

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ТЕПЛИЦКАЯ ЯНА ИГОРЕВНА

ГЕОМЕТРИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

01.01.04 — ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ДИССЕРТАЦИЯ  
НА СОИСКАНИЕ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА  
ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:  
ДОКТОР ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
СТЕПАНОВ Е. О.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2018

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Построение дерева Штейнера с бесконечным числом точек ветвления</b>	<b>11</b>
1.1 Постановка и история задачи . . . . .	11
1.2 Определения, обозначения и основная конструкция . . . . .	14
1.3 Основная теорема. . . . .	19
1.4 Вспомогательные леммы . . . . .	28
<b>2 Построение минимайзера максимального расстояния для окружности</b>	<b>50</b>
2.1 История и постановка задачи . . . . .	50
2.2 Обозначения и предварительные слова . . . . .	54
2.3 Основные результаты главы . . . . .	56
2.4 Схема доказательства основной теоремы главы . . . . .	59
2.5 Доказательства . . . . .	67
2.6 Доказательство центральной леммы . . . . .	82
<b>3 Самосжимающиеся кривые</b>	<b>95</b>
3.1 Введение . . . . .	95
3.2 Обозначения и предварительные замечания . . . . .	96
3.3 Основные результаты . . . . .	98
3.4 Простой случай . . . . .	100
3.4.1 От простого частного случая к более общей ситуации . . . . .	105
3.5 Предварительные построения . . . . .	107
3.5.1 Разбиение выпуклого тела . . . . .	107

3.5.2	Предварительная лемма о самосжимающихся ломаных . . .	113
3.6	Индукционная конструкция . . . . .	116
3.6.1	База индукции . . . . .	118
3.6.2	Шаг индукции . . . . .	129
3.7	Вспомогательные леммы . . . . .	135
	<b>Заключение</b>	<b>137</b>
	<b>Литература</b>	<b>139</b>
	<b>Список иллюстраций</b>	<b>143</b>

## Введение

**Актуальность темы и степень разработанности.** В диссертации решаются различные одномерные задачи оптимизации формы. Так, первые две главы работы посвящены задачам минимизации функционала длины плоских множеств при некоторых ограничениях. Такие задачи близки как к классическим задачам теории графов и теории сложности, так и к прикладным задачам оптимизации транспортных сетей. Несмотря на то, что постановки рассматриваемых задач являются достаточно классическими и элементарными, решения подобных задач зачастую очень сложны и лишь в редких случаях могут быть получены в явном виде или с помощью вычислительных методов, поскольку задачи обычно являются  $NP$ -полными. Явных примеров решения задач из первой и второй главы известно крайне мало, а в данной диссертации они построены в явном виде: в первой главе построена серия штейнеровских деревьев (каждой достаточно быстро убывающей последовательности чисел соответствует штейнеровское дерево), а во второй главе найдены решения для целого семейства замкнутых кривых (для произвольных множеств с достаточно большим радиусом кривизны). Ввиду вышеизложенного результаты данной диссертации могут оказаться полезными для тестирования различных алгоритмов. Область, сформировавшаяся вокруг изучения штейнеровских деревьев и функционалов максимального расстояния, сейчас активно развивается не только как раздел комбинаторной геометрии, но и в рамках теории сложности и в области вычислительных методов. Подробнее с классическими результатами и современными исследованиями в этой области можно ознакомиться в книгах [8] и [14] и статьях [25], [35], [27], [19], [1] и других. Стоит отметить, что А. О. Иванов и А. А. Тужилин доказали (см. [36]), что на плоскости для произвольной топологической структуры конечного дерева (удовлетворяющей вышеуказанным ограничениям) существует множество, решение задачи

Штейнера (или дерево Штейнера) для которого имеет такую структуру. Однако вопрос о существовании множества, дерево Штейнера которого содержит бесконечное (счетное) количество точек ветвления, оставался до последнего времени открытым: эта задача решена в первой главе диссертации.

