На правах рукописи

Белов Юрий Сергеевич

Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в лаборатории им. П.Л. Чебышева ФГБУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Официальные оппоненты:

КАПУСТИН Владимир Владимирович, доктор физико-математических наук, зам. директора отдела "Международный математический институт им. Л. Эйлера" в ФГБУН "Санкт-Петербургское Отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук"

ХАБИБУЛЛИН Булат Нурмиевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет"

ЭЙДЕРМАН Владимир Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор университета штата Индиана (США)

Ведущая организация: ФГБУН "Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук"

Защита состоится .... г. в ..... часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 на базе ФГБУН "Санкт-Петербургское Отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук" по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН "Санкт-Петербургское Отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук".

Автореферат разослан ....

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физ.-мат. наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория гильбертовых пространств целых функций – активно развивающийся раздел современного анализа. Важный частный случай – пространства де Бранжа. Они определяются равенством

$$\mathcal{H}(E) = \{F : F - \text{ целая}, F(z)/E(z), \overline{F(\bar{z})}/E(z) \in H^2\},$$

где E – целая функция класса Эрмита–Билера, а H^2 – класс Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Согласно классической теореме де Бранжа, такие и только такие пространства удовлетворяют трем естественным аксиомам гильбертовых пространств целых функций (существование воспроизводящего ядра, аксиома деления, унитарность оператора отражения). Другой важный пример – пространства фоковского типа – получается как замыкание полиномов z^n в пространстве $L^2(w)$, где w – радиально симметричный вес.

Становление теории гильбертовых пространств целых функций относится к началу 1960-х годов, когда Луи де Бранж при помощи теории пространств де Бранжа решил *обратную спектральную задачу* для *всех* канонических систем второго порядка. К каноническим системам второго порядка сводятся многие знаменитые уравнения математической физики, такие как матричное уравнение струны, уравнение Штурма–Лиувилля, уравнение Шредингера, система Дирака и т.д. Оказалось, что для любой канонической системы существует подходящее спектральное преобразование, которое переводит решения канонической системы в воспроизводящие ядра некоторого пространства целых функций (пространства де Бранжа). Это преобразование унитарно.

Очень скоро выяснилось, что эта теория может пригодиться не только для решении задач математической физики, но и для решения многих классических проблем анализа, таких как проблема полноты полиномов и других систем специальных функций, проблема лакуны в спектре меры с малым носителем и т.д.

В последние годы интерес к *применению теории пространств де Бранжа* только нарастает. Например, в 2002 году И. Ортега-Серда и К. Сейп решили знаменитый вопрос об описании фреймов из экспонент при помощи теории пространств де Бранжа. А. Боричев и М. Содин применяли теорию пространств де Бранжа в задаче о полноте полиномов в $L^2(\mu)$, где μ – атомарная мера специального вида. Недавно Н. Макаров и А. Полторацкий указали на новые глубокие связи теории пространств де Бранжа с теорией уравнений Шредингера. Используя методы теории пространств де Бранжа, А. Полторацкий и М. Митковский решили задачу о максимальном размере лакуны в спектре меры с малым носителем и т.д. Значительные результаты в этой области были получены Дж. Ровняком, К. Ремлингом, Х. Дымом и другими известными математиками.

Отметим также, что теория пространств де Бранжа тесно связана с теорией модельных подпространств K_Θ пространства Харди, а именно: для каждого пространства де Бранжа существует естественный унитарный изоморфизм между ним и некоторым модельным подпространством, порожденным мероморфной (в $\mathbb{C}_+$) внутренней функцией Θ. Пространства K_Θ возникают в 1960-х годах в работах Х. Шапиро, А. Шилдса, Н. Никольского.

Теория пространств де Бранжа имеет очень тесные связи с теорией сингулярных интегральных операторов. Например, задача об описании *бесселевых последовательностей из воспроизводящих ядер* – частный случай знаменитой проблемы об ограниченности двухвесового преобразования Гильберта. Эта проблема была недавно решена М. Лэйси, Э. Сойером, К. Шеном и И. Урарто-Туэро. Другая знаменитая задача – описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа – сводится к ограниченности и обратимости некоторого сингулярного интегрального оператора.

Пространства де Бранжа возникают также при построении модели *одномерных возмущений компактных самосопряженных операторов*. Самосопряженные возмущения такого рода были описаны П. Ахерном и Д. Кларком, общий случай был описан В. Капустиным, Г. Губреевым, А. Тарасенко, А. Барановым и Д. Якубовичем.

Цель работы. Целью диссертации является исследование геометрических свойств гильбертовых пространств целых функций (пространств де Бранжа, пространств фоковского типа), а именно: исследование полноты и базисности систем из воспроизводящих ядер и биортогональных к ним; полноты смешанных систем; линейных методов суммирования для рядов Фурье, соответствующих таким системам; нахождение взаимно однозначных соответствий между пространствами де Бранжа и каноническими системами специального вида; исследование бесселевых систем из воспроизводящих ядер. Другая цель диссертации состоит в применении теории пространств де Бранжа для решения классических задач теории функций (полнота систем сдвигов, спектральный синтез для операторов). Еще одна цель диссертации – исследовать пространства фоковского типа при помощи методов из теории пространств де Бранжа.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значимые из них перечислены в следующем списке:

(i) найдено описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер для "малых" пространств де Бранжа (т.е таких, что носитель меры Кларка лакунарен);

(ii) дан отрицательный ответ на вопрос Н. Никольского о полноте системы, биортогональной к системе из воспроизводящих ядер, в K_Θ;

(iii) решена задача спектрального синтеза для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа и, в частности, для систем из экспонент в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$;

(iv) найдены максимальные дефекты (коразмерности смешанных систем) для некоторых пространств де Бранжа (например, для пространства Пэли–Винера);

(v) доказана гипотеза Карлсона–Сандберга об описании замыкания системы из сдвигов;

(vi) получен ответ на вопрос Б. Коренблюма об описании подпространств $C^\infty(\mathbb{R})$, инвариантных относительно дифференцирования;

(vii) получено геометрическое описание пространств де Бранжа, соответствующих каноническим системам, чей гамильтониан состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево;

(viii) получено описание пространств де Бранжа, которые изоморфны пространствам фоковского типа;

(ix) доказана теорема о полноте системы, биортогональной к точной системе из воспроизводящих ядер, для пространства Фока.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории сингулярных операторов, в частности, ограниченность и обратимость некоторых сингулярных операторов в весовых пространствах функций. Также интенсивно используются методы теории целых функций, такие как тонкие оценки функций нулевого экспоненциального типа, оценки функций вполне регулярного роста, характеризация множеств Полиа, теоремы единственности. Также в работе широко применяется метод исследования полноты смешанных систем, разработанный автором диссертации.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании пространств де Бранжа и пространств фоковского типа, в частности, при изучении полноты смешаннах систем, мер Карлесона в пространствах целых функций, задач интерполяции, суммируемости неклассических рядов Фурье и других геометрических свойств систем из воспроизводящих ядер. Также результаты диссертации могут быть использованы для решения задач о спектральном синтезе для различных классов операторов и при исследовании свойств канонических систем и обратных спектральных задач.

