На правах рукописи

ЧИЧЕРИН
Дмитрий Игоревич

О квантовых интегрируемых спиновых цепочках с бесконечномерным пространством состояний

Специальность 01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2014

Работа выполнена в лаборатории математических проблем физики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН

Деркачёв Сергей Эдуардович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ

доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории статистической физики отдела электроники органических материалов и наноструктур ФГБУН Института биохимической физики имени Н. М. Эмануэля РАН

Забродин Антон Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной физики Физического факультета ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Цыганов Андрей Владимирович

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (МИАН)

Защита диссертации состоится "____"__________ 2014 г. в ____ часов на заседании совета Д 002.202.01 в ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан "____"__________ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Модель интегрируемой спиновой цепочки естественным образом возникает при исследовании многих физических проблем. Первым историческим примером было решение Ганса Бете (1931 г.) антиферромагнитной модели Гейзенберга. Позднее анзатц Бете был переформулирован в алгебраических терминах в рамках Квантового метода обратной задачи [1]. На начальных этапах акцент делался на случае конечномерных представлений в локальных квантовых пространствах, что имеет непосредственное приложении в теории конденсированного состояния. Несмотря на то, что спиновые цепочки – 2-мерные физические системы, они нашли неожиданные приложения в 4-мерных квантовых неабелевых калибровочных теориях поля, в частности при исследовании высокоэнергетической асимптотики амплитуд рассеяния в КХД [2], при нахождении спектра аномальных размерностей составных операторов. При этом необходимы цепочки для бесконечномерных и, в частности, для непрерывных представлений.

В работе [3], посвящённой вычислению статсуммы 8-вершинной модели, Бакстером был сформулирован метод Q-оператора. По сравнению с анзатцем Бете, метод Q-оператора применим для более широкого класса моделей, в частности, для систем с бесконечномерным пространством состояний в каждом узле цепочки. Поэтому поиск новых решений уравнения Янга–Бакстера и Q-операторов для бесконечномерных представлений имеет важное значение для многих современных проблем теоретической и математической физики и тесно связан с теорией представлений алгебры симметрии спиновой цепочки. Стоит отметить, что интегрируемые конструкции для некомпактной XYZ цепочки важны при исследовании представлений алгебры Склянина [4].

Научная новизна и практическая значимость. В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Предложена единая конструкция операторов Бакстера на основе сплетающих операторов, которая охватывает все стандартные типы деформаций алгебры $s\ell_2$. Найдены свойства сплетающих операторов, которые верны для всех типов деформаций, а значит присущи структуре интегрируемых моделей. Все свойства Q-операторов единообразно получены из соотношений сплетания для составляющих их локальных блоков.

- Предложено несколько конструкций операторов Бакстера для конечномерных представлений $s\ell_2$ на основе построений для бесконечномерных представлений. Это позволило получить новые явные формулы для Q-операторов на пространстве полиномов.

- Найдено общее решение уравнения Янга–Бакстера с симметрией модулярного дубля в форме интегрального оператора. Построение выполнено двумя способами: при помощи сплетающих операторов для вырожденных L-операторов, и при помощи операторного представления симметрической группы на множестве параметров 2-узловой монодромии, – и прослежена связь двух подходов. Исследованы вырождения общего R-оператора, показано, что все другие известные решения уравнения Янга–Бакстера для модулярного дубля выводятся из общего R-оператора.

- Найдены эффективные формулы редукции общего R-оператора на конечномерные инвариантные подпространства для алгебры $s\ell_2$, её эллиптической деформации и для модулярного дубля.

- Предложена формулировка Янгиана для (псевдо)ортогональных алгебр при помощи спинорной R-матрицы и найдено его нетривиальное бесконечномерное представление. Построен общий R-оператор для конформной алгебры n-мерного Евклидова пространства, заданный на тензорном произведении двух скалярных дифференциальных представлений, параметризуемых конформным весом. В случае 4-мерного Евклидова пространства построен общий R-оператор для дифференциальных представлений с нетривиальной конечномерной частью, отвечающей лоренцевой подалгебре. Найдено обобщение скалярного операторного и интегрального соотношений звезда-треугольник на случай безмассовых полей произвольных спинов.