Третья глава посвящена бурно развивающейся в последнее время тематике самосжимающихся кривых. Начавшаяся с изучения метода градиентного спуска для выпуклых и квазивыпуклых функций в статьях [13] и [21], область получила активное продолжение в статьях [10, 21, 12, 11]. В недавней работе [26] рассматриваются самосжимающиеся кривые не только в евклидовых пространствах, но и на поверхностях Адамара и в CAT(0)-пространствах, а в работе [11] рассматриваются более широкие, чем класс самосжимающихся кривых, классы  $\lambda$ -кривых и кривых, удовлетворяющих  $\lambda$ -коническому свойству. В обеих работах цитируются и используются результаты соискателя.

В работе [13] доказано, что каждая самосжимающаяся кривая, лежащая в ограниченном подмножестве  $\mathbb{R}^2$  (с обычным расстоянием Евклида), обязательно имеет конечную длину, т.е. является *спрямляемой*. Этот результат в дальнейшем был расширен до  $\mathbb{R}^n$  с произвольным  $n \geq 1$ , также с евклидовой нормой, в [10] (и, независимо, в [21] для непрерывных самосжимающихся кривых) и для произвольного конечномерного риманова многообразия в [12]. Это порождает естественный вопрос, можно ли распространить утверждения на самосжимающиеся кривые в  $\mathbb{R}^n$  с произвольной нормой. Этот вопрос был поставлен в [18], и в той же статье частичный ответ для равномерно выпуклых гладких ( $C^2$ ) норм был дан для случая  $n = 2$ . В третьей главе диссертации мы даем положительный ответ для случая произвольной, не обязательно гладкой, нормы в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна.

**Цели и задачи работы.** Цель работы заключается в решении одномерных задач оптимизации формы, возникающих из математической физики, вариационных задач и уравнений в частных производных. А именно, в нахождении самого короткого связного множества, содержащего заданное множество (задача Штейнера); в нахождении самого короткого связного множества, такого, что заданное множество  $M$  находится в его  $r$ -окрестности для заданного  $r > 0$  (в невырожденных

случаях решение этой задачи совпадает с решением задачи о поиске минимайзера для функционала максимального расстояния при ограничениях на длину); а также в изучении самосжимающихся кривых (то есть таких кривых  $\gamma$ , что условие  $\text{dist}(\gamma(t_2), \gamma(t_3)) \leq \text{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_3))$  выполняется для любых  $t_1 < t_2 < t_3$ ).

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми. Пример, построенный в главе 1, является первым примером штейнеровского дерева с бесконечным (счетным) числом точек ветвления. Поиск минимайзеров функционала максимального расстояния даже для конкретного плоского множества  $M$  является чрезвычайно трудной задачей; положительное решение гипотезы Миранды, Степанова и Паолини о множестве минимайзеров для окружности  $M = B_R(O)$  радиуса  $R$  (в случае  $R < 4.98r$ ) является первым нетривиальным примером нахождения множества минимайзеров в явном виде. Также решение обобщается на случай замкнутых кривых с минимальным радиусом кривизны, превосходящим  $5r$ .

Основная теорема главы 3 (теорема 3.3.2) обобщает и распространяет на новые пространства все известные ранее результаты о конечности длины самосжимающихся кривых.

**Практическая и теоретическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Результаты и идеи работы могут быть полезны как в научно-теоретических, так и в практических (вычислительных) целях. Например, идеи первой главы были использованы в вычислительной работе [31], идеи второй главы применимы при поиске минимайзеров максимального расстояния для других заданных множеств, а третья глава может найти применение в теории дифференциальных уравнений. Результаты первой и третьей глав, несмотря на небольшое время, прошедшее с их публикации, уже многократно цитировались, в том числе и ведущими специалистами по теме исследований [24, 11, 26].

