На правах рукописи

Смоленский Андрей Вадимович

Факторизации и ширина групп Шевалле над маломерными кольцами

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. **Вавилов Николай Александрович.**

Официальные оппоненты:
Ревин Данила Олегович, д-р физ.-мат. наук, доц., федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник;
Нестеров Владимир Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц., федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова», доцент.

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится 23 марта 2016 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, `http://pdmi.ras.ru`.

Автореферат разослан «____» ________________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В исследовании конечных простых групп типа Ли, полупростых групп Ли, арифметических групп, групп петель алгебраических групп и вообще линейных групп над кольцами малой размерности одним из традиционно вызывающих интерес вопросов является вопрос о ширине относительно какого-либо набора образующих. Шириной группы G относительно множества образующих X называется наименьшее натуральное число N, такое, что всякий элемент группы G представляется в виде произведения не более N элементов множества X и обратных к ним. Близким вопросом является задача о существовании факторизаций групп в терминах подгрупп (более общо, подмножеств) определенного типа: унипотентных, полупростых, параболических; а также задача построения кратчайшей такой факторизации.

В теории групп Шевалле над полями наиболее важным является *разложение Брюа* $\mathrm{G}(\Phi, F) = \mathrm{B}(\Phi, F)\, \mathrm{N}(\Phi, F)\, \mathrm{U}(\Phi, F)$. Над полулокальными кольцами его аналогом является *разложение Гаусса* [16] $\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{B}(\Phi, R)\, \mathrm{U}^-(\Phi, R)\, \mathrm{U}(\Phi, R)$. Это разложение в действительности выполнено над произвольным кольцом стабильного ранга 1, но не для всей группы, а для ее элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Phi, R)$, см. [6]. Кроме треугольной факторизации можно также рассматривать *унитреугольную факторизацию* длины 4: $\mathrm{E}(\Phi, R) = \mathrm{U}(\Phi, R)\, \mathrm{U}^-(\Phi, R)\, \mathrm{U}(\Phi, R)\, \mathrm{U}^-(\Phi, R)$, также имеющую место над произвольным кольцом стабильного ранга 1, см. [1]. Для конечных простых групп типа Ли в характеристике p унитреугольная факторизация превращается в разложение в произведение силовских p-подгрупп. М. Либеком и Л. Пибером [34] были получены факторизации длины 13 (также в работе Л. Бабаи, Н. Николова и Л. Пибера [19] была анонсирована оценка 5 множителей).

Над кольцами большей размерности роль треугольных факторизаций выполняют *параболические факторизации*, из которых наиболее известными являются два. Первое это *разложение Басса—Кольстера* $\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{G}(\Delta, R)\, \mathrm{U}(\Sigma, R)\, \mathrm{U}^-(\Sigma, R)\, \mathrm{U}(\Sigma, R)\, \mathrm{U}^-(\Sigma, R)$, где Δ и Σ это симметрическая и специальная части некоторого параболического множества корней $\Delta \cup \Sigma \subset \Phi$. Оно было впервые замечено в основополагающей работе Х. Басса [20] для полной линейной группы, а затем использовалось в вопросах сюръективной стабилизации K_1-функтора в работах М. Стайна [44], Е. Б. Плоткина [40], Л. Н. Васерштейна [11]. Второе — *разложение Денниса—Васерштейна*

$\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{P}_\alpha \, \mathrm{U}^-_{\alpha\beta} \, \mathrm{P}_\beta$, где P_α, P_β — максимальные параболические подгруппы, отвечающие простым корням α и β, а $\mathrm{U}^-_{\alpha\beta}$ — пересечение унипотентных радикалов параболических подгрупп, противоположных P_α и P_β. Оно было впервые использовано К. Деннисом [25] и Л. Н. Васерштейном [12], а затем В. ван дер Калленом [29], А. А. Суслиным и М. С. Туленбаевым [14] для решения задачи о сюръективной стабилизации K_2 и инъективной стабилизации K_1, см. также обобщающую их работу М. Кольстера [32]. Варианты этого разложения исследовались в работах Н. А. Вавилова и С. С. Синчука [8–10, 43]. Параболические факторизации имеют место для колец, удовлетворяющих определенным условиям стабильности, близким к условию стабильного ранга. Для колец стабильного ранга 2 возможны, тем не менее, унитреугольные факторизации большей длины, однако они зависят от арифметических свойств кольца. Так, например, группы Шевалле над $\mathbb{Z}[1/p]$ и $\mathbb{Z}$ удовлетворяют (см. [1, 17, 22, 47])