Найденные R-операторы и Q-операторы имеют потенциальное приложении для интегрируемых моделей, связанных с 4-мерными квантовыми калибровочными теориями поля; в частности, при изучении Янгианной симметрии амплитуд рассеяния в теории супер–Янга–Миллса $\mathcal{N} = 4$ и при поисках высших симметрий других динамических величин.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Для периодических однородных спиновых цепочек с алгеброй симметрии ранга один: $s\ell_2$, её тригонометрическая и эллиптическая деформации, – построены операторы Бакстера в случае бесконечномерных представлений в каждом локальном квантовом пространстве цепочки. Найдены явные формулы для действия Q-операторов на производящую функцию векторов состояний спиновой цепочки.

- Получен набор операторов Бакстера для периодической компактной $s\ell_2$-симметричной спиновой цепочки при помощи спуска от бесконечномерных представлений к конечномерным. Найдены формулы для действия Q-операторов на пространство полиномов в случае произвольных конечномерных представлений.

- Найден общий R-оператор для модулярного дубля. Получены формулы редукции общего R-оператора для модулярного дубля и эллиптической деформации $s\ell_2$, заданного на тензорном произведении двух бесконечномерных представлений, на произвольное инвариантное конечномерное подпространство в одном из тензорных сомножителей.

- Построен общий R-оператор для конформной алгебры n-мерного Евклидова пространства для представлений на скалярных полях и в случае 4-мерного Евклидова пространства для представлений на тензорных полях произвольного ранга. Получено обобщение скалярного соотношения звезда-треугольник в 4-мерии на случай тензоров произвольного ранга.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на заседаниях научного семинара по квантовой теории поля в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, на семинаре *Groupes de Lie et espaces des modules* математического факультета Университета Женевы, на семинаре математического факультета Высшей школы экономики, на семинаре отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН. Результаты диссертации докладывались на конференции "Квантовый и классический методы обратной задачи" (С-Петербург, 19–21 декабря 2012 г.) и на международной конференции "Суперсимметрия и квантовые симметрии – SQS 2013" (Дубна, 29 июля – 3 августа 2013 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в шести статьях в рецензируемых журналах [Ч1, Ч2, Ч3, Ч4, Ч5, Ч6] из Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. При подготовке к публикации полученных с соавторами результатов участие диссертанта было определяющим на всех этапах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и приложения. Общий объем диссертации 254 страницы, включая 19 рисунков. Библиография включает 143 наименования.

2. Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Кроме того, во введении даётся обзор содержания последующих глав работы, кратко формулируются базовые идеи, лежащие в основе исследованных конструкций и проведённых вычислений, схематично излагаются результаты. Также приводятся базовые определения и конструкции Квантового метода обратной задачи и метода оператора Бакстера с обзором литературы по данной тематике.

В первой главе исследуются периодические однородные спиновые цепочки с недеформированной, тригонометрически и эллиптически деформированной алгеброй симметрии ранга один. Акцент сделан на изучение моделей с бесконечномерным пространством состояний в каждом локальном квантовом пространстве. Выполнено систематическое построение общих трансфер-матриц $\mathrm{T}(u)$ и операторов Бакстера $\mathrm{Q}_1(u)$, $\mathrm{Q}_2(u)$ в виде следов матриц монодромий по вспомогательному бесконечномерному пространству V_0 представления спина $s \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{T}_s(u) = \mathrm{tr}_0\, \mathbb{R}_{10}(u) \cdots \mathbb{R}_{N0}(u) \ \ ; \ \ \mathrm{Q}_i(u) = \mathrm{tr}_0\ \mathbb{R}^i_{10}(u) \cdots \mathbb{R}^i_{N0}(u) \ \ , \ \ i = 1, 2\,.$$

Для них выведены соотношения коммутации и факторизации

$$\mathrm{P}\,\mathrm{T}_s(u) = \mathrm{Q}_1(u+s+1)\,\mathrm{Q}_2(u-s) = \mathrm{Q}_2(u-s)\,\mathrm{Q}_1(u+s+1)$$

