На правах рукописи

Дружинин Андрей Эдуардович

Теоремы о гомотопической инвариантности и этальном вырезании для предпучков с $Witt$-трансферами

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014 г.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель: чл-кор. РАН, доктор физико-математических наук, профессор Панин Иван Александрович

Официальные оппоненты:

Гордеев Николай Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры ФГБОУ ВПО «Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена»

Попов Сергей Юрьевич, кандидат физико-математических наук, учитель математики муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения Гимназии №1, г. Самара

Ведущая организация: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 3 декабря 2014 г. в 17.30 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН) по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, http//www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «   »____________2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.02
доктор физ.-мат. наук   Андрей Валерьевич Малютин

0.1 Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная диссертация является частью решения задачи по построению триангулированной категории $DWM(k)$, называемой категорией $Witt$-мотивов, и доказательству её основных свойств. Теории когомологий строящиеся по ней будут наделены действием кольца Витта квадратичных пространств над основным полем. Роль и место этой категории видны из следующей гипотетической картинки. Стабильная мотивная гомотопическая категория Воеводского $SH(k)$ снабжена естественной инволюцией. Поэтому рационально она разбивается в прямую сумму двух категорий $SH(k)^+$ и $SH(k)^-$. Согласно теореме Мореля категория $SH(k)^+$ эквивалентна рациональной категории мотивов Воеводского $DM(k)_{\mathbb{Q}}$. Ожидается, что категория $SH(k)^-$ эквивалентна рациональной категории $Witt$-мотивов $DWM(k)_{\mathbb{Q}}$.

Это одна из причин, почему И.А. Паниным была поставлена задача построить категорию $Witt$-мотивов по образцу конструкции Воеводского для категории мотивов $DM(k)$. Построить и доказать её основные свойства. Другая причина в том, что должен быть естественный функтор

$$R_W : SH(k) \to DWM(k),$$

который является алгебраическим аналогом функтора вещественной реализации. (Функтор $SH(k) \to DM(k)$ следует рассматривать как алгебраический аналог функтора комплексной реализации.) Наконец, третья причина в том, что построение $Witt$-мотивов и решение связанных с этим задач — это отличный полигон для изучения оснащенных соответствий Воеводского (здесь многое упрощается, но не все, и возникает возможность нахождения правильных формулировок и методов работы с оснащенными соответствиями).

Недавно выяснилось, что в построении категории $Witt$-мотивов заинтересован М. Левин (один из главных экспертов по A^1-гомотопиям и их приложениям). Кроме того, родственной темой занялись П. Остваер (Норвегия), Ж. Фазель (Швейцария). Наконец, выяснилось, что имеется тесная гипотетическая связь $Witt$-мотивов с линейными оснащенными мотивами из работы Г. Гаркуши и И. Панина.

Цель работы.

Сконструировать категорию Witt-соответствий над полем k, называемую категорией $Wor(k)$. Ввести с её помощью понятие предпучка с Witt-трансферами и понятие пучка Нисневича с Witt-трансферами.

Пройти «половину расстояния» на пути к доказательству теоремы о том, что для гомотопически инвариантного предпучка G с $Witt$-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $G^{\sim}$ сам снабжен $Witt$-трансферами и что предпучки когомологий $Y \mapsto H^p_{Nis}(Y, G^{\sim})$ гомотопически инвариантны. Роль этой теоремы в том, что она лежит в основе проверки всех базовых свойств категории $DWM(k)$ Witt-мотивов, определяемой ниже в этом разделе автореферата.

Показать, что категория $SN_{witt}Tr(k)$ пучков Нисневича с Witt-трансферами является абелевой категорией. Определить категорию $DWM(k)$ Witt-мотивов как полную подкатегорию производной категории $DSN_{witt}Tr(k)$ абелевой категории $SN_{witt}Tr(k)$, состоящую из таких комплексов $A^{\bullet}$, все пучковые когомологии $h^i(A^{\bullet})$ которых являются гомотопически инвариантными пучками Нисневича (с Witt-трансферами).

Методы исследований.

Для доказательства свойств предпучков с $Witt$-трансфервами использовался принцип, на основе которого Воеводским были доказаны свойства предпучков с трансферами, задаваемыми соответствиями Cor, заключающийся в явном построении некоторых соответствий, которые индуцируют необходимые отображения между группами сечений предпучков. Так, для доказательства свойства инъективности строится соответствие, задающее морфизм с точностью до гомотопии обратный слева к вложению многообразий, а для доказательства изоморфизмов этального вырезания и вырезания на аффинной прямой конструируются соответствия, задающие обратный с точностью до гомотопии морфизм между парами многообразий.

