilon) = 1 - \sup_{2^p \geq x_3 \geq \varepsilon^p} (B(1, 1, x_3))^{1/p}.$$

В частности, в качестве следствия мы легко посчитаем модуль равномерной выпуклости. Кроме того, явное выражение функции $B(x_1, x_2, x_3)$ дает больше информации о природе выпуклости пространств L^p.

Стоит сделать еще одно замечание: имея явное выражение для вогнутой функции B, можно легко убедиться, что при $p \geq 2$ функция $\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_3}{2^p}$ задает касательную гиперплоскость к графику функции B, стало быть, $B(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_3}{2^p}$. Последнее неравенство можно переписать в терминах функций f, g:

$$\|f+g\|^p \leq 2^{p-1}(\|f\|^p + \|g\|^p) - \|f-g\|^p.$$

Это неравенство, известное как неравенство Кларксона, непосредственно влечет неравенство Ханнера в случае $p \geq 2$.

В §3 мы изучаем феномен K- и J-замкнутости набора квазибанаховых пространств.

Пусть $(X_0, \ldots, X_n)$ – допустимый набор квазибанаховых пространств. Напомним, что это означает, что все пространства X_j вложены в одно и то же линейное топологическое пространство. Пусть для каждого j, $j = 0, \ldots, n$, в X_j выделено замкнутое подпространство Y_j. Набор $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ называется K-замкнутым в $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если для любого вектора $y \in Y_0 + \cdots + Y_n$ и любого его представления $y = x_0 + \cdots + x_n$, $x_j \in X_j$, найдется другое представление $y = y_0 + \cdots + y_n$ такое, что $y_j \in Y_j$ и $\|y_j\|_{Y_j} \leq C\|x_j\|_{X_j}$, $j = 0, \ldots, n$, где C не зависит от рассматриваемых векторов. Набор $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ называется J-замкнутым в $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, если для любого вектора $x \in \bigcap\limits_{j=0}^{n} X_j$ и любых положительных чисел $c_j > \operatorname{dist}_{X_j}(x, Y_j)$ найдется вектор $y \in \bigcap\limits_{j=0}^{n} Y_j$ такой, что $\|x-y\|_{X_j} < Cc_j$, $j = 0, \ldots, n$, где C не зависит от участвующих векторов.

В последние 25 лет феномен K-замкнутости изучался довольно подробно, в частности, было показано, что он встречается во многих классических ситуациях. Один из главных примеров K-замкнутости относится к подпространствам типа Харди в банаховых решетках. Если X – квазинормированная решетка измеримых функций на окружности, подчиненная некому условию невырожденности, то можно корректно ввести "аналитическое пространство" X_A в X, положив $X_A = X \cap N_+$, где N_+ – (граничный) класс Смирнова (см. [8]). Такие пространства часто называют пространствами типа Харди, поскольку в случае, когда $X = L^p$, X_A оказывается классическим пространством Харди H^p.

Нам понадобится еще понятие BMO-регулярной банаховой решетки. См. примеры в [7], демонстрирующие, что классических решеток измеримых функций на окружности BMO-регулярны. Квазибанахова решетка X измеримых функций на окружности называется BMO-регулярной, если для всякой функции $f \in X$, $f \neq 0$, найдется такая функция $g \in X$, что

$g \geq |f|$ и $\|g\|_X \leq m\|f\|_X$, $\|\log g\|_{\mathrm{BMO}} \leq C$ (m и C не зависят от f). Такая функция g называется BMO-мажорантой для f.

В [9] было доказано, что если $(X^0, \dots, X^n)$ – конечный набор BMO-регулярных решеток измеримых функций на окружности, то набор пространств типа Харди $(X^0_A, \dots, X^n_A)$ непременно K-замкнут в нем.

В случае пар пространств, понятия K-замкнутости и J-замкнутости эквивалентны в самой общей ситуации. Для наборов из n пространств при $n > 2$ это, скорее всего, уже не так. Можно, однако, спросить, будет ли J-замкнутым набор $(X^0_A, \dots, X^n_A)$, если решетки $X^0, \dots, X^n$ измеримых функций на окружности BMO-регулярны. Автору известно, что этим вопросом интересовался Н. Я. Кругляк.