**Достоверность результатов и апробация работы.** Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математических доказательств. Результаты работы докладывались:

- На конференции Fourth Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics, Турку, Финляндия, 2017;
- На Петербургском геометрическом семинаре им А. Д. Александрова, Санкт-Петербург, Россия, 2016;
- На конференции Discussion Meeting on Topology and Groups, IISER Мохали, Индия, 2016;
- На семинаре Nonlinear Analysis and Optimization Seminar, Технион, Израиль, 2016;
- На семинаре Математическое моделирование транспортных потоков, Москва, Россия, 2014;
- На семинаре Calcolo delle Variazioni e Analisi Geometrica University of Pisa, Пиза, Италия, 2013.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы работы [30], [32], [9] и [37]. Все они опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. В работе [30] научному руководителю принадлежит постановка задачи, схема доказательства была выработана авторами совместно, соискателю также принадлежат леммы А.3 и А.6, а также замечание А.7. В статье [9] диссертанту принадлежит идея разбиения выпуклой оболочки множества  $M$  на два множества (кольцо и внутренняя фигура) и последующий анализ поведения минимайзера внутри каждого из множеств, реализованный в леммах 2.7 и 2.8. Также диссертанту принадлежит разрешение проблемы с бесконечным количеством “особых” точек (лемма 2.12); центральная лемма (лемма 2.22), включающая в себя более десяти случаев, принадлежит соавторам в равной мере. В работе [32] научному руководителю принадлежит постановка задачи, соискатель же предложил решение задачи в простом случае, после чего возникающие при переходе к общему случаю трудности решались соавторами совместно.

**Методология и методы исследования.** В первой главе автор сочетает такие комбинаторные методы, как подвес графа за вершину и дальнейший анализ уров-

ней графа с классическими планиметрическими рассуждениями. Во второй главе используются методы локального анализа, разработанные специально для этой задачи. В третьей главе используется дискретизация кривой, после чего применяется индукция, повышающая размерность, а также нетривиальная математическая редукция внутри каждой размерности.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из трех глав, каждая из которых посвящена отдельной задаче. Работа занимает 144 страницы и содержит 35 рисунков. Список литературы включает 37 наименований.

**Благодарности.** Благодарю научного руководителя за постановку задач и потраченное время, Данилу Черкашина за то, что эти результаты стали диссертацией, Иосифа Гордона за то, что в диссертации меньше ошибок, чем могло бы быть, Федора Петрова за ценные замечания, Андрея Валерьевича Малютина и Петра Георгиевича Зографа за организационную помощь.

#### **Положения, выносимые на защиту.**

- Построен пример полного (то есть не имеющего вершин степени два) дерева Штейнера со счетным числом точек ветвления;
- Доказана гипотеза Миранды, Паолини и Степанова о виде минимайзера функционала максимального расстояния для окружности достаточно большого (относительного заданного ограничения на функционал) радиуса;
- Описаны множества минимайзеров и локальных минимайзеров функционала максимального расстояния для множеств с достаточно большим (относительного заданного ограничения на функционал) минимальным радиусом кривизны;
- Доказано, что для произвольной нормы в  $\mathbb{R}^n$  самосжимающиеся по ней кривые, лежащие внутри компакта, имеют конечную длину.



**Содержание работы.** Глава 1 посвящена задаче Штейнера. Задачей Штейнера называется задача нахождения множества  $S$  минимальной длины, соединяющего заданное компактное подмножество  $C$  метрического пространства  $X$ , то есть задача нахождения элемента множества  $St$ :

$$St(C) := \{S \in \mathcal{N}tw(C) : \mathcal{H}^1(S) \leq \mathcal{H}^1(S') \text{ для всех } S' \in \mathcal{N}tw(C)\},$$

где

$$\mathcal{N}tw(C) := \{S \subset X : S \cup C \text{ связно}\}, \text{ а}$$

$\mathcal{H}^1$  — одномерная (линейная) мера Хаусдорфа.

Известно (см. [29]), что при определенных естественных ограничениях для каждого  $S \in St(C)$  каждая компонента связности множества  $\overline{S \setminus C}$  является топологическим деревом. В частности, при  $X = \mathbb{R}^2$  каждая такая компонента состоит из не более чем счетного числа прямолинейных отрезков, а степень каждой вершины не превосходит 3, откуда следует, что число вершин степени 3 (точек ветвления) не более чем счетно. А. О. Иванов и А. А. Тужилин доказали (см. [36]), что на плоскости для произвольной топологической структуры конечного дерева (удовлетворяющей вышеуказанным ограничениям) существует множество, решение задачи Штейнера (или дерево Штейнера) для которого имеет такую структуру. Однако вопрос о существовании множества, дерево Штейнера которого содержит бесконечное (счетное) количество точек ветвления, оставался до последнего времени открытым. Мы строим пример такого (вполне несвязного) множества в главе 1.