Апробация. Результаты диссертации неоднократно докладывались на международных конференциях: "New Trends in Harmonic and Complex Analysis" (Бремен, 2010), "Seventh's Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis" (Эль-Пуэрто-де-Санта-Мария, 2010), "Hilbert Space of Entire Functions and Spectral Theory of Adjoint Differential Operators" (Барселона, 2011), "Hilbert function spaces" (Гарньяно, 2013), "26th Nordic and 1st European–Nordic Congress of Mathematicians" (Лунд, 2013), "Komplexe Analysis und Theorie Spectrale" (Линц, 2014), "Function spaces and Harmonic analysis" (Марсель, 2014), "Conference on Harmonic Analysis, Function Theory, Operator Theory and Applications in honor of Jean Esterle" (Бордо, 2015), "Recent trends in Operator Theory and Function Theory" (Лилль, 2015), "St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (С.- Петербург, 2010–2015), "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (Уфа, 2014), а также на ряде семинаров по анализу и теории функций: на семинаре по комплексному анализу под руководством член.-корр. РАН Е.М. Чирки и проф. А.И. Аптекарева в Математическом институте РАН (2013–2015), на семинаре по теории функций и теории операторов в С.-Петербургском отделении Математического института РАН (2009–2015), на семинаре по теории вероятностей в С.-Петербургском отделении Математического института РАН (2014), а также в университете Париж 6, в университетах Трондхейма, Марселя, Бордо, Лиона.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опуликованы в 16 работах, список которых приведен в конце автореферата. Из этих работ статьи [1–14] опубликованы в журналах из списка ВАК (4 статьи в российских журналах и 10 статей в ведущих зарубежных журналах). Из совместных работ [5–10,13,14] в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из 11 глав. Общий объем работы – 198 страниц, библиография включает 97 наименований.

Содержание работы

В диссертации получены новые результаты, относящиеся к аналитическим и геометрическим свойствам пространств де Бранжа и пространств фоковскго типа. Можно выделить следующие основные направления исследований: описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа; полнота систем, биортогональных к системам из воспроизводящих ядер; задачи полноты смешанных систем; приложения к задачам спектрального синтеза (гипотеза Карлсона–Сандберга, вопрос Коренблюма).

Между этими задачами есть целый ряд внутренних связей. Например, метод доказательства гипотезы Карлсона–Сандберга используется при исследовании вопроса Б. Коренблюма, а идея построения системы из воспроизводящих ядер с неполной биортогональной используется при решении задачи о спектральном синтезе для экспонент.

Глава 1. Введение. Во введении приведены основные определения и базовые свойства пространств де Бранжа и пространств фоковского типа, а также дан подробный обзор содержания и сформулированы все основные результаты диссертации.

Символом $H^2(= H^2(\mathbb{C}_+))$ мы будем обозначать стандартное пространство Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Мы будем говорить, что целая функция E принадлежит классу Эрмита–Билера $\mathcal{HB}$, если выполнено неравенство

$$|E(z)| > |E(\bar{z})|, \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{1}$$

и $|E(x)| \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Каждая функция $E \in \mathcal{HB}$ порождает *пространство де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$, состоящее из целых функций F таких, что функции F/E и F^*/E принадлежат пространству Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ (здесь и всюду далее $F^*(z) = \overline{F(\overline{z})}$). Норма в пространстве $\mathcal{H}(E)$ наследуется из пространства Харди

$$\|F\|_{\mathcal{H}(E)} := \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(t)|^2}{|E(t)|^2} dt.$$

В качестве примера функции класса Эрмита–Билера можно взять функцию e^{-iaz}, $a > 0$, или любой полином P с нулями в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$. В первом случае пространство де Бранжа совпадает с пространством Пэли–Винера, $\mathcal{H}(e^{-iaz}) = \mathcal{PW}_a = \mathcal{F}(L^2(-a,a))$, а во втором с пространством полиномов степени не выше $N-1$, где N – степень P.

С каждым пространством де Бранжа связаны два объекта – семейство мер Кларка и семейство ортогональных базисов из воспроизводящих ядер.

Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$. Легко видеть, что функция $\frac{\alpha E + E^*}{\alpha E - E^*}$ имеет положительную вещественную часть в $\mathbb{C}_+$. То есть имеет место представление Герглотца

$$\Re \frac{\alpha E(z) + E^*(z)}{\alpha E(z) - E^*(z)} = p_\alpha y + \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\alpha(t)}{|t-z|^2},$$

где μ_α – мера, $p_\alpha \geq 0$. Меры μ_α называют *мерами Кларка*.

Следующее утверждение было доказано Л. де Бранжем.

Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$, а $t_{\alpha,n}$ – (единственное) решение уравнения $\varphi(t_{\alpha,n}) = \frac{1}{2}\arg\alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (мы рассматриваем только те n, для которых решение существует). Тогда система $\{k_{t_{\alpha,n}}\}_n$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$ для всех α, за исключением, быть может, одного.

Нетрудно видеть, что последовательность $\{t_{\alpha,n}\}_n$ – носитель меры Кларка μ_α. Положим,

$$A(z) = \frac{E(z) + E^*(z)}{2}, \quad B(z) = \frac{E^*(z) - E(z)}{2i}.$$

Пространства де Бранжа могут быть описаны как пространства дискретных преобразований Гильберта с весом, а именно: пусть дискретная мера $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ на $\mathbb{R}$ такова, что $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$, а последовательность $T = \{t_n\}$ такова, что $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$. С любой такой мерой свяжем пространство *мероморфных функций*

$$\mathcal{H}(T,\mu) := \left\{ f : f(z) = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad a = \{a_n\} \in \ell^2 \right\}. \tag{2}$$

Норма в $\mathcal{H}(T,\mu)$ задается формулой $\|f\|_{\mathcal{H}(T,\mu)} := \|a\|_{\ell^2}$.

Предположим, что A – каноническое произведение Вейерштрасса с простыми нулями в точках $\{t_n\}$, вещественное на вещественной оси. Тогда $A\mathcal{H}(T,\mu)$ – гильбертово пространство целых функций. Хорошо известно, что это пространство – пространство де Бранжа, и, наоборот, любое пространство де Бранжа может быть представлено в таком виде.

Такой взгляд на пространства де Бранжа позволил лучше понять их структуру и решить некоторые открытые вопросы. В дальнейшем мы не будем различать пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ и соответствующее пространство дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$.

Глава 2. Малые пространства де Бранжа. В этой главе рассматриваются пространства де Бранжа с лакунарным носителем меры Кларка. Оказывается, что в таких пространствах многие объекты (меры Карлесона, последовательности Бесселя, базисы Рисса) можно описать явно. Доказательства чаще всего опираются на метод двойственности при оценке весового преобразования Гильберта и точные оценки целых функций с лакунарным множеством нулей.

Определение 1. *Мы будем говорить, что пространство де Бранжа малое, если носитель меры Кларка $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n t_n$ удовлетворяет условию лакунарности*

$$\inf_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1. \tag{3}$$

Один из естественных объектов в пространствах аналитических функций – меры Карлесона. Будем говорить, что $\nu \in M(\mathbb{C})$ – мера Карлесона для пространства $\mathcal{H}$, если выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\nu(z) \le C\|f\|^2_{\mathcal{H}}$$

для некоторой константы C и всех $f \in \mathcal{H}$.

Разделим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на следующие множества:

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < (t_1 + t_2)/2\},$$

$$\Omega_n := \{z \in \mathbb{C} : (t_{n-1} + t_n)/2 \ge |z| < (t_n + t_{n+1})/2\}, \quad n > 1,$$
$$\mathbb{C} = \bigcup_n \Omega_n.$$

Следующий результат дает полное описание карлесоновых мер для малых пространств де Бранжа.