$$\mathrm{G}(\Phi, \mathbb{Z}[1/p]) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}, \qquad \mathrm{G}(\Phi, \mathbb{Z}) = \underbrace{\mathrm{U}\,\mathrm{U}^- \ldots \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-}_{\text{40 множителей}}.$$

Факторизация групп Шевалле над $\mathbb{Z}$ служит первым шагов в получении оценок на константу Каждана в работах М. Бургера [21], Й. Шалома [41], М. Кассабова [31] и У. Хадада [28]. Вычисление константы Каждана используется, в свою очередь, в получении оценки времени работы «алгоритма замены произведений», позволяющего генерировать случайные элементы конечных групп [35].

В общем же случае для колец стабильного ранга 2 никаких подобных разложений не существует. Это связано с тем, что существование унипотентной факторизации конечной длины эквивалентно *конечности ширины* по отношению к элементарным образующим $x_\alpha(\xi)$, а классический результат В. ван дер Каллена [30] показывает, что ширина $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}[x])$ бесконечна.

Естественно рассматривать и другие системы образующих. Так, например, элементарная подгруппа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ совершенна (за вычетом отдельных исключений в ранге 1 и 2), что позволяет изучать ее ширину относительно множества всех коммутаторов. К. Сёда показал [42], что каждый элемент специальной линейной группы над алгебраически замкнутым полем является коммутатором. Р. Томпсон установил [45], что над произвольным полем каждый элемент специальной линейной группы является произведением двух коммутаторов, и привел примеры элементов, не являющихся коммутаторами.

Множество работ посвященно коммутаторам в конечных простых группах типа Ли. Знаменитая гипотеза Оре [38] утверждает, что всякий элемент конечной простой группы является коммутатором. Доказательство этой гипотезы было завершено в работе М. Либека, Э. О'Брайена, А. Шалева и Ф. Х. Тьепа [39].

Для полей, содержащих по крайней мере 8 элементов, гипотеза Оре, как и связанная с ней гипотеза Томпсона о произведениях классов сопряженности, доказана в работах Э. Эллерса и Н. Л. Гордеева [26]. Там доказано, что в односвязных группах Шевалле над полем каждый нецентральный элемент является коммутатором, что сразу же дает коммутаторную ширину $\leqslant 2$. То, что центральный элемент не обязательно является коммутатором, известно в случае специальной линейной группы еще из работы Р. Томпсона [45]. После работ Э. Эллерса и Н. Л. Гордеева [23, 26] основным техническим средством в таких вопросах выступает разложение Гаусса с предписанной полупростой частью. Позже в работах Н. Л. Гордеева и Я. Саксла [27] и Н. Авни, Т. Геландера, М. Кассабова и А. Шалева [48] было обнаружено, что заменяя центр группы на полную конгруэнц-подгруппу, такой же результат можно получить и для групп над произвольным локальным кольцом.

В работе Л. Н. Васерштейна и Э. Уэланд [46] было показано, что над [не обязательно коммутативным] кольцом R стабильного ранга 1 всякий элемент $\mathrm{E}(n, R)$ является произведением двух коммутаторов элементов из $\mathrm{GL}(n, R)$, а в работе Ф. Арлингхауса, Л. Н. Васерштейна и Хонг Ю [18] аналогичные результаты были доказаны для четных гиперболических унитарных групп (включают симплектическую и четную ортогональную группу) при чуть более сильном предположении на кольцо. Как и в случае ширины по отношению к элементарным образующим, для колец стабильного ранга 2 в общем никаких подобных оценок не существует. Это показано в работе К. Денниса и Л. Н. Васерштейна [24].