Построение этих соответствий осуществляется методами алгебраической геометрии, а именно, для получения искомых элементов групп Витта, задающих соответствия, использовались специальные согласованные сечения некоторых линейных расслоений на относительных проективных многообразиях и связь групп

Витта с каноническими классами многообразий. Построение требуемых сечений основано на двух принципах: принципа общего положения и принципа продолжения сечения, заданного на замкнутом подмногообразии. Используемые методы подобны тем, что были применены для построения категории мотивов DM^{-}, с тем отличаем, что конструируемые соответствия должны быть наделены согласованными ориентациями, что требует перехода от выбора регулярных функций на аффинных многообразиях к выбору сечений линейных расслоений и обеспечению большей их согласованности, а также некоторым дополнительным деталям.

Основные результаты работы.

- Доказательство того, что пучок, ассоциированный с гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$-трансферами, является гомотопически инвариантным и имеет $Witt$-трансферы.
- Доказательство изоморфизма вырезания по Зарисскому на аффинной прямой для гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами.
- Доказательство изоморфизма этального вырезания для гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Данная диссертация является частью решения задачи по построению триангулированной категории $DWM(k)$, называемой категорией $Witt$-мотивов, и доказательству её основных свойств.

Диссертация имеет теоретическую ценность. Публикация [2] уже привлекла внимание таких лидеров в теории А1-гомотопий, как Марк Левин (Германия) и Пол Остваер (Норвегия). Методы, развитые в диссертации, уже использованы для изучения предпучков с оснащенными трансферами. Последнее чрезвычайно полезно для вычислений в стабильной мотивной гомотопической категории Воеводского. Кроме того, результаты диссертации позволят в ближайшее время доказать основные свойства категории Witt-мотивов, сконструированной в диссертации.

Также в данной работе для доказательства свойств предпучков с $Witt$-трансферами были развиты методы построения $Witt$-соответствий, которые могут быть использованы и для других видов не ориентированных соответствий.

Роль автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация работы. Результаты диссертации излагались в 2014 г. на заседаниях следующих семинаров:

- Семинар лаборатории П.Л. Чебышёва по A1-топологиии и K-теории, проводимый И.А. Паниным (СПбГУ);
- Санкт-Петербургский алгебраический семинар имени Д.К. Фаддеева (ПОМИ РАН);
- Петербургский топологический семинар им. В.А. Рохлина (ПОМИ РАН).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх печатных работах автора [1]-[4], две из которых, [1] и [2], вышли в журналах, входящих в список ВАК.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 74 страницы. Список литературы включает 13 наименований на 2-х страницах.

0.2 Содержание диссертации

Введение содержит обоснование актуальности работы и описание её содержания. Формулируется задача по построению категории $Witt$-мотивов, частью решения которой является данная работа. Описывается метод построения категории $Witt$-мотивов и описываются её ожидаемые свойства, а также характеризуется роль данной работы в построении этой категории и доказательстве некоторых её свойств. Наконец, указывается связь категории $Witt$-мотивов с категорией $SH(k)^{-}$.

В первом параграфе главы 1 определяется категория конечных Witt-соответствий $Wor(k)$, с помощью которой определяется, что такое предпучок с $Witt$-трансферами и что такое пучок Нисневича с $Witt$-трансферами.

Более подробно, объекты категории $Wor(k)$ — это гладкие многообразия над k. Група морфизмов $Wor(X,Y)$ определяется следующим образом (детали даны в Определениях 4, 7 и 8 из текста диссертации). Рассматривается категория $P(X,Y)$ конечнопорожденных $k[X\times Y]$-модулей, которые конечно порождены и проективны как $k[X]$-модули. На этой категории имеется инволюция $*$. А именно, если $P\in P(X,Y)$, то по определению $P^*=Hom_{k[X]}(P,k[X])$. Действие $k[Y]$ на P^* индуцировано действием $k[Y]$ на P. Квадратичное пространство в категории $P(X,Y)$ с инволюцией $*$ — это пара $(P,\phi: P\cong P^*)$, в которой ϕ — симметрический изоморфизм $k[X\times Y]$-модулей. *Группа* $Wor(X,Y)$ *— это, по определению, группа Витта классов изоморфизма квадратичных пространств в категории* $P(X,Y)$ *с инволюцией* $*$. Другими словами, $Wor(X,Y)$ это факторгруппа

$$\frac{GW(P(X,Y),*)}{N(P(X,Y),*)}$$

группы Гротендика полугруппы симметрических квадратичных пространств в аддитивной категории с инволюцией $(P(X,Y),*)$ по подгруппе, порожденной метаболическими пространствами.

Композиция морфизмов $(P,\phi)\in Wor(X,Y)$ и $(Q,\psi)\in Wor(Y,Z)$ определяется как $(P\otimes_{k[Y]}Q,\phi\otimes\psi)\in Wor(X,Z)$. Тождественный морфизм X в себя — это пара $(k[X],id_{k[X]})$, где $k[X]$ рассматривается как $k[X\times X]$ естественным образом. Кроме того, имеется функтор $i: SmAff/k\to Wor(k)$ из категории гладких аффинных k-многообразий в категорию $Wor(k)$. Он определяется просто (с использованием графика; см. Замечание 3 в тексте диссертации).

Следующие определения вводят основные объекты изучения данной диссертации.