Теорема 2. *Пусть носитель меры Кларка $T = \operatorname{supp}\mu$ удовлетворяет условию лакунарности (3), а мера $\nu \in M^+(\mathbb{C})$ такова, что $\nu(T) = 0$. Преобразование $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$ – ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(\mathbb{C}, \nu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\ge1} \int_{\Omega_n} \frac{\mu_n d\nu(z)}{|z - t_n|^2} < \infty, \tag{4}$$

$$\sup_{n\ge1} \left(\sum_{m=1}^{n} \mu_m \sum_{l=n+1}^{\infty} \int_{\Omega_l} \frac{d\nu(z)}{|z|^2} + \sum_{m=1}^{n} \nu(\Omega_m) \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{\mu_l}{t_l^2} \right) < \infty. \tag{5}$$

Отметим, что условия (4)–(5) симметричны относительно мер $\mu = \sum_n \mu_n t_n$ и ν. Это неудивительно, так как ограниченность оператора $\mathcal{H}_{(T,\mu)}$ эквивалентна ограниченности сопряженного оператора

$$\mathcal{H}^*_{(T,\mu)} : f \mapsto \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z) d\nu(z)}{\bar{z} - t_n}.$$

Условие (5) может быть рассмотрено как аналог классического условия Макенхаупта (A_2).

Теорема 2 позволяет получить *геометрическое описание* последовательностей Бесселя для малых пространств де Бранжа. Другой важный объект – полные интерполяционные последовательности.

Определение 3. *Мы будем говорить, что последовательность Λ – полная интерполяционная последовательность для $\mathcal{H}$, если для любой последовательности $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2$ существует единственная $f \in \mathcal{H}$ такая, что*

$$f(\lambda) = (f, k_\lambda)_{\mathcal{H}} = a_\lambda \|k_\lambda\|.$$

Хорошо известно, что это свойство эквивалентно тому, что система $\{\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – базис Рисса.

Положим,

$$M_n = \sum_{l=1}^{n} \mu_l, \qquad P_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\mu_l}{t_l^2},$$

$$\Lambda^{(0)} = \left\{\lambda \in \Lambda : \lambda \in \Omega_n \text{ и } \frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2} \geq \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n\right)\right\},$$

$$\Lambda^{(M)} = \left\{\lambda \in \Lambda : \lambda \in \Omega_n \text{ и } \frac{M_n}{|\lambda|^2} > \max\left(\frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2}, P_n\right)\right\},$$

$$\Lambda^{(P)} = \left\{\lambda \in \Lambda : \lambda \in \Omega_n \text{ и } P_n > \max\left(\frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2}, \frac{M_n}{|\lambda|^2}\right)\right\}.$$

Рассмотрим множества

$$D_n(\mu, N) = \left\{\lambda \in \Omega_n : \frac{N\mu_n}{|\lambda - t_n|^2} \geq \max\left(\frac{M_n}{|\lambda|^2}, P_n\right)\right\}.$$

Если N фиксировано и $\mu_n = o(M_n)$ или $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$, то "диски" D_n имеют диаметр порядка $o(t_n)$ и, следовательно, дизъюнктны (начиная с некоторого номера n). В этом случае разбиение $\Lambda = \Lambda^{(0)} \cup \Lambda^{(M)} \cup \Lambda^{(P)}$ может быть нетривиально, т.е. множество $\Lambda \setminus \cup_n D_n(\mu, N)$ может быть бесконечным для любого N.

Пусть $\mu_n = o(M_n)$. Оказывается, в этом случае любая полная интерполяционная последовательность Λ локализована около точек t_n.

Определение 4. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ занумерована в соответствии с возрастанием $|\lambda_n|$ и $0 \notin \Lambda$. Будем говорить, что Λ – возмущение последовательности $T = \{t_n\}$, если мы можем выбрать n_0 и N так, что $\lambda_n \in D_n(\mu, N)$ для достаточно больших n. Если $n_0 = 1$, то мы будем говорить, что Λ – точное возмущение последовательности T. Если $n_0 > 1$, то мы будем говорить, что Λ – возмущение T с дефектом $n_0 - 1$.*

Другими словами, Λ – возмущение T с дефектом k, если точки из Λ последовательно попадают в "диски" D_n (с центром t_n), при этом первые k дисков пропущены.

Положим,

$$\rho_n = \prod_{m=n_0}^{n} \frac{t_m}{|\lambda_m|}, \qquad Q_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m}{|\lambda_m|^2},$$

где w_m – бесселев вес, соответствующий точке λ_m,

$$w_\lambda = \|k_\lambda\|^{-2} = [k_\lambda(\lambda)]^{-1} = \left[\sum_n \frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2}\right]^{-1}. \tag{6}$$

Теорема 5. *Предположим, что $\mathcal{H}(E)$ – малое пространство де Бранжа, а мера Кларка такова, что $\mu_n = o(M_n)$ и $M_n \to \infty$. Тогда Λ – полная интерполяционная последовательность тогда и только тогда, когда $\sup_n M_n Q_n < \infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) Λ – точное возмущение T и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \le C\left(\frac{M_m}{M_n}\right)^{1-\delta};$$

(ii) Λ – возмущение T с дефектом 1 и для некоторых $C, \delta > 0$

$$\frac{\rho_m}{\rho_n} \ge C\left(\frac{M_m}{M_n}\right)^{1+\delta}.$$

Таким образом, полные интерполяционные последовательности Λ могут быть двух типов: либо точек в Λ столько же, сколько и в T, и они не слишком далеки от точек из T (случай (i)); либо одной точки в Λ не хватает, но это компенсируется тем, что точки из Λ далеки от точек из T, но все еще лежат внутри дисков D_n (случай (ii)). Этот удивительный эффект появляется и при условии $\frac{\mu_n}{t_n^2} = o(P_n)$ (в этом случае Λ может содержать лишнюю точку).

Глава 3. Системы, биортогональные к системам из воспроизводящих ядер. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Мы будем говорить, что система векторов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *полна*, если $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Span}}\,\{x_n\}_{n\in N}$. Если система $\{x_n\}_{n\in N}$ полна и *минимальна* ($\overline{\mathrm{Span}}\,\{x_n\}_{n\in N\setminus n_0} \ne \mathcal{H}$), то мы будем говорить, что система $\{x_n\}_{n\in N}$ точная. У каждой точной системы $\{x_n\}_{n\in N}$ есть единственная *биортогональная система* $\{y_n\}_{n\in N}$, $(x_n, y_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}$, $n, m \in N$. Таким образом, для любого $x \in \mathcal{H}$ мы можем построить формальный ряд Фурье

$$x \sim \sum_{n\in N} (x, y_n) x_n. \tag{7}$$

Один из фундаментальных вопросов гармонического анализа – возможность восстановления вектора x по системе "гармоник" $\{x_n\}$. Например, если система $\{x_n\}$ – базис Рисса, то ряд (7) сходится по норме для любого

$x \in \mathcal{H}$. Нас интересует самая слабая форма восстановления – единственность ряда (7) (т.е полнота биортогональной системы).

В 1981 году Р. Янг доказал следующее утверждение.

Пусть $\mathcal{E} := \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– точная система из экспонент в* $L^2(a,b)$. *Тогда биортогональная система* $\{\tilde{e}_\lambda\}$ *тоже полна.*

Нетрудно видеть, что для произвольной точной системы $\{x_n\}$ это неверно. Действительно, пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}$. Тогда система $\{e_1 + e_n\}_{n=2}^\infty$ полна в $\mathcal{H}$, а биортогональная система $\{e_n\}_{n=2}^\infty$ неполна.

В начале 2000-х Н.К. Никольский задал следующий вопрос.

Вопрос 6. *Пусть* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– точная система из воспроизводящих ядер в* K_Θ. *Верно ли, что биортогональная система всегда полна?*

Оказывается, что ответ на вопрос Никольского отрицательный даже для класса пространств де Бранжа.

Теорема 7. *Пусть бесконечномерное пространство дискретных преобразований Гильберта* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *таково, что* $\mu(\mathbb{C}) = \sum_n \mu_n < \infty$. *Тогда существует точная система из воспроизводящих ядер такая, что биортогональная система неполна.*

Отметим, что мы не накладываем условия $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. С другой стороны, если μ_n убывают не слишком быстро, то биортогональная система всегда имеет конечную коразмерность.