Основой для получения оценок коммутаторной ширины в работах [18, 46] служат треугольные факторизации. После работы О. И. Тавгеня [15] стало ясно, что треугольные факторизации являются одной из техник редукции к группам меньшего ранга, наравне с параболическими факторизациями. Естественным образом встает вопрос о том, нельзя ли исключить в редукционных теоремах множители, не лежащие в подсистемных подгруппах. Исследованию подсистемных факторизаций посвящено на удивление мало работ, отметим некоторые результаты:

- По всей видимости, первым утверждением про подсистемные факторизации является теорема об углах Эйлера, которая устанавливает разложение компактной группы Ли $\mathrm{SO}(3)$ в произведение трех копий $\mathrm{SO}(2)$. Аналогичные разложения (длины не более 5) установлены в работе Т. Миясаки, О. Сюкудзавы и И. Йокоты [36] для $\mathrm{SU}(3)$, $\mathrm{Sp}(3)$ и компактных групп типов F_4, E_6 и E_7.
- В работе М. Либека, Н. Николова и А. Шалева [33] в связи с приложениями к построению однородных семейств графов-экспандеров исследуются так называемые SL_2-факторизации конечных простых групп типа Ли, то есть разложения в произведение подгрупп, изоморфных $\mathrm{SL}(2, R) \cong \mathrm{G}(\mathsf{A}_1, R)$. Обычно рассматриваются *фундаментальные* SL_2, то есть отвечающие корневым подгруппам. Для групп нормальных (нескрученных) типов в работе [33] установлена оценка в $5\,|\Phi^+|$ множителей. В работе Н. А. Вавилова и Е. И. Ковача [7] замечено, что в действительности из разложения Брюа сразу следует оценка $3\,|\Phi^+|$ множителей. Чуть более подробный анализ показывает, что правильным контекстом для таких вопросов являются группы над областями Безу. В той же работе доказано, что для $\mathrm{SL}(n, R) \cong \mathrm{G}(\mathsf{A}_{n-1}, R)$ имеет место факторизация длины $2\,|\Phi^+|$, и намечен путь для получения такой же оценки в остальных случаях, что для некоторых классических групп проделано в дипломной работе Е. И. Ковача [13].
- В работе Н. Николова [37] исследуются факторизации в терминах подгрупп типа A_n максимального ранга и для классических групп над конечными полями доказывается оценка в 200 множителей.

Цель работы. Целью работы является получение аналогов известных результатов о ширине и факторизациях для групп Шевалле над маломерными кольцами, обобщение таких результатов на исключительные групп и конгруэнц-подгруппы, а также уточнение существующих оценок ширины и длин факторизаций.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в дальнейшем исследовании структуры линейных групп, в вопросах теории конечных и арифметических групп.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, техника весовых диаграмм и вычислений с элементарными образующими, а также явные уравнения на орбиту вектора старшего веса.

Положения, выносимые на защиту.

1. Доказано, что всякая конечная простая группа типа Ли в характеристике p есть произведение четырех своих силовских p-подгрупп.
2. Получены оценки ширины главных конгруэнц-подгрупп групп Шевалле над различными кольцами относительно множества образующих типа z_α.
3. Получены близкие к оптимальным оценки ширины групп Шевалле над кольцами стабильного ранга 1 по отношению к множеству коммутаторов.
4. Построены факторизации групп Шевалле над эрмитовыми кольцами в терминах подгрупп, изоморфных SL_2, более короткие, чем все известные ранее.
5. Показано, что четная спинорная группа $\mathrm{Epin}(2\ell, R)$ над кольцом R стабильного ранга 2 есть произведение 9 своих подгрупп, изоморфных $\mathrm{E}(\ell, R)$.