(P – циклический сдвиг) на основе локальных соотношений для строительных блоков $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ матриц монодромий, которые в свою очередь получены из соотношений Янга–Бакстера и ему подобных. В качестве локальных строительных блоков использованы факторы общего решения уравнения Янга–Бакстера, т.е. общий R-оператор и операторы R^1, R^2: $\mathrm{R} \sim \mathrm{R}^1\mathrm{R}^2 \sim \mathrm{R}^2\mathrm{R}^1$. Здесь и далее используем две версии операторов Янга–Бакстера, которые связаны $\mathbb{R}_{12} = \mathrm{P}_{12}\mathrm{R}_{12}$ оператором перестановки P_{12} пары тензорных сомножителей. Они построены из операторов $\mathrm{S}^i(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, v_1, v_2)$, элементарных перестановок параметров представлений 2-узловой монодромии,

$$\mathrm{S}^i(\mathbf{u})\,\mathrm{L}_1(u_1,u_2)\,\mathrm{L}_2(v_1,v_2) = \mathrm{L}_1(u_1',u_2')\,\mathrm{L}_2(v_1',v_2')\,\mathrm{S}^i(\mathbf{u}) \;\;;\;\; s^i\mathbf{u} = (u_1',u_2',v_1',v_2')\,.$$

Операторы $\mathrm{S}^i(\mathbf{u})$ образуют представление симметрической группы $\mathfrak{S}_4$, из чего следует набор локальных соотношений типа Янга–Бакстера для $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$. Основные свойства и соотношения между этими блоками идентичны во всех случаях, однако явные выражения для них усложняются при каждой дополнительной деформации алгебры симметрии, что связано с усложнением специальных функций типичных в теории представлений соответствующей алгебры. Такая формулировка позволяет легко перейти от недеформированной симметрии к деформированной, объединив их в рамках одной схемы.

Соотношение Бакстера для трёх типов деформаций

$$\mathrm{t}(u)\,\mathrm{Q}_i(u) = \kappa^{-N}\,\mathrm{Q}_i(u+\delta) + \kappa^N\,\Delta^N(u_1,u_2)\,\mathrm{Q}_i(u-\delta) \;\;,\;\; i=1,2\,,$$

где постоянные κ, δ и функция Δ зависят от модели, получается из локального соотношения, заданного на тензорном произведении $\mathbb{C}^2 \otimes V_k \otimes V_0$, т.е. в k-ом и вспомогательном 0-ом узле цепочки,

$$\mathrm{Z}_0^{-1}\cdot\mathbb{R}^2_{k0}(u)\,\mathrm{L}_k(u_1,u_2)\cdot\mathrm{Z}_0 = \begin{pmatrix} \kappa^{-1}\cdot\mathbb{R}^2_{k0}(u+\delta) & \cdots \\ 0 & \kappa\,\Delta(u_1,u_2)\cdot\mathbb{R}^2_{k0}(u-\delta) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где Z_0 обозначает матрицу в паре вспомогательных пространств $\mathbb{C}^2 \otimes V_0$. Это соотношение в свою очередь получено из локального соотношения типа Янга–Бакстера (RLL-соотношение) для оператора $\mathbb{R}^2$. Вывод (1) следует общей схеме для трёх типов деформаций и не использует явного вида $\mathbb{R}^2$, только общие свойства его факторов S^i.

Из соотношений типа Янга–Бакстера для локальных строительных блоков $\mathbb{R}^2$ получены формулы для действия оператора Бакстера на производящую функцию векторов состояний однородной спиновой цепочки, в локальных квантовых пространствах которой реализованы представления спина ℓ, в случае $s\ell_2$, в случае её тригонометрической деформации

$$\mathrm{Q}(u)\cdot\prod_{i=1}^{N}\frac{(q^{-2\ell}\,\lambda_i\,z_i;q^2)}{(q^{+2\ell}\,\lambda_i\,z_i;q^2)}=\prod_{i=1}^{N}\frac{(q^{-u-\ell}\,\lambda_i\,z_i,q^{+u-\ell}\,\lambda_{i+1}\,z_i;q^2)}{(q^{+u+\ell}\,\lambda_i\,z_i,q^{-u+\ell}\,\lambda_{i+1}\,z_i;q^2)}\,,$$

где $(x;q)$ – стандартное q-произведение, и для эллиптической деформации

$$\mathrm{Q}(u)\cdot\prod_{i=1}^{N}\Gamma(\mp z_i\mp\lambda_i+2\eta\ell+\eta+\frac{\tau}{2})=$$

$$=\prod_{i=1}^{N}\Gamma(\mp z_i\mp\lambda_i+\frac{u}{2}+\eta\ell+\eta+\frac{\tau}{2})\,\Gamma(\mp z_i\mp\lambda_{i+1}-\frac{u}{2}+\eta\ell+\eta+\frac{\tau}{2})\,,$$

где $\Gamma(\mp z_1\mp z_2)\equiv\Gamma(z_1+z_2)\Gamma(-z_1+z_2)\Gamma(z_1-z_2)\Gamma(-z_1-z_2)$ – произведение эллиптических Γ-функций с квазипериодами 2η и τ.