Глава 2 посвящена минимайзерам максимального расстояния и локальным минимайзерам максимального расстояния. Задача ставится следующим образом: для заданного компактного множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим функционал максимального расстояния

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma),$$

где  $\Sigma$  является замкнутым подмножеством плоскости, а  $\text{dist}(y, \Sigma)$  означает евклидово расстояние между  $y$  и  $\Sigma$ . Рассмотрим класс замкнутых связных множеств  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  таких, что  $F_M(\Sigma) \leq r$  для заданного  $r > 0$ . Нас интересуют свойства множеств, обладающих минимальной длиной (линейной мерой Хаусдорфа)  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$  сре-

ди множеств этого класса. Такие множества мы будем называть *минимайзерами*. В главе 2 мы находим все глобальные и локальные минимайзеры максимального расстояния для замкнутых кривых с большим радиусом кривизны, в частности для окружности большого радиуса (то есть для ситуации, когда множество  $M$  является окружностью с радиусом  $R$ , достаточно большим относительно  $r$ ), доказывая тем самым гипотезу Миранды, Паолини и Степанова для случая  $R \geq 4.98r$ .

Глава 3 содержит доказательство того, что для произвольной нормы в  $\mathbb{R}^n$  самосжимающаяся по ней кривая, лежащая внутри компакта, имеет конечную длину. Такие кривые в евклидовой норме появляются в статьях [13] и [21] как кривые градиентного спуска для выпуклых функций и для функций с выпуклыми линиями уровня (иногда также называемых квазивыпуклыми). В работе [13] доказано, что каждая самосжимающаяся кривая, лежащая в ограниченном подмножестве плоскости  $\mathbb{R}^2$  (с обычным расстоянием Евклида), обязательно имеет конечную длину, т.е. является *спрямляемой*. Этот результат в дальнейшем был расширен до  $\mathbb{R}^n$  с произвольным  $n \geq 1$ , также с евклидовой нормой, в [10] (и, независимо, в [21] — для непрерывных самосжимающихся кривых) и в [12] — для произвольного конечномерного риманова многообразия. Применяемая в главе 3 комбинаторная по духу техника дает возможность работать с произвольными, не обязательно гладкими, нормами в конечномерном пространстве, что позволяет доказать утверждение в существенно более общем случае, а именно, в пространстве произвольной конечной размерности с произвольной нормой. Для бесконечной же размерности утверждение неверно.

# Глава 1. Построение дерева Штейнера с бесконечным числом точек ветвления

В этой главе мы построим конкретный и достаточно естественный пример бесконечного дерева Штейнера, соединяющего некоторое “фрактальное” множество точек (на самом деле, гомеоморфное канторову множеству и, в частности, компактное, несчетное и вполне несвязное). Задачей Штейнера, у которой есть много более или менее эквивалентных формулировок, называется задача нахождения множества  $S$  минимальной длины (одномерной меры Хаусдорфа  $\mathcal{H}^1$ ), соединяющего заданное компактное подмножество  $C$  метрического пространства  $X$ . Известно (см. [29]), что при естественных ограничениях для каждого  $S \in \mathcal{St}(C)$  каждая компонента связности множества  $\overline{S \setminus C}$  является топологическим деревом. В частности, при  $X = \mathbb{R}^2$  такая компонента состоит из не более чем счетного числа прямолинейных отрезков, а степень каждой вершины не превосходит 3, откуда следует, что число вершин степени 3 (точек ветвления) не более чем счетно. Мы построим пример такого вполне несвязного множества  $C$ , что  $S$  имеет бесконечное число точек ветвления.

## 1.1. Постановка и история задачи.

Задачей Штейнера называется задача нахождения множества  $S$  минимальной длины, соединяющего заданное компактное подмножество  $C$  метрического пространства  $X$ , то есть задача нахождения элемента множества  $\mathcal{St}$ :

$$\mathcal{St}(C) := \{S \in \mathcal{Ntw}(C) : \mathcal{H}^1(S) \leq \mathcal{H}^1(S') \text{ для всех } S' \in \mathcal{Ntw}(C)\},$$

где

$$\mathcal{N}tw(C) := \{S \subset X : S \cup C \text{ связно}\}.$$

Далее длину минимального дерева Штейнера для множества  $C$  будем обозначать через  $\mathcal{S}(C)$ :  $\mathcal{S}(C) := \mathcal{H}^1(S)$ , где  $S \in \mathcal{St}(C)$ .