Определение 1 (Предпучок и пучок с $Witt$-трансферами) *Предпучком абелевых групп с* $Witt$*-трансферами называется контравариантный функтор*

$$F\colon Wor(k)\to Ab,$$

удовлетворяющтий условию аддитивности на дизъюнкных объединениях, т.е. такой, что $\mathscr{F}(X_1\coprod X_2)=\mathscr{F}(X_1)\oplus\mathscr{F}(X_2)$. *Пучком Нисневича с* $Witt$*-трансферами называется такой предпучок* F *с* $Witt$*-трансферами, что его ограничение на* Sm_k *является пучком Нисневича. Т.е.* $F\circ i: Sm_k\to Ab$ *— пучок Нисневича. Аналогично определяется пучок Зарисского с* $Witt$*-трансферами.*

Определение 2 (гомотопичекая инвриантность) *Гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$-трансферами называется предпучок абелевых групп с $Witt$-трансферами $\mathcal{F} : Wor(k) \to Ab$, такой, что для любого гладкого аффинного многообразия X имеем $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1)$.*

Теперь уместно перечислить основные результаты диссертации.

Теорема Б. *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$ гомотопически инвариантен.*

Эта теорема говорит, в частности, что $Witt$-мотив $M^W(Y)$ любого гладкого многообразия Y действительно лежит в категории $DWM(k)$, т.е. является мотивным комплексом. Согласно нумерации диссертации — это теорема 6.

Доказательство теоремы Б основано, в свою очередь, на серии из нескольких теорем, каждая из которых интересна и важна сама по себе.

Теорема В. *Пусть $U \subset V$ — пара вложенных открытых по Зарисскому подмножеств $\mathbb{A}^1_K$. Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами. Тогда отображение ограничения*

$$\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

инъективно.

Согласно нумерации диссертации — это теорема 2.

Эта теорема дает возможность, в частности, удобно сформулировать следующий результат:

Теорема Г (вырезание на аффинной прямой). *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, тогда для поля K, являющегося полем частных некоторого многообразия и двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в $\mathbb{A}^1_K$*

$$i^* \colon \frac{\mathscr{F}(V - z)}{\mathscr{F}(V)} \to \frac{\mathscr{F}(U - z)}{\mathscr{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Согласно нумерации диссертации — это теорема 3. Следствием теорем В и Г является то, что гомотопически инвариантный предпучок $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами при ограничении на аффинную прямую становится пучком Зариского на ней. Согласно одной теореме об инъективносити на локальных схемах, доказанной К. Чепуркиным для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами и точки x (не обязательно замкнутой) гладкого аффинного многообразия X гомоморфизм $\mathscr{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathscr{F}(k(X))$ инъективен. Это позволяет в удобной форме сформулировать следующий результат.

Теорема Д. (этальное вырезание в размерности 1).

Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, и $\pi\colon X' \to X$ — этальный морфизм гладких кривых над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $z \in X$ — замкнутая точка, такая, что $\pi^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем z', и индуцированный на полях вычетов этих точек гомомофизм является изоморфимом. Тогда π индуцирует изоморфизм

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-z')}{\mathscr{F}(U')},$$

где $U = Spec(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = Spec(\mathcal{O}_{X',z'})$.

Согласно нумерации диссертации — это теорема 5.Следствием теорем В, Г и Д является то, что для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}^{\sim}$ обладает следующим свойством: его значение на любом открытом по Зарисскому подмножестве U аффинной прямой равно значению на U исходного предпучка, т.е. $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_{Nis}^{\sim}(U)$. Это свойство вместе с упомянутой выше теоремой об инъективносити на локальных схемах и приводит быстро к доказательству теоремы Б.

Теорема А. *Для произвольного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами, существует единственная структура предпучка с $Witt$-трансферами на ассоциированном пучке в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$, такая, что канонический гомоморфизм $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_{Nis}$ является гомоморфизмом предпучков с $Witt$-трансферами.*

Эта теорема говорит, что категория пучков Нисневича с трансферами абелева. Согласно нумерации диссертации — это теорема 8.

Имеется ещё ряд результатов, которые понадобятся для доказательства в будущем теоремы о гомотопической инвариантности когомологий гомотопически инвариантного пучка с $Witt$-трансферами. Это теоремы Е и Ж. Теорема Е — это специальный случай вырезания по Зарискому на аффинной прямой над локальной базой. Согласно нумерации диссертации — это теорема 7. Теорема Ж — это этальное вырезание в размерности n для любого n. Согласно нумерации диссертации — это теорема 9.

0.3 Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах:

1. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании// Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т.423. С. 113-125.

2. Дружинин А.Э. О гомотопически инвариантных предпучках с $Witt$-трансферами// Успехи математических наук. 2014. Т.69, № 3, С. 181-182.

0.4 Другие публикации автора:

3. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании в топологии Зарисского// Препринты ПОМИ РАН. 2014. Препринт 7/2014.

4. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании в топологии Нисневича// Препринты ПОМИ РАН. 2014. Препринт 8/2014.