Выполнена редукция общего R-оператора на конечномерное инвариантное подпространство для алгебры $s\ell_2$ и её эллиптической деформации, показано, как восстановить L-оператор. Соответствующие формулы аналогичны случаю модулярного дубля (3), исследованному в главе 3.

Результаты первой главы опубликованы в работах [Ч1, Ч2].

Во второй главе предложено несколько альтернативных конструкций Q-операторов в случае конечномерных представлений $s\ell_2$. Рассматривается недеформированная алгебра, поскольку в этом случае локальные строительные блоки имеют более простой вид, что позволяет получить множество явных формул, в целом же конструкция применима и для тригонометрической деформации. Отметим, что нельзя описать конечномерные представления в квантовом пространстве попросту выбрав (полу)целое значение спина $\ell = {}^{n}/_{2}$, $n = 0, 1, 2\cdots$ в формулах главы 1. Тем не менее, при детальном исследовании предельных переходов в этих формулах, удалось описать произвольные конечномерные представления.

Для этого в качестве основного блока используется ограничение общего решения уравнения Янга–Бакстера $\mathbf{R}_{k0}\left(u|\frac{n}{2},s\right)$ на конечномерное инвариантное подпространство, из которого строится общая трансфер-матрица

$$\mathbf{T}_s(u) = \mathrm{tr}_0\; q^{z_0\partial_0}\,\mathbf{R}_{10}\left(u|\tfrac{n}{2},s\right)\mathbf{R}_{20}\left(u|\tfrac{n}{2},s\right)\cdots\mathbf{R}_{N0}\left(u|\tfrac{n}{2},s\right)\;.$$

Она факторизуется в произведение коммутирующих операторов $\mathbf{Q}_A$ и $\mathbf{Q}_B$, которые также имеют вид общих трансфер-матриц и строятся из операторов $\mathbf{R}^A_{k0}(u)$ и $\mathbf{R}^B_{k0}(u)$. Последние тесно связаны с $\mathbf{R}_{k0}\left(u|\frac{n}{2},s\right)$, являются его факторами и корректно определены на конечномерном подпространстве.

$$\mathbf{S}\,\mathbf{T}_s(u) = \mathbf{Q}_A(u+s+1)\,\mathbf{Q}_B(u-s) = \mathbf{Q}_B(u-s)\,\mathbf{Q}_A(u+s+1)\,.$$

Важно, что глобальные операторы наследуют свойство своих локальных блоков, т.е. они не выводят из конечномерного пространства состояний спиновой цепочки. Расходящиеся следы по бесконечномерному вспомогательному пространству регуляризованы квазипериодическими граничными условиями. Индексы A и B принимают значения $A,B=1,2$ или $A,B=+,-$ для двух различных конструкций конечномерных $\mathbf{Q}$-операторов. Первый случай – конечномерный вариант бесконечномерной конструкции из главы 1. Бесконечномерный вариант для второго случая указан в главе 2. Далее найдена связь между $\mathbb{R}^{1,2}$ при $\ell=\frac{n}{2}$ и $\mathbf{R}^{1,2}$, что позволило связать операторы Бакстера для бесконечномерных представлений $\mathrm{Q}_{1,2}$ при $\ell=\frac{n}{2}$ и конечномерные $\mathbf{Q}_{1,2}$ и получить для них явные формулы.

$$\mathbf{Q}_1(u)\Psi(\vec{z}) = \partial^n_{\lambda_1}\cdots\partial^n_{\lambda_N}\,\frac{\left(\bar{\lambda}_1\cdots\bar{\lambda}_N\right)^{\frac{n}{2}-u}}{1-q\bar{\lambda}_1\cdots\bar{\lambda}_N}\cdot\Psi(\Lambda_q^{-1}\vec{z})\Bigg|_{\lambda=0}\quad,\quad\bar{\lambda}\equiv 1-\lambda\;\;,$$