Эта задача впервые была сформулирована в работах чешских математиков Ярника и Кесслера, но приобрела популярность только после того, как Курант и Роббинс опубликовали ее в своей монографии “Что такое математика?”. Сейчас эта задача активно изучается, имеется значительное количество относящейся к ней литературы (например, книга А. О. Иванова и А. А. Тужилина [35]). Обычно задача ставится в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  или даже на плоскости ( $X = \mathbb{R}^2$ ), при этом множество точек  $C$ , которые надо соединить, является конечным, а решение ищется среди конечных графов, состоящих из отрезков. Упомянутая нами общая постановка задачи ( $X$  — полное метрическое пространство,  $C$  — произвольное компактное, не обязательно конечное, множество точек) рассмотрена в работе Э. Паолини и Е. Степанова [29], где показано, что если решение  $S$  имеет конечную длину, то

- $S \cup C$  компактно;
- $S \setminus C$  содержит не более чем счетное число компонент связности, каждая из которых имеет строго положительную длину;
- замыкание решения  $S$  не содержит циклов (гомеоморфных образов окружности);
- замыкание каждой компоненты связности множества  $S$  является деревом с концевыми вершинами из множества  $C$  и не более, чем счетным числом точек ветвления. Кроме того, оно имеет не более одной концевой вершины на каждой компоненте связности множества  $C$ , а все точки ветвления имеют конечную степень;
- если количество компонент связности множества  $C$  конечно, то количество компонент связности множества  $S \setminus C$  также конечно, а замыкание каждой из

них является конечным геодезическим вложенным графом (то есть графом конечной длины, каждое ребро которого является отрезком геодезической кривой) с концевыми вершинами из множества  $C$ , причем на каждой компоненте связности множества  $C$  оно имеет не больше одной концевой вершины;

- для каждого открытого множества  $U \subset X$ , содержащего  $C$ , множество  $S \setminus U$  является подмножеством конечного геодезического вложенного графа. Более того, для почти всех  $\varepsilon > 0$  для множества  $U = \{x : \text{dist}(x, C) < \varepsilon\}$  множество  $S \setminus U$  является конечным вложенным геодезическим графом с конечным количеством компонент связности и конечным количеством точек ветвления;

В частном случае, когда полное метрическое пространство  $X$  является евклидовой плоскостью, известно следующее: для любого заданного компакта  $C$  замыкание каждой компоненты связности решения  $S$  является деревом, состоящим из прямолинейных отрезков, и никакая его вершина не имеет степень больше трех, а два отрезка, имеющих общую вершину, образуют угол с раствором хотя бы  $2\pi/3$  (При этом если точка из множества  $S \setminus C$  имеет степень 2, то инцидентные ей отрезки лежат на одной прямой).

Таким образом, если  $S$  является решением задачи Штейнера для заданного множества  $C$ , не содержащего циклов, то  $\Sigma := S \cup C$  также не содержит циклов. В таком случае множество  $\Sigma$  обычно называют деревом Штейнера (штейнеровским деревом), которое называют полным (неприводимым, несводимым), если множество  $\Sigma \setminus C$  связно.

Стоит отметить, что явных решений задач Штейнера известно сравнительно немного, а известные примеры, как правило, ограничиваются конечным множеством  $C$ . При этом доказательство того, что конкретное множество является оптимальным, почти всегда нетривиально. И еще менее тривиальным обычно оказывается доказательство единственности штейнеровского множества для данного  $C$ . Не известны никакие универсальные методы для решения таких задач. В качестве перспективного (хотя и не универсального, но позволяющего в некоторых случаях доказать оптимальность конкретного множества) подхода стоит отметить метод калибровки, предложенный в работе А. Маркеше и А. Массачези [24] и наш метод, изложенный в главе 1 (и позже использованный в работе [31]). А. О. Иванов