Апробация работы. Результаты работы были изложены на следующих семинарах и конференциях: на Петербургском семинаре по алгебраическим группам (рук. проф. Н. А. Вавилов), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре имени Д. К. Фаддеева, на Московско-Петербургском семинаре по маломерной математике (рук. С. В. Дужин), на международных конференциях «Ischia Group Theory» (2012, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–6]. В том числе одна работа [3] опубликована в международном журнале, входящем в базу данных Web of Science, и одна работа [1] опубликована до 30.11.2015 в отечественном журнале, входящем в список ВАК (перечень от 19 февраля 2010 г. № 6/6).

Результаты написанных в соавторстве работ [1, 6] получены совместно с Н. А. Вавиловым, которому также принадлежит общее руководство работой и введение, кроме результатов, относящихся к группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, которые получены Сури Б.

Работа [2] написана в соавторстве. В ней автору принадлежат разделы 4.2, 4.3 и 5.1, а результаты разделов 3.2 и 5.2 получены совместно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 78 страниц. Список литературы включает 100 наименований на 7 страницах.

Содержание работы

Во **введении** освещаются история исследований ширины линейных групп и различные их факторизации, формулируются цели работы и основные результаты, приводится сравнение с известными результатами.

В **первой главе** напоминаются основные определения и конструкции, связанные с группами Шевалле, их представлениями и условиями стабильности. В разделе 1.1 определяются группы Шевалле, элементарные подгруппы и различные их элементы, конгруэнц-подгруппы и их элементарные аналоги. В разделе 1.2 даются определения, связанные с представлениями групп Шевалле, фиксируется нумерация весов представлений, даются явные формулы для элементарных корневых унипотентов в векторных представлениях классических групп, а также напоминаются уравнения на элемент орбиты старшего веса. В разделе 1.3 определяется условие стабильного ранга, вводится новое условие относительного абсолютного стабильного ранга, а также напоминаются определение эрмитовых колец и их свойства.

Вторая глава посвящена исследованию ширины элементарных подгрупп относительно естественных наборов образующих. В разделе 2.1 рассматривается ширина относительно множества элементарных корневых унипотентов. Точнее, исследуется вопрос о длине унитреугольной факторизации, который сводится к анализу групп малых рангов. Редукци ранга производится посредством теоремы О. И. Тавгеня

Теорема. *Пусть* $^\sigma\Phi$ *— (возможно скрученная) система корней, а* Δ_1 *и* Δ_2 *— две ее подсистемы, полученные выбрасыванием первого или последнего корня на диаграмме Дынкина системы* $^\sigma\Phi$*. Предположим, что соответствующие подсистемные подгруппы допускают унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{E}(\Delta_i) = \mathrm{U}(\Delta_i)\,\mathrm{U}^-(\Delta_i)\ldots\mathrm{U}^\pm(\Delta_i)$$

длины N*. Тогда и объемлющая группа также допускает унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{E}(^\sigma\Phi) = \mathrm{U}(^\sigma\Phi)\,\mathrm{U}^-(^\sigma\Phi)\ldots\mathrm{U}^\pm(^\sigma\Phi)$$

такой же длины N.

Анализ групп малых рангов производится в разделах 2.1.1 (специальная унитарная группа степени 3), 2.1.2 (группа Судзуки) и 2.1.3 (малая группа Ри). В каждом случае унитреугольная факторизация длины 4 строится явным вычислением с матрицами. Вместе они дают следующий результат, являющийся основным в разделе 2.1:

Теорема (Теорема 2.2 диссертации)**.** *Всякая конечная простая группа типа Ли в характеристике* p *есть произведение четырех своих силовских* p*-подгрупп.*

В разделе 2.2 изучается ширина главных конгруэнц-подгрупп групп Шевалле относительно множества образующих типа z_α. Для этого в разделах 2.2.1 и 2.2.2 строятся относительные аналоги разложений Гаусса и Басса—Кольстера, имеющие место при подходящем предположении на относительный стабильный ранг или относительный абсолютный стабильный ранг. Эти разложения позволяют получать оценки ширины групп больших рангов на основе оценок ширины групп малых рангов. В разделе 2.2.3 рассматриваются группы ранга 1 и 2 над кольцами стабильного ранга 1, над $\mathbb{Z}[1/p]$ и над дедекиндовыми кольцами арифметического типа, имеющими вещественное вложение. В итоге эти вычисления вместе с разложениями Гаусса и Басса—Кольстера дают основной результат раздела 2.2:

Теорема (Теорема 2.5 диссертации). *Пусть Φ — система корней, а I — идеал кольца R.*

1. *Если* $\mathrm{sr}(I) = 1$, *то* $W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Pi)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) - 1$*;*
2. *Пусть p — простое число, $R = \mathbb{Z}[1/p]$, а Φ одна из классических систем корней. В предположении Обобщенной Гипотезы Римана имеют место оценки*

$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) + 1, \text{ если } \Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell,$$
$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 4|\Phi^+| + \mathrm{rk}(\Phi) + 1, \quad \text{если } \Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell;$$

3. *Пусть $\mathcal{O}_S$ — дедекиндово кольцо арифметического типа в глобальном поле k, имеющем вещественное вложение. Предположим, что Φ классическая ранга $\geqslant 2$, тогда $W(\mathrm{G}(\Phi, \mathcal{O}_S, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-))$ конечна.*

Здесь $\mathcal{Z}$ это определенное множество образующих вида $x_\alpha(\xi)$ или $z_\alpha(s, \xi)$.

В **третьей главе** изучается ширина групп Шевалле по отношению к множеству коммутаторов. Доказательство устроено следующим образом. Во-первых, в разделе 3.1 исследуются аналоги фробеуниусовых клеток для групп Шевалле и способы приведения некоторых классов элементов к такому виду. Во-вторых, в разделе 3.2 для элементов из унипотентных радикалов некоторых максимальных параболических подгрупп строятся их разложения в произведение небольшого числа коммутаторов. Наконец, существование унитреугольной факторизации сводит задачу к исследованию длины элементов типа uv для $u \in \mathrm{U}(\Phi^+)$ и $v \in \mathrm{U}(\Phi^-)$, которая вычисляется благодаря полученным в разделе 3.1 результатам о приведении к фробениусовой форме.

Утверждения, доказанные в разделах 3.1 и 3.2, вместе дают основной результат главы:

Теорема (Теорема 3.1 диссертации). *Пусть Φ — система корней ранга $\geqslant 2$, а R — коммутативное кольцо стабильного ранга 1. Тогда элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$ имеет коммутаторную ширину N, где*

- $N = 3$ *в случае* $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{F}_4$*;*
- $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$, $\ell \geqslant 3$*;*
- $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{C}_2, \mathsf{G}_2$, *если 1 равна сумме двух обратимых элементов кольца R;*

– $N = 5$ *в случае* $\Phi = \mathsf{E}_6$.

Наконец, в разделе 3.3 обсуждаются различные варианты и обобщения этого результата: аналоги для расширенных групп и групп над другими классами колец.

Четвертая глава посвящена подсистемным факторизациям. В разделе 4.2 строятся факторизации в терминах подгрупп, изоморфных SL_2. Во-первых, из уже известных параболических факторизаций выводятся SL_2-факторизации групп над кольцами, удовлетворяющими предположениям на стабильный ранг. Во-вторых, посредством детального анализа отдельных случаев строятся SL_2-факторизации групп над эрмитовыми кольцами. А именно, доказывается следующий результат:

Теорема (Теорема 4.2 диссертации)**.** *Пусть* Φ *— система корней,* R *— эрмитово кольцо, и в случае* $\Phi \neq \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell$ *предположим дополнительно, что* R *является областью целостности. Тогда* $\mathrm{G}(\Phi, R)$ *есть произведение не более* $|\Phi| - \operatorname{rk}\Phi$ *фундаментальных* $\mathrm{SL}(2, R)$.