Теорема 8. *Пусть пространство дискретных преобразований Гильберта* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *таково, что*

$$\inf_n \mu_n (1 + |t_n|)^N > 0 \tag{8}$$

для какого-то N. *Тогда система, биортогональная к точной системе из воспроизводящих ядер, всегда имеет конечную коразмерность. Если же, дополнительно, выполнено условие* $\sum_n \mu_n = \infty$, *то такая система всегда полна.*

Глава 4. Наследственная полнота систем из воспроизводящих ядер.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_n\}$ – точная система в нем, а $\{y_n\}$ – биортогональная система. Рассмотрим формальный ряд Фурье для элемента x:

$$x \sim \sum_{n\in N} (x, y_n) x_n. \tag{9}$$

Ранее мы изучали самую слабую форму восстановления вектора x по его ряду Фурье – единственность коэффициентов (x, y_n). Теперь мы будем изучать более сильное свойство – *наследственную полноту* системы $\{x_n\}$.

Будем говорить, что система $\{x_n\}$ наследственно полна, если любой вектор x лежит в линейной оболочке членов ряда Фурье, т.е.

$$x \in \overline{\operatorname{Span}}\{(x, y_n)x_n\}. \tag{10}$$

Другое название таких систем – *сильные базисы Маркушевича.* Существует эквивалентное определение наследственной полноты, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем. Будем говорить, что система $\{x_n\}$ наследственно полна, если для любого разбиения множества индексов $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ *смешанная система*

$$\{x_n\}_{n\in N_1} \cup \{y_n\}_{n\in N_2}$$

полна в $\mathcal{H}$.

Сильные базисы Маркушевича могут быть определены и в произвольном банаховом пространстве. Существование базисов Маркушевича и сильных базисов Маркушевича, удовлетворяющих различным требованиям, – важные и интересные проблемы в теории банаховых пространств. Например, недавно П. Теренци показал, что в *любом* сепарабельном банаховом пространстве существует сильный базис Маркушевича[1].

С другой стороны, в сепарабельном гильбертовом пространстве не так просто привести пример базиса Маркушевича, который не является сильным базисом Маркушевича (иногда такие системы называют ненаследственно полными). Первый пример таких систем был построен А. Маркусом в 1970 году[2]. Позднее Н. Никольский, Л. Довбыш и В. Судаков подробно изучили структуру ненаследственно полных систем в гильбертовом пространстве и предъявили много примеров таких систем.

Мы будем изучать свойство наследственной полноты для точных систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа. Этот вопрос восходит к Н. Никольскому.

Определение 9. *Будем говорить, что пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством наследственной полноты, если любая точная система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ с полной биортогональной (базис Маркушевича) наследственно полна (сильный базис Маркушевича).*

Следующая теорема полностью описывает все такие пространства де Бранжа.

Теорема 10. *Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством наследственной полноты тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

[1] P. Terenzi. Every separable Banach space has a bounded strong norming biorthogonal sequence which is also a Steinitz basis // Studia Math. 1994. Vol. 111. P. 207–222

[2] А. Маркус. Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром // Изв. АН СССР. 1970. Т. 34. №3. С. 662–688

(i)
$$\sum_n \mu_n < \infty; \tag{11}$$

(ii) последовательность $\{t_n\} = \operatorname{supp}\mu$ *лакунарна, и для некоторого* $C > 0$ *и всех* n *выполнено неравенство*
$$\sum_{|t_k|\le|t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k|>|t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n. \tag{12}$$

Отметим, что условия (i) и (ii) выполнены одновременно только в тривиальном случае, когда пространство $\mathcal{H}(E)$ конечномерно.

Предположим, что пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ не обладает свойством наследственной полноты, т.е существует неполная смешанная система
$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$
($\{g_\lambda\}$ – биортогональная система). С точки зрения теории операторов, важно знать коразмерность этой неполной системы. Для каждого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, положим,
$$\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \dim(\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1} \cup \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2})^\perp.$$
Определим дефект системы $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и пространства $\mathcal{H}(E)$:
$$\operatorname{def}(\Lambda) = \sup\{\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2\},$$
$$\operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) = \sup\{\operatorname{def}(\Lambda) : \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} - \text{ базис Маркушевича}\}.$$

Оказывается, что для многих пространств де Бранжа существуют системы с большим или даже бесконечным дефектом.

Теорема 11. *Пусть* $\mathcal{H}(E)$ *– пространство де Бранжа такое, что* $\sum_n \mu_n = \infty$.

(i) Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ *существует подпоследовательность* $\{t_{n_k}\}$ *последовательности* T *такая, что* $\sum_k t_{n_k}^{2N-2}\mu_{n_k} < \infty$, *то* $\operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) \ge N$ *(более того, существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *такой, что* $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = N$ *для некоторого разбиения* $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$*).*

(ii) Пусть последовательнoть T *удовлетворяет условию степенной разделенности* $|t_{n+1} - t_n| \gtrsim |t_n|^{-M}$ *для некоторого* $M > 0$. *Тогда следующие*

условия равносильны:

$$(a) \quad \operatorname{def}(\mathcal{H}(E)) = \infty, \quad (b) \quad \inf_n \mu_n |t_n|^N = 0 \text{ *для любого* } N > 0.$$

При помощи теоремы 11 можно получить необходимые и (отдельно) достаточные условия для существования смешанных систем с большим дефектом. Однако доказательство теоремы 11 не позволяет построить смешанную систему с бесконечным дефектом. Тем не менее такие системы существуют.

Теорема 12. *Для любой возрастающей последовательности* $T = \{t_n\}$, $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$, *существует мера* μ, $\operatorname{supp} \mu = T$ *такая, что в пространстве де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$ $(= A\mathcal{H}(T, \mu))$ *существует базис Маркушевича из воспроизводящих ядер* $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *такой, что* $\operatorname{def}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \infty$ *для какого-то разбиения* $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

При помощи теоремы 12 А. Баранов и Д. Якубович доказали, что у любого компактного самосопряженного оператора с тривиальным ядром в бесконечномерном пространстве есть одномерное возмущение, не допускающее спектрального синтеза[3].

Наследственная полнота для систем из экспонент. При преобразовании Фурье пространство $L^2(-\pi, \pi)$ переходит в пространство Пэли–Винера $\mathcal{PW}_\pi = \mathcal{F}L^2(-\pi, \pi)$,

$$\mathcal{PW}_\pi := \{F : F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{itz} dt, \quad g \in L^2(-\pi, \pi)\}.$$

Более того, преобразование Фурье $\mathcal{F}$ – унитарный оператор из $L^2(-\pi, \pi)$ в $\mathcal{PW}_\pi$, а экспоненты переходят в воспроизводящие ядра в $\mathcal{PW}_\pi$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-i\bar{\lambda}t}\right) = \frac{\sin(\pi(z - \bar{\lambda}))}{\pi(z - \bar{\lambda})} =: k_\lambda(z).$$

Так как пространство Пэли–Винера – пространство класса $\mathfrak{R}$, мы можем написать явный вид системы $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, биортогональной к точной системе из воспроизводящих ядер:

$$g_\lambda(z) = \frac{G(z)}{G'(\lambda)(z - \lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Хорошо известно, что G_Λ – функция экспоненциального типа π с простыми нулями в Λ.

[3] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich. Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators // arXiv:1212.5965

Из теоремы 10 следует, что существует точная ненаследственно полная система из экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$ (воспроизводящих ядер в $\mathcal{P}W_\pi$). С другой стороны, теорема 11 не позволяет получить нетривиальной оценки дефекта смешанной системы. В этом случае вопрос о дефекте смешанной системы требует отдельного рассмотрения.

Теорема 13. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда для любого разбиения $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ ортогональное дополнение к смешанной системе*

$$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}\cup\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \tag{13}$$

не более чем одномерно.