где $\Psi(\vec{z})$ – полином из конечномерного инвариантного пространства состояний, в матрице $\Lambda_q(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ только две ненулевых диагонали (с точностью до периодичности). Второй оператор Бакстера, применённый к производящей функции векторов состояния,

$$\mathbf{Q}_2(u)\cdot(1-x_1z_1)^n\cdots(1-x_Nz_N)^n=$$
$$=\mathrm{S}\cdot(1-\,x_1z_1)^{\frac{n}{2}-u}(1-x_1z_2)^{\frac{n}{2}+u}\cdots(1-x_Nz_N)^{\frac{n}{2}-u}(1-x_Nq^{-1}z_1)^{\frac{n}{2}+u}\,,$$

не выводит из подпространства за счёт подправки оператором S,

$$\mathrm{S}\Psi(\vec{z})=\partial^n_{\lambda_1}\cdots\partial^n_{\lambda_N}\;\frac{1}{\bar{\lambda}_1\cdots\bar{\lambda}_N}\,\frac{1}{1-q\bar{\lambda}_1\cdots\bar{\lambda}_N}\cdot\Psi(\Lambda_q^{-1}\vec{z}\,)\bigg|_{\lambda=0}\,.$$

Схожие формулы получены и во второй конструкции для $\mathbf{Q}_{+,-}$. В конце главы обсуждаются конечномерные $s\ell_2$-инвариантные операторы Бакстера.

Результаты второй главы опубликованы в работах [Ч2, Ч3].

В третьей главе Выполнено построение общего R-оператора для модулярного дубля в виде функции от набора Гейзенберговых пар (x и p) и в форме интегрального оператора. Ключевую роль при работе с модулярным дублем играет специальная функция

$$D_a(z)=e^{-2\pi iaz}\frac{\gamma(z+a)}{\gamma(z-a)}\,, \tag{2}$$

где γ – некомпактный квантовый дилогарифм с квазипериодами ω и ω' ($\omega''\equiv\omega+\omega'$). Самосогласованность конструкции обеспечивается интегральными тождествами для D (2). Общий R-оператор для представлений спина s_1, s_2

$$\mathrm{R}_{12}(u|s_1,s_2)=D_{u-(s_1+s_2)/2}(x_{12})\,D_{u+(s_1-s_2)/2}(p_2)\,D_{u-(s_1-s_2)/2}(p_1)\,D_{u+(s_1+s_2)/2}(x_{12})\,.$$

Далее исследованы вырожденные решения RLL- и RRR-уравнений. Получены эффективные формулы для редукции общего R-оператора на конечномерное инвариантное подпространство в одном из тензорных сомножителей. При $s_0=-\omega''-n\omega-m\omega'$ ($n,m\in\mathbb{Z}_+$) в пространстве представления модулярного дубля выделяется $(n+1)(m+1)$-мерное подпространство V_{s_0}, тогда

$$\mathbb{R}_{12}(u|s_0,s)\cdot D_{-\omega''-s_0}(x_{13})\,\Phi(x_2) = D_{u-\frac{s_0}{2}-\frac{s}{2}}(x_{12})\,D_{-u-\frac{s_0}{2}-\frac{s}{2}-\omega''}(x_{23})\times \tag{3}$$
$$\cdot\, D_{-\omega''-s_0}(p_2)\cdot D_{-u-\frac{s_0}{2}+\frac{s}{2}-\omega''}(x_{12})\,D_{u-\frac{s_0}{2}+\frac{s}{2}}(x_{23})\,\Phi(x_2) \quad ; \quad x_{ij}\equiv x_i - x_j\,.$$

Здесь $D_{-\omega''-s_0}(x_{13})$ служит производящей функцией (а x_3 – её параметром) для базиса в V_{s_0}, $D_{-\omega''-s_0}(p_2)$ – конечная сумма разностных операторов, Φ – функция из V_s. Аналогичная формула получена в первой главе для случая алгебры Склянина, где роль D (2) играет эллиптическая Г-функция.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [Ч4].

В четвёртой главе начинается исследование решений уравнения Янга–Бакстера с (псевдо)ортогональной (в частности конформной) алгеброй симметрии $so(d)$. Подробно рассмотрена числовая R-матрица, заданная на тензорном произведении двух спинорных представлений, которая строится при помощи гамма-матриц $\gamma_{a_1\cdots a_k}$в $SO(d)$-инвариантной форме

$$\mathrm{R}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{R}_k(u)}{k!}\,\gamma_{a_1\cdots a_k}\otimes\gamma^{a_1\cdots a_k}\,. \tag{4}$$