Затем в разделе 4.2 обсуждаются факторизации в терминах подгрупп типа A_ℓ субмаксимального ранга. А именно, такие факторизации строятся для групп типов A_ℓ и D_ℓ. Основной результат этого раздела:

Теорема (Теорема 4.3 диссертации)**.** *Предположим, что* $\mathrm{sr}(I) \leqslant 2$. *Тогда элементарная спинорная группа* $\mathrm{Epin}_{2\ell}(R, I) = \mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I)$ *является произведением* 9 *своих подгрупп типа* $\mathsf{A}_{\ell-1}$.

Список литературы

Публикации автора по теме диссертации

1. *Вавилов Н. А., Смоленский А. В., Сури Б.* Унитреугольные факторизации групп Шевалле // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 388. — С. 17–47.

2. *Sinchuk S., Smolensky A.* Decompositions of congruence subgroups of Chevalley groups // *arXiv preprint arXiv:1511.02906.* — 2015.

3. *Smolensky A.* Unitriangular factorization of twisted Chevalley groups // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2013. — Vol. 23, no. 6. — Pp. 1497–1502.

4. *Smolensky A.* Commutator width of Chevalley groups over rings of stable rank 1 // *arXiv preprint arXiv:1410.3427*. — 2014.

5. *Smolensky A.* Products of Sylow subgroups in Suzuki and Ree groups // *arXiv preprint arXiv:1501.05234*. — 2015. — accepted for publication in Comm. Algebra.

6. *Smolensky A., Sury B., Vavilov N.* Gauss decomposition for Chevalley groups, revisited // *Int. J. Group Theory*. — 2012. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 3–16.

Цитированная литература

7. *Вавилов Н. А., Ковач Е. И.* SL_2-факторизации групп Шевалле // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2011. — Т. 394. — С. 20–32.

8. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Разложения типа Денниса—Васерштейна // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2010. — Т. 375. — С. 48–60.

9. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Параболические факторизации расщепимых классических групп // *Алгебра и анализ*. — 2011. — Т. 23. — С. 1–30.

10. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Улучшенная стабилизация для нечетной ортогональной группы // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2013. — Т. 414. — С. 181–192.

11. *Васерштейн Л. Н.* О стабилизации общей линейной группы над кольцом // *Матем. сб.* — 1969. — Т. 79(121), № 3(7). — С. 405–424.

12. *Васерштейн Л. Н.* О стабилизации для K_2-функтора Милнора // *УМН*. — 1975. — Т. 30. — С. 224.

13. *Ковач Е. И.* SL_2-факторизации групп Шевалле: дипломная работа. — 2012.

14. *Суслин А. А., Туленбаев М. С.* Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1976. — Т. 64. — С. 131–152.

15. *Тавгень О. И.* Ограниченная порождаемость групп Шевалле над кольцами S-целых алгебраических чисел // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1990. — Т. 54, № 1. — С. 97–122.

16. *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tohoku Math. J.* — 1976. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 185–198.

17. *Adian S., Mennicke J.* On bounded generation of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ // *Internat. J. Algebra Comput.* — 1992. — Vol. 2, no. 04. — Pp. 357–365.

18. *Arlinghaus F. A., Vaserstein L. N., You Hong*. Commutators in pseudo-orthogonal groups // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*. — 1995. — Vol. 59, no. 3. — Pp. 353–365.

19. *Babai L., Nikolov N., Pyber L.* Product growth and mixing in finite groups // 19th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms / ACM-SIAM. — 2008. — Pp. 248–257.

20. *Bass H.* K-theory and stable algebra // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1964. — no. 22. — Pp. 5–60.

21. *Burger M.* Kazhdan constants for $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ // *J. Reine Angew. Math.* — 1991. — Vol. 413. — Pp. 36–67.

22. *Carter D., Keller G.* Bounded elementary generation of $\mathrm{SL}_n(O)$ // *Amer. J. Math.* — 1983. — Vol. 105, no. 3. — Pp. 673–687.

23. *Chernousov V., Ellers E. W., Gordeev N.* Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof // *J. Algebra*. — 2000. — Vol. 229, no. 1. — Pp. 314–332.