Более того, существуют определенные препятствия для существования дефекта у смешанной системы, например, если множество Λ_1 имеет положительную верхнюю плотность. Для последовательности Λ положим,

$$D_+(\Lambda)=\limsup_{r\to\infty}\frac{n_r(\Lambda)}{2r},$$

где $n_r(\Lambda)$ – считающая функция последовательности Λ, $n_r(\Lambda)=\#\{\lambda\in\Lambda: |\lambda|\le r\}$.

Теорема 14. *Пусть $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Тогда для любого разбиения $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ такого, что $D_+(\Lambda_1)>0$, смешанная система* (13) *полна в $\mathcal{P}W_\pi$.*

Таким образом, для ненаследственно полных смешанных систем всегда $D_+(\Lambda_1)=0$.

Глава 5. Проблема Карлсона–Сандберга. Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$, тогда, согласно тауберовой теореме Винера, система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ полна в $L^1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f$ не обращается в 0. С другой стороны, в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ полна тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f(x)\ne 0$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Проблемы полноты для различных семейств сдвигов – классический вопрос гармонического анализа, привлекающий математиков с начала 20-го века и до сих пор. В частности, пусть $f\in L^2(0,\infty)$ и $0\in\operatorname{supp} f$, тогда система сдвигов $\{f(x-t)\}_{t>0}$ полна в $L^2(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{F}f\in H^2(\mathbb{C}_+)$ – внешняя в $\mathbb{C}_+$. Если же у функции $\mathcal{F}f$ есть внутренний фактор Θ, то Фурье образ замыкания сдвигов равен $\Theta H^2(\mathbb{C}_+)$, а функции, ортогональные Фурье образу замыкания сдвигов, – это в точности функции из модельного подпространства $K_\Theta=H^2\ominus\Theta H^2$.

В середине 2000-х годов М. Карлсон и К. Сандберг задали следующий вопрос.

Пусть $f \in L^2(0,1)$ такова, что $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f) = [0,1/2]$, *а $\mathcal{F}f$ – целая функция с простыми нулями. Тогда $e^{i\lambda t} \perp \{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2}$, $\lambda \in -\overline{\mathcal{Z}_f}$. Всегда ли смешанная система*

$$\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2} \cup \{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in -\overline{\mathcal{Z}_f}} \tag{14}$$

полна в $L^2(0,1)$?

Отметим, что множество $\mathcal{Z}_f$ никогда не пусто. Более того, его верхняя плотность равна $\frac{1}{4\pi}$. С другой стороны, если f быстро убывает вблизи точек 0 и 1/2, то система $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in -\overline{\mathcal{Z}_f}}$ имеет бесконечную коразмерность в $L^2(0,1/2)$. Если мы надеемся на положительный ответ, то этот дефект должен компенсироваться системой $\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1/2}$.

Следующий результат дает положительный ответ на вопрос Карлсона–Сандберга.

Теорема 15. *Пусть $f \in L^2(0,1)$ такова, что* $\operatorname{conv}(\operatorname{supp} f) = [0,a]$, $0 < a < 1$. *Обозначим за $\Lambda = \{(\lambda_k, n_k)\}$ дивизор $\mathcal{F}f$ (т.е. $\mathcal{F}f$ обращается в 0 с кратностью n_k). Тогда система*

$$\{f(x-t)\}_{0\le t\le 1-a} \cup \{x^s e^{i\lambda_k x}\}_{(\lambda_k,n_k)\in -\overline{\Lambda},\quad 0\le s<n_k}$$

полна в $L^2(0,1)$.

Глава 6. Суммируемость неклассических рядов Фурье. Еще раз рассмотрим формальный ряд Фурье, построенный по точной системе $\{x_n\}_{n\in N}$:

$$x \sim \sum_{n\in N} (x, y_n) x_n. \tag{15}$$

Если система $\{x_n\}$ наследственно полна, то для каждого x и $\varepsilon > 0$ существует конечная последовательность $\{c_n\}$ такая, что $\left\| x - \sum_{n\in N} c_n (x,y_n) x_n \right\| < \varepsilon$. Мы будем изучать более узкий класс систем таких, что коэффициенты $\{c_n\}$ *можно выбрать одинаковыми* для всех векторов x.

Определение 16. *Будем говорить, что матрица $W = \{W_{m,n}\}_{m\in N, n\in\mathbb{N}}$ порождает линейный метод суммирования для ряда* (15), *если*

$$\lim_{n\to\infty} W_{m,n} = 1, \qquad \forall n, \quad W_{m,n} = 0 \text{ для достаточно больших } m,$$

$$S_n x := \sum_{m\in N} W_{m,n} \cdot (x, y_m) x_m \underset{n\to\infty}{\to} x$$

для любого $x \in \mathcal{H}$.

Иногда такие методы суммирования называют *конечнострочными*. Для удобства читателя приведем шкалу свойств системы векторов $\{x_n\}$, в которой каждое следующее свойство сильнее предыдущего.

(i) Система $\{x_n\}$ точна (полна и минимальна).

(ii) Система $\{x_n\}$ – базис Маркушевиича (полнота биортогональной системы).

(iii) Система $\{x_n\}$ – сильный базис Маркушевиича (наследственная полнота).

(iv) Система $\{x_n\}$ – базис суммирования (существование линейного метода суммирования у ряда (15)).

(v) Система $\{x_n\}$ – базис Рисса.

(vi) Система $\{x_n\}$ – ортогональный базис.

Системы из экспонент. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda) := \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – точная система в $L^2(-\pi,\pi)$. Для таких систем свойства (i) и (ii) эквивалентны (теорема Янга). Свойства (ii) и (iii) не эквиваленты (см. теорему 10). Свойство (vi) выполнено тогда и только тогда, когда $\Lambda = \mathbb{Z}+\delta$, $0\le\delta<1$. Нас будут интересовать свойства (iv) и (v).

Напомним, что для полных и минимальных систем $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ (или, что то же, систем из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$) существует порождающая функция

$$G(z) = \lim_{R\to\infty}\prod_{|\lambda|<R,\lambda\in\Lambda}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right).$$

В дальнейшем процедура суммирования будет построена при помощи этой функции.

Самая простая процедура суммирования будет в случае, когда ряд (15) сходится безусловно (т.е по норме и при любом порядке членов). Хорошо известно, что это эквивалентно свойству (v). Мы будем считать, что все точки Λ лежат в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_\delta = \{z : \Im z > \delta\}$, $\delta > 0$.

Теорема 17. *Пусть $\Lambda\subset\mathbb{C}_\delta$, $\delta>0$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ – базис Рисса в $L^2(-\pi,\pi)$ тогда и только тогда, когда:*

- *порождающая функция G имеет экспоненциальный тип π. Вес $|G(x)|^2$ удовлетворяет условию Макенхаупта (A_2):*

$$\sup_{I=[a,b]}\frac{1}{|I|^2}\int_I |G(x)|^2dx\int_I |G(x)|^{-2}dx<\infty. \tag{16}$$

- Λ *удовлетворяет условию Карлесона* (C)*:*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in\Lambda,\mu\neq\lambda}\frac{(1+|\Im\lambda|)(1+|\Im\mu|)}{|\lambda-\mu|^2}<\infty. \tag{17}$$

Эта теорема была доказана Б. Павловым при дополнительном условии $\sup_{\lambda\in\Lambda}|\Im\lambda|<\infty$. Позднее Н. Никольский[4] доказал аналогичный результат при условии $\inf_{\lambda\in\Lambda}\Im\lambda>-\infty$. Наконец, в 1991 году А. Минкин [5] избавился от всех дополнительных ограничений на Λ.

Условие Карлесона отвечает за индивидуальные углы между векторами, а условие Макенхаупта за "глобальную суммируемость" ряда (15) для экспонент. Следующая теорема демонстрирует этот неформальный принцип.