Известно, что она решает RLL-соотношение с L-оператором, заданном на тензорном произведении спинорного и фундаментального представлений. Здесь проверено, что она решает уравнение Янга–Бакстера на тензорном произведении трёх спинорных представлений, для чего применён метод производящих функций для алгебры Клиффорда, так что фермионная реализация R-матрицы (4) представлена как интеграл по вспомогательному параметру

$$\mathrm{R}(u)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\;x^{u-1}}{(1+x^2)^{u+\frac{d}{2}}}\left[a(u)\,\mathrm{As}\left(e^{x\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)+b(u)\,\mathrm{As}\left(e^{-x\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)\right] \tag{5}$$

от антисимметризованных (As) произведений образующих Γ_1^a и Γ_2^a ($a=1,2,\cdots,d$) двух копий алгебры Клиффорда. Блоки из (5) удовлетворяют локальному уравнению Янга–Бакстера

$$\begin{aligned}&(1-xy)^{-d}\,\mathrm{As}\left(e^{y\,\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)\,\mathrm{As}\left(e^{z\,\Gamma_2\cdot\Gamma_3}\right)\,\mathrm{As}\left(e^{x\,\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)=\\&=(1-x'y')^{-d}\,\mathrm{As}\left(e^{x'\Gamma_2\cdot\Gamma_3}\right)\,\mathrm{As}\left(e^{z'\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)\,\mathrm{As}\left(e^{y'\Gamma_2\cdot\Gamma_3}\right)\;,\end{aligned}\tag{6}$$

где параметры x, y, z и x', y', z' связаны системой уравнений

$$\frac{x+y}{1-xy}=\frac{z'\,(1+x'y')}{1-x'y'}\;,\quad\frac{z\,(1+xy)}{1-xy}=\frac{x'+y'}{1-x'y'}\;,\quad\frac{z\,(x-y)}{1-xy}=\frac{z'\,(x'-y')}{1-x'y'}$$

и служат координатами точек на алгебраической кривой. Тогда соотношение Янга–Бакстера для R-матрицы получается в результате интегрирования (6) с весовыми функциями из (5). Также показано, что R-матрица (4) и пара спинорных L-операторов, построенных из генераторов M_{ab} алгебры $so(d)$ в представлении T',

$$\mathrm{L}(u)=u+\frac{i}{4}\,\gamma_{ab}\otimes T'(M^{ab})\tag{7}$$

удовлетворяют RLL-соотношению при ограничении на антисимметризованный антикоммутатор $T'\left(\left\{M_{[ab}\,,M_{c]d}\right\}\right)=0$. Этот пример даёт нетривиальное представление Янгианной алгебры $Y(so(d))$, заданной RTT-соотношением со спинорным представлением в качестве вспомогательного пространства и спинорной R-матрицей (4).

Результаты четвёртой главы опубликованы в работе [Ч5].

В пятой главе исследуются уравнения Янга–Бакстера для бесконечномерных представлений конформной алгебры, и показано, как переносятся на этот случай методы, разработанные для $SL(2)$-симметричных цепочек. Выполнено построение общего R-оператора, определённого на тензорном произведении двух бесконечномерных представлений конформной алгебры Евклидова пространства $so(n+1,1)=\mathsf{conf}(\mathbb{R}^n)$, который решает RLL-соотношение с конформными L-операторами. Для n-мерного пространства построен R-оператор для скалярных представлений $\rho_{\Delta_1}\otimes\rho_{\Delta_2}$, а в частном случае 4-мерного пространства предъявлен R-оператор для весьма общего типа представлений $\rho_{\Delta_1,\ell_1,\dot{\ell}_1} \otimes \rho_{\Delta_2,\ell_2,\dot{\ell}_2}$ с нетривиальной спиновой частью лоренцевой подалгебры.

Конформная алгебра $\mathsf{conf}(\mathbb{R}^n)$ порождена генераторами лоренцевых вращений $L_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,\ldots,n-1)$, сдвигов P_μ, конформных бустов K_μ и дилатации D , которые удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям. Рассматривается представление алгебры на пространстве тензорных полей $\Phi^{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{2\dot{\ell}}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2\ell}}(x)$ типа $(\ell,\dot{\ell})$. Тензоры симметричны по набору точечных и бесточечных индексов, так что их можно записать в виде скалярного поля при помощи пары вспомогательных спиноров λ и $\tilde{\lambda}$

$$\Phi(x,\lambda,\tilde{\lambda}) = \Phi^{\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_{2\dot{\ell}}}_{\alpha_1\cdots\alpha_{2\ell}}(x)\,\lambda^{\alpha_1}\cdots\lambda^{\alpha_{2\ell}}\,\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}_1}\cdots\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}_{2\dot{\ell}}}\,.$$