В работе [PI3] дается положительный ответ на этот вопрос. Выясняется, что ситуация довольно проста, если правильно использовать информацию о K-замкнутости пространств типа Харди. В диссертации приводятся три разных доказательства этого утверждения, в каждом из которых содержится дополнительная информация.

Теорема 4. *Пусть* $X^0, \dots, X^n$ – BMO*-регулярные квазибанаховы решетки измеримых функций на окружности. Тогда набор их аналитических подпространств* $X^0_A, \dots, X^n_A$ *J-замкнут в* $X^0, \dots, X^n$.

§4 посвящен обобщению теоремы Меньшова. Пусть G – компактная конечномерная абелева группа, Γ – двойственная с ней дискретная группа. В статье [10] было доказано следующее обобщение классической теоремы Меньшова об исправлении: любую непрерывную функцию f на G изменением на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье и редким спектром. При этом равномерная сходимость ряда $\sum_{\gamma \in \Gamma} \widehat{f}(\gamma)\gamma$ могла пониматься в любом разумном смысле. Например, характеры могли быть просто занумерованы произвольным образом – тогда речь шла о сходимости последовательных частичных сумм в этой нумерации. В случае, когда G – n-мерный тор $\mathbb{T}^n$, допускалась, например, сходимость частичных сумм по шарам либо по прямоугольникам и т.п. Условие редкости спектра гласило, что спектр исправленной функции можно поместить в объединение $R_1 \cup R_2$, где (R_1, R_2) – предписанная заранее *достаточная пара* подмножеств группы Γ. Последнее означает, что для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется такой характер $\lambda \in \Gamma$, что $-\lambda + K \subset R_1$, $\lambda + K \subset R_2$.

Условимся об обозначениях и терминах. Компактную группу G мы всегда записываем мультипликативно, а двойственную с ней дискретную группу Γ – аддитивно. Меру Хаара m на группе G считаем вероятностной. Под тригонометрическим полиномом на группе G мы понимаем произвольную линейную комбинацию ее характеров. Далее, зафиксируем обозначение для преобразования Фурье: $\widehat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dm(x)$, $f \in L^1(G)$, $\gamma \in \Gamma$.

Начнем с обобщения понятия достаточной пары множеств. Пусть l – натуральное число, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$ – упорядоченный набор из l характеров группы G, а $m = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$. Через $\langle m, \gamma \rangle$ мы будем обозначать характер $m_1\gamma_1 + \dots m_l\gamma_l$, т.е. функцию $x \mapsto \gamma_1(x)^{m_1} \dots \gamma_l(x)^{m_l}$ на группе G.

Шаблоном (точнее, *l-шаблоном*) мы будем называть любое конечное множество $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\} \subset \mathbb{Z}^l$ такое, что $m^{(j)} \neq 0$ при всех j, но существуют неотрицательные целые числа $n_1, \dots, n_k$, не все равные нулю, для которых $n_1 m^{(1)} + \dots + n_k m^{(k)} = 0$. Иными словами, требуется, чтобы полугруппа, порожденная множеством M, содержала ноль – как в теореме A. Набор $(R_1, \dots, R_k)$ из k подмножеств группы Γ называется *достаточным с шаблоном M* (или просто *M-достаточным*), если для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется такой упорядоченный набор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ из характеров группы G, что $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle + K \subset R_j$ при $j = 1, \dots, k$.

Из определения видно, что достаточные пары, упомянутые выше – это просто достаточные наборы с 1-шаблоном $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$ множество всех тригонометрических полиномов на группе G. Для любого конечного множества $E \subset \Gamma$ соответствующий оператор частичной суммы ряда Фурье,

$$P_E f = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma)\gamma,$$

определен по крайней мере на $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{B}$ – система конечных подмножеств группы Γ. Введем на множестве $\mathcal{P}$ полунорму

$$\|f\| = \sup_{E \in \mathcal{B}} \|P_E f\|. \tag{5}$$

Будем рассматривать только такие системы $\mathcal{B}$, что для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется множество $E \in \mathcal{B}$, для которого $E \supset K$. Тогда формула (5) определяет норму, мажорирующую норму $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in G} |f(t)|$. Обозначим через $u(G, \mathcal{B})$ пополнение пространства $\mathcal{P}$ по этой норме.