Теорема 18. *Пусть порождающая функция* G *имеет экспоненциальный тип* π *и удовлетворяет условию Макенхаупта* (16)*. Тогда система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ (*ряд* (15)) *допускает линейный метод суммирования.*

Отметим, что из условий теоремы 18 следует, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ точна (полна и минимальна).

Глава 7. Локализация нулей преобразования Гильберта. Обычно в гильбертовом пространстве целых функций любое достаточно "редкое" счетное множество не является множеством единственности. Тем не менее, оказывается, что есть естественный класс пространств де Бранжа, в которых распределение нулей обладает определенной жесткостью. Мы всегда будем предполагать, что $0\notin T$ и T удовлетворяет условию *степенной разделенности*: существуют числа $C>0$ и $N\in\mathbb{N}$ такие, что

$$|t_{n+1}-t_n|\geq C|t_n|^{-N}. \tag{18}$$

Для целой функции f обозначим за $\mathcal{Z}_f$ множество ее нулей. Если же $f\in\mathcal{H}(T,\mu)$, то для нас будет удобно изменить определение $\mathcal{Z}_f$, $\mathcal{Z}_f:=\{w\in\mathbb{C}\setminus T: f(w)=0\}\cup\{t_n\in T: a_n=0\}$ (т.е $\mathcal{Z}_f$ – нули целой функции Af, где A – каноническое произведение с нулями в T). Положим, $D(z,r)=\{w:|w-z|<r\}$.

Следующий результат показывает, что различные определения локализации эквивалентны для пространств $\mathcal{H}(T,\mu)$.

Теорема 19. *Пусть* $\mathcal{H}(T,\mu)$ *– пространство дискретных преобразований Гильберта, а* T *удовлетворяет условию степенной разделенности* (18)*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

[4] Н.Никольский, Б. Павлов, С. Хрущев. Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер // Комплексный анализ и спектральная теория. – Ленинград, 1979/1980. С. 214–335

[5] А. Минкин. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и Анализ. 1991. Т. 3. №5. С. 109–134

(i) *существует неограниченное множество $S \subset \mathbb{C}$ такое, что множество $\mathcal{Z}_f \cap S$ конечно для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$;*

(ii) *множество $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, 1)$ конечно для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$;*

(iii) *существует последовательность непересекающихся дисков $D(t_n, r_n)$ такая, что для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ множество $\mathcal{Z}_f \setminus \cup_n D(t_n, r_n)$ конечно, и каждый диск $D(t_n, r_n)$ содержит не более одной точки из $\mathcal{Z}_f$ для всех индексов n, кроме, быть может, конечного числа;*

(iv) *не существует $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ с бесконечным числом кратных нулей.*

Теорема 19 подсказывает следующее определение.

Определение 20. *Будем говорить, что у пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство локализации, если T удовлетворяет условию степенной разделенности и выполнено одно из 4-х свойств из теоремы 19.*

Теорема 19 показывает, что если нули функций из $\mathcal{H}(T,\mu)$ локализуются около нетривиального подмножетсва $\mathbb{C}$, то они локализуются около подмножеств T (каждой функции соответствует свое подмножество). Для некоторых пространств нули могут быть локализованы только около всего множества T.

Определение 21. *Будем говорить, что у пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство сильной локализации, если существует непересекающаяся последовательность дисков $D(t_n, r_n)$ такая, что для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ каждый диск содержит в точности один ноль из $\mathcal{Z}_f$ для всех индексов n, за исключением, быть может, конечного числа.*

Оказывается, что свойство сильной локализации тесно связано с задачей об аппроксимации полиномами на $\mathbb{R}$.

Теорема 22. *У пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство сильной локализации тогда и только тогда, когда полиномы лежат в пространстве $L^2(\mu)$ и плотны в нем.*

Определение 23. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство локализации. Будем говорить, что множество $S \subset T$ – аттрактор, если существует функция $f \in \mathcal{H}(T,\mu)$ такая, что $S = T_f$ с точностью до конечного множества.*

Заметим, что само множество T – всегда аттрактор, так как $T_f = T$ для $f = \frac{1}{z-t_0}$.

Оказывается, что свойство локализации влечет теорему упорядоченности для аттракторов.

Теорема 24. *Пусть в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть свойство локализации. Тогда для любых двух аттракторов S_1, S_2 либо $S_1 \subset S_2$, либо $S_2 \subset S_1$ (с точностью до конечных множеств).*

Эта теорема похожа на теорему де Бранжа об упорядоченности подпространств. Мы будем классифицировать пространства $\mathcal{H}(T,\mu)$ в соответствии с количеством аттракторов.

Определение 25. *Будем говорить, что в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация типа N, если существуют N подмножеств $W_1, W_2, ..., W_N \subset T$ таких, что $W_j \subset W_{j+1}$, $1 \le j \le N-1$, $\#(W_{j+1} \setminus W_j) = \infty$, и для любой $f \in \mathcal{H}(T,\mu) \setminus \{0\}$ мы имеем $T_f = W_j$ точностью до конечного множества. Более того, N – минимальное число с таким свойством.*

Очевидно, что $W_N = T$. Строгая локализация – локализация типа 1.

Будем говорить, что целая функция B нулевого экспоненциального типа принадлежит *классу Гамбургера*, если она вещественна на $\mathbb{R}$, имеет только простые вещественные нули в точках s_k, не является полиномом и для любого $M > 0$ выполнено $|s_k|^M = o(|B'(s_k)|)$, $|s_k| \to \infty$.

Теорема 26. *В пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ есть локализация типа 2 тогда и только тогда, когда существует разбиение $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ такое, что выполены следующие три условия:*

(i) существует функция A_2 класса Гамбургера такая, что $\mathcal{Z}_{A_2} = T_2$;

(ii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_2, \mu\big|_{T_2})$ и не плотны в нем, но их замыкание имеет конечную коразмерность;

(iii) полиномы лежат в пространстве $L^2(T_1, \tilde{\mu})$ и плотны в нем, $\tilde{\mu} = \sum_{t_n \in T_1} \mu_n |A_2'(t_n)|^2 \delta_{t_n}$.

Более того, T_1 и T – аттракторы для $\mathcal{H}(T,\mu)$.

У теорем 22 и 26 есть приложения в теории канонических систем.

Глава 8. Подпространства $C^\infty(a,b)$, инвариантные относительно дифференцирования.

Рассмотрим пространство $C^\infty(a,b)$ с топологией равномерной сходимости производных на компактах.

Мы будем изучать подпространства в $C^\infty(a,b)$, инвариантные относительно оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$. Хорошо известно, что собственные и корневые вектора оператора дифференцирования – это функции вида $x^n e^{\lambda x}$. Любая замкнутая линейная оболочка функций такого вида даст нам D-инвариантное подпространство. В том случае, когда у оператора других инвариантных подпространств нет, говорят, что оператор допускает *спектральный синтез*.

Классические работы Ж. Делсарта, Ж.П. Кахана и Л. Шварца говорят, что спектральный синтез есть для семейств сдвигов во многих локально выпуклых пространствах на $\mathbb{R}$.

Структура D-инвариантных подпространств намного более сложная, частично она была изучена А. Алеманом и Б. Коренблюмом[6]. Пусть $S \subset (a,b)$ – произвольное замкнутое множество. Рассмотрим

$$L_S = \{f \in C^\infty(a,b) : f^{(k)}(S) = \{0\}, k \geq 0\}. \tag{19}$$

Во многих случаях L_S не тривиально и не содержит ни одного собственного или корневого вектора D. D-инвариантные подпространства могут быть классифицированы в терминах спектра суженного оператора $\sigma(D\big|_L)$, а именно: для любого замкнутого D-инвариантного подпространства верна одна из трех альтернатив:

(i) $\sigma(D\big|_L) = \mathbb{C}$;

(ii) $\sigma(D\big|_L) = \emptyset$;

(iii) $\sigma(D\big|_L)$ – непустое дискретное подмножество $\mathbb{C}$, состоящее из собственных значений $D\big|_L$.