24. *Dennis R., Vaserstein L.* On a question of M. Newman on the number of commutators // *J. Algebra*. — 1988. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 150–161.

25. *Dennis R. K.* Stability for K_2 // Proceedings of the Conference on Orders, Group Rings and Related Topics (Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1972). — Springer, Berlin, 1973. — Pp. 85–94. Lecture Notes in Math., Vol. 353.

26. *Ellers E. W., Gordeev N.* On the conjectures of J. Thompson and O. Ore // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1998. — Vol. 350, no. 9. — Pp. 3657–3671.

27. *Gordeev N., Saxl J.* Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings // *Алгебра и анализ*. — 2005. — Т. 17, № 2. — С. 285–293.

28. *Hadad U.* Uniform Kazhdan constant for some families of linear groups // *J. Algebra*. — 2007. — Vol. 318, no. 2. — Pp. 607–618.

29. *van der Kallen W.* Injective stability for K_2 // Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, III., 1976). — Springer, 1976. — Vol. 551 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 77–154.

30. *van der Kallen W.* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length // Algebraic K-theory, Proc. Conf., Oberwolfach 1980, Part I. — Springer, 1982. — Vol. 966 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 357–361.

31. *Kassabov M.* Kazhdan constants for $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2005. — Vol. 15, no. 5-6. — Pp. 971–995.

32. *Kolster M.* On injective stability for K_2 // Algebraic K-theory, Part I (Oberwolfach, 1980). — Springer, Berlin-New York, 1982. — Vol. 966 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 128–168.

33. *Liebeck M., Nikolov N., Shalev A.* Groups of Lie type as products of SL_2 subgroups // *J. Algebra*. — 2011. — Vol. 326, no. 1. — Pp. 201–207.

34. *Liebeck M., Pyber L.* Finite linear groups and bounded generation // *Duke Math. J.* — 2001. — Vol. 107. — Pp. 159–171.

35. *Lubotzky A., Pak I.* The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T) // *J. Amer. Math. Soc.* — 2001. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 347–363 (electronic).

36. *Miyasaka T., Shukuzawa O., Yokota I.* Spinor generators of compact exceptional Lie groups F_4, E_6 and E_7 // *Tsukuba J. Math.* — 1999. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 705–721.

37. *Nikolov N.* A product decomposition for the classical quasisimple groups // *J. Group Theory*. — 2007. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 43–53.

38. *Ore O.* Some remarks on commutators // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1951. — Vol. 2. — Pp. 307–314.

39. The Ore conjecture / M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep // *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*. — 2010. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 939–1008.

40. *Plotkin E.* On the stability of the K_1-functor for Chevalley groups of type E_7 // *J. Algebra*. — 1998. — Vol. 210. — Pp. 67–85.

41. *Shalom Y.* Bounded generation and Kazhdan's property (T) // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1999. — no. 90. — Pp. 145–168 (2001).

42. *Shoda K.* Einige Sätze über Matrizen // *Japan J. Math.* — 1937. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 361–365.

43. *Sinchuk S.* Injective stability for unitary K_1, revisited // *J. K-Theory*. — 2013. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 233–242.

44. *Stein M. R.* Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups // *Japan J. Math.* — 1978. — Vol. 4. — Pp. 77–108.

45. *Thompson R. C.* Commutators in the special and general linear groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1961. — Vol. 101, no. 1. — Pp. 16–33.

46. *Vaserstein L. N., Wheland E.* Commutators and companion matrices over rings of stable rank 1 // *Linear Algebra Appl.* — 1990. — Vol. 142. — Pp. 263–277.

47. *Vsemirnov M.* Short unitriangular factorizations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ // *Q. J. Math.* — 2013. — Pp. 279–290.

48. Word values in p-adic and adelic groups / N. Avni, T. Gelander, M. Kassabov, A. Shalev // *Bull. Lond. Math. Soc.* — 2013. — Vol. 45, no. 6. — Pp. 1323–1330.