С точностью до деталей, о которых речь ниже, $u(G, \mathcal{B})$ и будет тем самым пространством функций с равномерно сходящимся рядом Фурье, которым мы будем заниматься. Тип равномерной сходимости определяется системой $\mathcal{B}$, которую мы будем называть *базисом суммирования.* Разумеется, нам выгодно включить как можно больше множеств в систему

$\mathcal{B}$, однако *все* конечные множества (обозначим их совокупность через $\mathcal{F}_\Gamma$) включить заведомо не удается.[1] Действительно, $u(G, \mathcal{F}_\Gamma)$ совпадает с пространством $l^1(\Gamma)$ всех абсолютно сходящихся рядов Фурье на группе G, а для него теорема об исправлении уже неверна (см., например, обсуждение в [11]). Следующее условие, помимо прочего, ограничивает "размер" базиса $\mathcal{B}$. Если K – конечное подмножество группы Γ, обозначим через $K_\mathcal{B}$ объединение тех множеств $E \in \mathcal{B}$, для которых оба множества $K \cap E$ и $K \setminus E$ непусты (т.е. E *разбивает* K).

Базис суммирования $\mathcal{B}$ и M-достаточный набор $(R_1, \ldots, R_k)$ подмножеств группы Γ называются *согласованными*, если для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ набор $(R_1 \setminus K_\mathcal{B}, \ldots, R_k \setminus K_\mathcal{B})$ является достаточным с тем же самым l-шаблоном M.

Пусть заданы шаблон M и M-достаточный набор $R = (R_1, \ldots, R_k)$ подмножеств группы Γ. Пусть еще $\mathcal{B}$ – базис суммирования в Γ. Обозначим через $u(G, \mathcal{B}, R_j)$ множество тех функций f из $u(G, \mathcal{B})$, для которых $\widehat{f}(\gamma) = 0$ при $\gamma \notin R_j$. Наконец, пусть $U = U(G, \mathcal{B}, R)$ – это множество всех сумм вида $h = f_1 + \ldots + f_k$, где $f_i \in u(G, \mathcal{B}, R_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Снабдим пространство U нормой

$$\|h\|_U = \inf \sum_{1 \le j \le k} \|f_j\|_{u(G, \mathcal{B}, R_j)},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям функции h в виде, указанном выше. Стоит отметить, что если множества R_j попарно не пересекаются (а так и будет во всех интересных примерах), то такое представление единственно. Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 5. *Предположим, что система R и базис суммирования $\mathcal{B}$ согласованы. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и всякой функции $f \in L^\infty(G)$ существует функция $g \in U$ такая, что $m\{f \neq g\} \le \varepsilon$ и $\|g\|_U \le C\varepsilon^{-D}\|f\|_\infty$. Константы C и D не зависят от f.*

Эта формулировка довольно громоздкая. В качестве иллюстрации приведем один весьма частный случай. Положим $I_k = [2^{2k}, 2^{2k+1}]$ и $R = (\cup_{k \ge 1} I_k) \cap \mathbb{Z}$. Тогда любую почти всюду ограниченную функцию на окружности можно исправить до функции f, так чтобы спектр функции f лежал в $R \cup -R$, оба ряда $\sum_{n \ge 0} \hat{f}(n) z^n$, $\sum_{n<0} \hat{f}(n) z^n$ сходились равномерно и $\sup_k \sum_{j \in -I_k \cup I_k} |\hat{f}(j)| < \infty$. Последнее неравенство говорит о "слабых следах" абсолютной сходимости.

[1] Если сама группа Γ бесконечна – но только в этом случае задача об исправлении и содержательна.

Заметим еще, что общая формулировка позволяет помещать спектр исправленной функции в несимметричные множества.

Описание диссертации по главам и параграфам. §2 носит вводный характер. В §2.1 мы рассматриваем простейшую функция Беллмана, которая решает определенный класс экстремальных задач.

Несмотря на простоту §2.1, в качестве приложения в §2.1.1 мы предъявляем несложное интуитивное рассуждение, приводящее к точной константе равномерной выпуклости.

§2.2 посвящен свойствам поверхностей, удовлетворяющих однородному уравнению Монжа–Ампера.

Функций, удовлетворяющие однородному уравнению Монжа–Ампера, являются линейными вдоль некоторого семейства хорд. Мы более глубоко изучим это свойство, вводя понятие фолиации и силовых функции в §2.2.1. Выясняется, что кручение граничных значений играет ключевую роль в построении минимальной вогнутой поверхности. В §2.2.2 мы изучаем частный вид фолиации, который является основным объектом в построении минимальных вогнутых поверхностей.