Практически ничего не известно о подпространствах из пункта (ii). Конкретный пример можно получить, взяв в качестве S в формуле (19) два дизъюнктных интервала. Подпространства из пункта (ii) называются *резидуальными* и полностью описаны А. Алеманом и Б. Коренблюмом. Такие подпространства имеют вид

$$L_I = \{f \in C^\infty(a,b) : f^{(k)}(I) = 0, k \geq 0\}$$

для некоторого интервала $I \subset (a,b)$, относительно замкнутого в (a,b). Интервал I может сводиться к одной точке.

Мы будем изучать подпространства из пункта (iii). Такие подпространства L могут иметь нетривиальную резидуальную часть

$$L_{res} = \bigcup\{P(D)L : P - \text{ нетривиальный полином }\}.$$

Нетрудно проверить, что $\sigma(D\big|_{L_{res}}) = \emptyset$ и, таким образом, $L_{res} = L_{I_{res}}$ для некоторого интервала I_{res}, причем I_{res} – минимальный интервал такой, что $L_I \subset L$. Будем называть интервал I_{res} резидуальным интервалом для L.

[6] A. Aleman, B. Korenblum. Derivation-invariant subspaces of C^∞ // Comput. Methods Funct. Theory. 2008. Vol. 8. no. 2. P. 493–512.

Следующий естественный вопрос был задан Б. Коренблюмом:

верно ли, что любое D-инвариантное подпространство L типа (iii) (с дискретным спектром сужения) порождается своей резидуальной частью и собственными (корневыми) векторами, лежащими в L?

В том случае, когда спектр оператора сужения конечен, $\#\sigma(D\big|_L) < \infty$, положительный ответ был дан А. Алеманом и Б. Коренблюмом. Общий случай намного сложнее, и ответ зависит от соотношения между плотностью множества $\sigma(D\big|_L)$ и длиной резидуального интервала I_{res}. Положим,

$$\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = \lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#\{\lambda \in i\sigma(D\big|_L) : \Re\lambda \in [x, x+r)\}}{r},$$

причем элементы спектра считаются с учетом кратности. Обозначим за $\mathcal{E}(L)$ набор конечных линейных комбинаций мономов $x^n e^{\lambda x}$, лежащих в L. В дальнейшем L всегда будет D-инвариантным подпространством с дискретным спектром суженного оператора.

Теорема 27. *Пусть у D-инвариантного подпространства L – компактный резидуальный интервал I. Если*

$$2\pi\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) < |I|,$$

то

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Оказывается, что ограничение на плотность спектра $\sigma(D\big|_L)$ существенно. Если $2\pi\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = |I|$, то подпространство L может не допускать спектрального синтеза. То есть, вообще говоря, ответ на вопрос Коренблюма отрицательный.

Теорема 28. *Существует D-инвариантное подпространство L такое, что*

$$L_{res} = \{f \in C^\infty(-2\pi, 2\pi) : f\big|_{[-\pi,\pi]} \equiv 0\},$$

$$\mathcal{D}_+(\sigma(D\big|_L)) = 1,$$

но

$$L \neq \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда резидуальный интервал I не компактен: если $I = (a, b)$, то $L_{res} = \{0\}$; если же $I \neq (a, b)$, то $I = (a, c]$ или $I = [c, b)$, $c \in (a, b)$. Во всех этих случаях спектральный синтез есть.

Теорема 29. *Если резидуальный интервал I не компактен, то*

$$L = \overline{L_{res} + \mathcal{E}(L)}.$$

Глава 9. Пространства фоковского типа.

Пусть φ – непрерывная функция на $[0, \infty)$. Распространим ее на $\mathbb{C}$ по формуле $\varphi(z) := \varphi(|z|)$. Положим,

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ F \in Hol(\mathbb{C}) : \|F\| = \|F\|_\varphi = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ – планарная мера Лебега. Легко видеть, что $\mathcal{F}_\varphi$ – гильбертово пространство целых функций с воспроизводящим ядром. Самый известный пример такого пространства – пространство Фока – получается, если $\varphi(r) = \pi r^2$.

Один из естественных вопросов: есть ли в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ базис Рисса из воспроизводящих ядер (т.е. верно ли, что $\mathcal{F}_\varphi \in \mathfrak{R}$)? В 1992-м году К. Сейп доказал, что в классическом пространстве Фока нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер[7].

Рассмотрим подробнее случай $\varphi(t) = \log^\alpha(t)$, $1 < \alpha \leq 2$. В этом случае А. Боричев и Ю. Любарский показали, что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует базис Рисса из воспроизводящих ядер в *вещественных* точках[8]. Это означает, что в этом случае пространство $\mathcal{F}_\varphi$ совпадает с некоторым пространством де Бранжа (как множества с эквивалентностью норм). Возникает естественный вопрос:

какие пространства де Бранжа совпадают с пространствами фоковского типа?

Теорема 30. *Пусть $\mathcal{H}(E)$ – пространство де Бранжа с мерой Кларка $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) существует пространство фоковского типа $\mathcal{F}_\varphi$ такое, что $\mathcal{H}(E) = \mathcal{F}_\varphi$;

[7] K. Seip. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space, I // J. Reine Angew. Math. 1992. Vol. 429. P. 91–106

[8] A. Borichev, Y. Lyubarskii. Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces // J. Inst. Math. Jussieu. 2010. Vol. 9. P. 449–461

(ii) оператор поворота $R_\theta : f(z) \mapsto f(e^{i\theta}z)$ – ограниченный обратимый оператор в $\mathcal{H}(E)$ для всех (одного) $\theta \in (0,\pi)$;

(iii) последовательность $\{t_n\} = \operatorname{supp}\mu$ лакунарна, и для некоторого $C > 0$ и всех n выполнено неравенство

$$\sum_{|t_k|\le|t_n|} \mu_k + t_n^2 \sum_{|t_k|>|t_n|} \frac{\mu_k}{t_k^2} \le C\mu_n. \tag{20}$$

Отметим, что условие (20) в точности совпадает с условием (12) из теоремы 10. Таким образом, пространства де Бранжа фоковского типа очень далеки от классического пространства Фока.

Глава 10. Бесселевы последовательности в пространствах де Бранжа с равномерной верхней плотностью.

Будем говорить, что последовательность Λ *бесселева*, если выполнено неравенство

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \left| \left(f, \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|} \right) \right|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|f(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} \le C_\Lambda \|f\|^2. \tag{21}$$

Мы будем искать описание бесселевых последовательностей Λ в геометрических терминах. Например, для вещественных бесселевых последовательностей в пространстве Пэли–Винера хорошо известно следующее описание.

Теорема 31. *Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ бесселева в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [n, n+1]\} < \infty. \tag{22}$$

Таким образом, для бесселевости последовательности Λ в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$ *необходима* конечность некоторой *верхней плотности*. Далее мы опишем пространства де Бранжа, в которых неравенство типа (22) необходимо для бесселевости вещественной последовательности Λ.

Пусть $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ – мера Кларка пространства $\mathcal{H}(E)$. Мы будем сравнивать количество точек в Λ на вещественном интервале I с количеством точек t_n, лежащих в I. Можно предположить, что конечность соответствующей плотности равносильна бесселевости.

Предположение. *Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ бесселева в пространстве*

$\mathcal{H}(E)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{UD}(\Lambda) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda\cap[t_n, t_{n+1}]\} < \infty^9. \tag{23}$$

К сожалению, условие (23) не необходимо и недостаточно для бесселевости. Пример небесселевой последовательности, удовлетворяющей условию (23), был построен в[10]. Первый пример бесселевой последовательности с бесконечной верхней плотностью (относительно последовательности $T = \{t_n\}$) был предъявлен в работе [14].