В результате генераторы в конечномерном представлении лоренцевой подалгебры принимают вид дифференциальных операторов

$$\left[S_{\mu\nu}\Phi\right](x,\lambda,\tilde{\lambda}) = \left[\lambda\,\boldsymbol{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\lambda + \tilde{\lambda}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu\nu}\partial_{\tilde{\lambda}}\right]\Phi(x,\lambda,\tilde{\lambda})\,.$$

Методом индуцированных представлений строится дифференциальное представление $\rho_{\Delta,\ell,\dot{\ell}}$ конформной алгебры на пространстве тензорных полей,

$$\begin{aligned} &\rho(P_\mu) = -i\partial_{x_\mu} \equiv \hat{p}_\mu \ \ , \ \ \rho(D) = x^\mu\hat{p}_\mu - i\Delta\,, \qquad \rho(L_{\mu\nu}) = \hat{\ell}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ &\hat{\ell}_{\mu\nu} \equiv (x_\nu\hat{p}_\mu - x_\mu\hat{p}_\nu) \ \ , \ \ \rho(K_\mu) = 2\,x^\nu\,(\hat{\ell}_{\nu\mu} + S_{\nu\mu}) + (x^\nu x_\nu)\hat{p}_\mu - 2i\Delta x_\mu\,, \end{aligned} \tag{8}$$

Δ – конформный вес, что позволяет автоматически собрать дифференциальные операторы (8) в виде поляризованного оператора Казимира $M^{ab}\otimes M_{ab}$, взятого в тензорном произведении спинорного и дифференциального представлений,

$$\frac{1}{2}\gamma^{ab}\cdot\rho(M_{ab}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}+\mathbf{S}+\frac{i}{2}\rho(D)\,\mathbf{1} & \mathbf{p} \\ \overline{\mathbf{K}} & \overline{\mathbf{L}}+\overline{\mathbf{S}}-\frac{i}{2}\rho(D)\,\mathbf{1} \end{pmatrix}\,,$$

где блоки образованы матрицами Паули $||(\boldsymbol{\sigma}_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}||$ и $||(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}||$. Далее, согласно (7), строится конформный L-оператор, дающий точечное представление Янгиана $Y(so(n+1,1))$. Он допускает факторизованный вид

$$\mathrm{L}^{(\rho)}(u) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_+ \cdot \mathbf{1} + \mathbf{S} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & u_- \cdot \mathbf{1} + \overline{\mathbf{S}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{x} & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

В случае 4-мерного пространства показано, что (9) получается из L-оператора для $SL(4)$ заменой переменных. Это есть следствие изоморфизма $so(6,\mathbb{C}) = s\ell(4,\mathbb{C})$. Форма (9) играет ключевую роль в конструкции общего R-оператора из набора сплетающих операторов. Построение следует логической схеме предыдущих глав. Сначала решается RLL-соотношение

$$\mathrm{R}_{12}(u-v)\,\mathrm{L}_1(\mathbf{u}_+,\mathbf{u}_-)\,\mathrm{L}_2(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-) = \mathrm{L}_1(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-)\,\mathrm{L}_2(\mathbf{u}_+,\mathbf{u}_-)\,\mathrm{R}_{12}(u-v)\,,$$

где спектральный параметр u и три параметра $\Delta, \ell, \dot{\ell}$, задающие представление, собраны в комбинации

$$u_+ = u + \frac{\Delta_1 - n}{2}\,,\; u_- = u - \frac{\Delta_1}{2}\,,\; v_+ = v + \frac{\Delta_2 - n}{2}\,,\; v_- = v - \frac{\Delta_2}{2}$$

$$\mathbf{u}_+ \equiv \big(u_+\,,\,\ell_1\big)\,,\; \mathbf{u}_- \equiv \big(u_-\,,\,\dot{\ell}_1\big)\,,\; \mathbf{v}_+ \equiv \big(v_+\,,\,\ell_2\big)\,,\; \mathbf{v}_- \equiv \big(v_-\,,\,\dot{\ell}_2\big)\,,$$