В последующем тексте материал §2.2 прилагается к построению точной функции Беллмана для мартингального преобразования. §2.3 посвящен мартингальному преобразованию. В §2.3.1 речь пойдет об истории вопроса и его актуальности. В §2.3.2 сформулирован основной результат и его следствия. В §2.3.3 вводиться функция Беллмана для мартингального преобразования.

В §2.4 мы построим кандидата на роль функции Беллмана, определенной в §2.3.

После построения кандидата, в параграфе §2.5 мы находим точные константы в оценках возмущения мартингального преобразования. Возникает некоторая дихотомия, и задача разбивается на два случая, разобранных, соответственно, в §2.5.2 и §2.5.3.

В §2.6 проверяется совпадение кандидата, построенного в §2.4, с настоящей функцией Беллмана и, соответственно, получается оптимальность оценок, найденных в §2.5. Более того, в §2.6 предъявляется алгоритм для построения экстремальных функции, которые дают оптимальные оценки.

В качестве еще одного приложения результатов §2.1 и §2.2, в §2.7 мы построим функцию Беллмана в задаче о равномерной выпуклости.

§3 посвящен связи между K- и J-замкнутости наборов пространств типа Харди. В §3.1 мы вводим необходимые определения и сведения, где мы также ставим вопрос про J-замкнутость конечного набора квазибанаховых решеток при некотором дополнительном условии. В следующих трех параграфах (см. соответственно §3.2, §3.3 и §3.4) мы предъявляем три разных доказательств данного утверждения при разных условиях на конечный набор квазибанаховых решеток.

В §4 речь идет про исправлении функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье. В §4 мы сформулируем основную теорему, в §4.3 обсудим формулировку, а в §4.4 приведем доказательство.

Список литературы

[1] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), no. 3, 396–414.

[2] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p*, Ark. Mat. 3 (1956), 239–244.

[3] N. Boros, P. Janakiraman, A. Volberg, *Perturbation of Burkholder's martingale transform and Monge–Ampère equation*, Adv. Math. Volume 230, Issues 4–6, July–August 2012, Pages 2198–2234

[4] V. Vasyunin, A. Volberg, *Burkholder's function via Monge-Ampère equation,* Illinois Journal of Mathematics 54 (2010), no. 4, 1393–1428.

[5] D. Burkholder, *Boundary value problem and sharp inequalities for martingale transforms,* Ann. Probab. 12 (1984), 647–702.

[6] K. P. Choi, *A sharp inequality for martingale transforms and the unconditional basis constant of a monotone basis in Lp(0,1)*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), no. 2, 509–529.

[7] С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций*, Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.

[8] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1950.

[9] S. V. Kislyakov, Q. Xu, *Interpolation of weighted and vector valued Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 343, (1994), No. 1, 1–34.

[10] С. В. Кисляков, *Новая теорема об исправлении*, Изв. АН СССР, сер. матем., **48** **2**, (1984), 305–330.

[11] С. В. Хрущев, *Теорема Меньшова об исправлении и гауссовские процессы*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **155** (1981), 151–181.

[PIOSVZ] P. Ivanisvili, D. M. Stolyarov, N. N. Osipov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO,* to appear in Transactions of the American Mathematical Society.

[PI1] P. Ivanisvili, *Bellman function approach to the sharp constants in uniform convexity.* arxiv.org/abs/1402.4690 (2014)

[PI2] P. Ivanisvili, *Burkholder's martingale transform* arxiv.org/abs/1402.4751 (2014)

[PISZ] P. Ivanisvili, D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Bellman VS Beurling: Sharp estimates of uniform convexity for L^p spaces.* preprint: arxiv.org/abs/1405.6229 (2014)

Публикации автора по теме диссертации

[PI3] П. Иванишвили, *J-замкнутость конечных наборов пространств типа Харди,* Зап. научн. сем. ПОМИ **401** (2012), 82-92.

[PIOSVZ1] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on BMO,* Comptes Rendus Mathematique, Volume 350, Issues 11-12, June 2012, Pages 561–564.

[PIKI] П. Иванишвили, С. В. Кисляков, *Исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье*, Зап. научн. сем. ПОМИ **376** (2010), 25–47.