Тем не менее, для многих *классов* пространств условие (23) необходимо. Например, если множество $\{z : |E(\bar z)| < (1-\varepsilon)|E(z)|\}$ связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$, то условие (23) необходимо и достаточно. Такие функции E (из класса Эрмита–Билера) и соответствующие им внутренние функции Θ $(= E^*/E)$ называют *однокомпонентными.*

С другой стороны, если последовательность $\{t_n\}_{n>0}$ *лакунарна*, $\inf_n t_{n+1}/t_n > 1$, то условие (23) также необходимо для бесселевости.

Мы полностью опишем пространства де Бранжа, в которых условие (23) необходимо для бесселевости.

Для простоты будем считать, что $\{t_n\}$ существует для всех $n \in \mathbb{Z}$. Положим,

$$I_n = [t_n, t_{n+1}], \quad I_n^- = [t_n, (t_n + t_{n+1})/2), \quad I_n^+ = [(t_n+t_{n+1})/2, t_{n+1}),$$

$$M_n^-(x) = \mu([t_n - (x - t_n), t_n]),$$

$$P_n^-(x) = \int_{|y-t_n|>|x-t_n|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_n|^2}, \quad x \in I_n^-,$$

$$M_n^+(x) = \mu([t_{n+1}, t_{n+1} + (t_{n+1} - x)]),$$

$$P_n^+(x) = \int_{|y-t_{n+1}|>|x-t_{n+1}|} \frac{d\mu(y)}{|y-t_{n+1}|^2}, \quad x \in I_n^+.$$

Ясно, что $M_n^-(t_n) = \mu(\{t_n\}) = \mu_n$, $M_n^+(t_{n+1}) = \mu(\{t_{n+1}\}) = \mu_{n+1}$. Нам понадобится понятие *диадического размера.*

Определение 32. *Будем говорить, что положительная последовательность $\{d_n\}$ (конечная или бесконечная) имеет диадический размер m, если она лежит в объединении m диадических ячеек вида $[2^l, 2^{l+1})$, $l \in \mathbb{Z}$ и m – наименьшее число с таким свойством.*

[9] Мы неявно предполагаем, что супремум берется по тем индексам n, для которых существует t_n

[10] A. D. Baranov. Stability of bases and frames of reproducing kernels in model subspaces // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2005. Vol. 55. P. 2399–2422

Обозначим диадический размер последовательности $\{d_n\}$ за $\mathcal{D}(\{d_n\})$ (он может быть и бесконечным), например, $\mathcal{D}(n, n+1, ..., n+k) = [\log_2 \frac{n+k}{n}]+1$.

Рассмотрим разбиение вещественной оси на четыре множества:

$$\mathbb{R} = \mathcal{R}_M^- \cup \mathcal{R}_M^+ \cup \mathcal{R}_P^- \cup \mathcal{R}_P^+,$$

$$\mathcal{R}_M^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) \geq |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_M^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) \geq |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) < |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) < |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\}.$$

Положим,

$$\mathcal{A}_n^\pm = \{M_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_M^\pm, x \in I_n\}, \qquad \mathcal{B}_n^\pm = \{P_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_P^\pm, x \in I_n\}.$$

Отметим, что для каждого n множества $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ конечны.

Теорема 33. *В пространстве $\mathcal{H}(E)$ все вещественные последовательности Λ имеют конечную верхнюю плотность $\mathrm{UD}(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^+) < \infty,$$
$$\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^+) < \infty, \tag{24}$$

где последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ построены по спектральной мере μ.

В случае, если функция E однокомпонентна или $\sup_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1$, последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$ равномерно конечны, $\sup_n \#\mathcal{A}_n^\pm < \infty$. Следовательно, условие (24) выполнено автоматически.

Глава 11. Дополняемость систем из воспроизводящих ядер.

В 2007 году А. Накамура поставил следующий вопрос.

Пусть система из экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ – последовательность Рисса в $L^2(-\pi,\pi)$. Верно ли, что она может быть дополнена до полной и минимальной системы из экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$?

Отметим, что ранее К. Сейп[11] доказал, что последовательность $\{e^{\pm i(n+\sqrt{n})t}\}_{n>1}$ – последовательность Рисса, которая не может быть дополнена до базиса Рисса из экспонент. Таким образом, дополненная последовательность не всегда может быть выбрана из базисов Рисса. Тем не менее,

[11] K. Seip. On the connection between exponential bases and certain related sequence in $L^2[-\pi,\pi]$ // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 130. P. 131–160

ответ на вопрос А. Накамуры положительный. Более того, это верно для *всех* неполных последовательностей Λ.

Теорема 34. *Если* $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– неполная система в* $L^2(-\pi,\pi)$, *то существует последовательность* $S\subset\mathbb{R}$, $\Lambda\cap S=\emptyset$ *такая, что система* $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ *полна и минимальна в* $L^2(-\pi,\pi)$.

Более того, оказывается, что теорема 34 верна для *всех* пространств де Бранжа.

Теорема 35. *Если* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– неполная система в пространстве де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$, *то существует последовательность* $S\subset\mathbb{R}$, $\Lambda\cap S=\emptyset$ *такая, что система* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\cup S}$ *полна и минимальна в* $\mathcal{H}(E)$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Ю. Белов. Критерии допустимости мажорант для модельных подпространств с быстро растущим аргументом порождающей внутренней функции // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 345. С. 55–84.

[2] Ю. Белов. Необходимые условия допустимости мажорант для некоторых модельных подпространств // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. №4. С. 1–26.

[3] Ю. Белов. Модельные функции с почти предписанным модулем // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. №2. С. 3–18.

[4] Ю. Белов. Последовательности Бесселя с конечной верхней плотностью в пространствах де Бранжа // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27. №4. С. 15–27.

[5] E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov. Localization of zeros for Cauchy transforms // Int. Math. Res. Notices. 2015. Vol. 2015. P. 6699–6733.

[6] A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation // J. Funct. Anal. 2015. Vol. 268. P. 2421–2439.

[7] A. Baranov, Y. Belov. Systems of reproducing kernels and their biorthogonal: completeness or incompleteness? // Int. Math. Res. Notices. 2011. Vol. 2011. no. 22. P. 5076–5108.

[8] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels // Adv. Math. 2013. Vol. 235. P. 525–554.

[9] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. Spectral synthesis in de Branges spaces // Geom. Funct. Anal. 2015. Vol. 25. no. 2. P. 417–452.

[10] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev. A restricted shift completeness problem // J. Funct. Anal. 2012. Vol. 263. P. 1887–1893.

[11] Y. Belov. Uniqueness of Gabor series // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2015. Vol. 39. P. 545–551.

[12] Y. Belov. Complementability of exponential systems // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2015. Vol. 353. P. 215–218.

[13] Y. Belov, T. Mengestie, K. Seip. Unitary discrete Hilbert transforms // J. Anal. Math. 2010. Vol. 112. P. 383–395.

[14] Y. Belov, T. Mengestie, K. Seip. Discrete Hilbert transforms on sparse sequences // Proc. Lond. Math. Soc. 2011. Vol. 103. no.3. P. 73–105.

[15] Y. Belov, V. Havin. The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces // Springer series: Operator theory, ed. Alpay. 2015. Vol. 1. P. 581–609.

[16] A. Baranov, Y. Belov, A.Borichev, D. Yakubovich. Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for non-selfadjoint operators // Recent Trends in Analysis (Proceedings of the conference in honor of Nikolai Nikolski). Theta Foundation, Bucharest. 2013. P. 17–34.