а затем проверяется, что найденный R-оператор удовлетворяет RRR-соотношению Янга–Бакстера на тензорном произведении $\rho_{\Delta_1,\ell_1,\dot{\ell}_1} \otimes \rho_{\Delta_2,\ell_2,\dot{\ell}_2} \otimes \rho_{\Delta_3,\ell_3,\dot{\ell}_3}$. В интегральной форме общий R-оператор имеет вид

$$[\mathrm{R}_{12}\,\Phi](X_1;X_2) = \int \frac{\mathrm{d}^4q\,\mathrm{d}^4k\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z \;\; e^{i\,(q+k)\,x_{21}}\,e^{i\,k\,(y-z)}}{q^{2(u_- - v_+ + 2)} z^{2(u_+ - v_+ + 2)} y^{2(u_- - v_- + 2)} k^{2(u_+ - v_- + 2)}} \cdot$$

$$\cdot \Phi(x_1 - y\,,\,\lambda_2\,\mathbf{z}\,\overline{\mathbf{k}}\,,\,\tilde{\lambda}_2\,\overline{\mathbf{q}}\,\mathbf{y}\,;\,x_2 - z\,,\,\lambda_1\,\mathbf{q}\,\overline{\mathbf{z}}\,,\,\tilde{\lambda}_1\,\overline{\mathbf{y}}\,\mathbf{k}\,)\,.$$

Он явно лоренц-ковариантен и строится из более простых блоков, каждый из которых представляет элементарную перестановку на множестве $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$. Один из них – это сплетающий оператор эквивалентных представлений $\rho_{\Delta,\ell,\dot{\ell}} \sim \rho_{n-\Delta,\dot{\ell},\ell}$, ядро которого является конформной двухточечной функцией. Недостающий элемент симметрической группы получен из сплетающего оператора при помощи преобразования дуальной конформной симметрии $\mathbf{x} \to \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p} \to \mathbf{x}_{21}$. Уравнение Янга–Бакстера следует из соотношений Кокстера для сплетающих операторов, которые в свою очередь следуют из полученного обобщения скалярного операторного соотношения звезда-треугольник

$$\frac{\hat{p}^{\mu_1}\cdots\hat{p}^{\mu_m}}{\hat{p}^{\,2(a+m)}}\,\frac{\mathrm{A}_{\mu_1\nu_1}\cdots\mathrm{A}_{\mu_m\nu_m}}{x^{2(a+b+m)}}\,\frac{\hat{p}^{\nu_1}\cdots\hat{p}^{\nu_m}}{\hat{p}^{\,2(b+m)}} = \frac{x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_m}}{x^{\,2(b+m)}}\,\frac{\mathrm{A}_{\mu_1\nu_1}\cdots\mathrm{A}_{\mu_m\nu_m}}{\hat{p}^{2(a+b+m)}}\,\frac{x^{\nu_1}\cdots x^{\nu_m}}{x^{\,2(a+m)}}\,,$$

где $m = 0, 1, 2, \cdots$ и матрицы A: $\mathrm{A}_{\mu\nu}\,\mathrm{A}^{\mu}_{\ \lambda} = 0\ ,\ \mathrm{A}_{\nu\mu}\,\mathrm{A}^{\ \mu}_{\lambda} = 0\,.$

Результаты пятой главы опубликованы в работе [Ч6].

Список литературы

[1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи. I*, ТМФ **40** (1979), 194—220

[2] L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *High-energy QCD as a completely integrable model*, Phys. Lett. B **342** (1995), 311–322

[3] R. J. Baxter, *Partition function of the eight vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193–228

[4] Е. К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера*, Функц. анализ и его прил. **16** (1982), 27–34

Публикации автора по теме диссертации

[Ч1] D. Chicherin, S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Baxter operators with deformed symmetry*, Nucl. Phys. B **868** (2013), 652–683

[Ч2] D. Chicherin, S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Baxter operators for arbitrary spin*, Nucl. Phys. B **854** (2012), 393–432

[Ч3] D. Chicherin, S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Baxter operators for arbitrary spin II*, Nucl. Phys. B **854** (2012), 433–465

[Ч4] D. Chicherin, S. Derkachov, *The R-operator for a modular double*, J. Phys. A **47** (2014), 115203

[Ч5] D. Chicherin, S. Derkachov, A. P. Isaev, *The Spinorial R-matrix*, J. Phys. A **46** (2013), 485201

[Ч6] D. Chicherin, S. Derkachov, A. P. Isaev, *Conformal algebra: R-matrix and star-triangle relation*, JHEP **1304** (2013), 020