и А. А. Тужилин доказали (см. [36]), что на плоскости для произвольной топологической структуры конечного дерева (удовлетворяющей вышеуказанным ограничениям) существует множество, решение задачи Штейнера (или дерево Штейнера) для которого имеет такую структуру. Однако вопрос о существовании множества, дерево Штейнера которого содержит бесконечное (счетное) количество точек ветвления, оставался до последнего времени открытым. В связи с этим важной задачей являлось построение примера штейнеровского дерева, соединяющего несчетное множество точек и являющегося полным деревом со счетным числом точек ветвления. Данная глава диссертации посвящена построению такого примера, причем построенное дерево будет единственным деревом Штейнера для своих концевых вершин. Также в ней строится семейство штейнеровских деревьев с конечным числом вершин.

## 1.2. Определения, обозначения и основная конструкция

Для подмножества  $D \subset X$  метрического пространства  $X$  символом  $\bar{D}$  мы обозначаем его замыкание, символом  $\partial D$  — его топологическую границу, символом  $\mathcal{H}^1(D)$  — его одномерную меру Хаусдорфа, для любого  $x \in X$  мы полагаем  $\text{dist}(x, D) := \inf\{d(x, y) : y \in D\}$  и обозначаем через  $B_\varepsilon(D) := \{x \in X : \text{dist}(x, D) < \varepsilon\}$  его  $\varepsilon$ -окрестность. Евклидову норму в  $\mathbb{R}^2$  будем обозначать  $|\cdot|$ . Для точек  $A, B$  на плоскости мы полагаем  $(AB)$ ,  $[AB]$  и  $[AB)$  (или  $(AB]$ ) соответственно прямой, отрезком или лучом.

Будем называть *точкой Ферма* треугольника точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. Такая точка единственна, в дальнейшем будем обозначать ее  $F(A, B, C)$ . Известно, что если все углы треугольника меньше  $2\pi/3$ , то его точка Ферма находится внутри треугольника, и все стороны видны из нее под углом  $2\pi/3$ .

Выберем положительное число  $L$ , последовательность положительных и не превосходящих 1 чисел  $\{\lambda_j\}$  и опишем построение последовательностей точек  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  в  $\mathbb{R}^2$ , где  $n = 1, 2, \dots$  (см. рис. 1.1, 1.2, 1.3):

- $y_0 := (-L + 2\lambda_1 L, 0)$ ,

- $y_1 := (0, 0)$ ,  $x_1 := (2\lambda_{g(1)}L, 0)$ , где  $g(j) := \lfloor \log_2 j + 1 \rfloor$ ,
- $z_n := (x_n + y_n)/2$  при  $n \geq 1$ ,
- точки  $x_n, x_{2n}, x_{2n+1}$  — три вершины равностороннего треугольника, вписанного в окружность с центром  $z_n$  и радиусом  $|x_n - z_n|$ , перечисленные против часовой стрелки,
- $y_n := 2\lambda_{g(n)}y_{\lfloor n/2 \rfloor} + (1 - 2\lambda_{g(n)})x_n$  при  $n \geq 1$  (заметим, что  $y_n = F(y_{\lfloor n/2 \rfloor}, x_{2n}, x_{2n+1})$ ).

Точку  $x_j$  будем называть вершиной  $i$ -го поколения, а точку  $y_j$  — точкой Ферма  $i$ -го поколения, если  $i := g(j)$ .

При  $k = 0, 1, \dots$  определим следующие множества:

$$\sigma_k := [y_0, y_1] \cup \bigcup_{n=1}^{2^{k-1}} [y_n, y_{2n}] \cup [y_n, y_{2n+1}],$$

$$\Sigma_k := \sigma_k \cup \bigcup_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} [y_n, x_n] \text{ — дерево } k\text{-го поколения,}$$

$$A_k := \{x_{2^k}, x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}-1}\} \text{ — вершины } k\text{-го поколения,}$$

$$S_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k, \quad \Sigma_\infty := \overline{S_\infty}, \quad A_\infty := \Sigma_\infty \setminus S_\infty,$$

$$\text{Gen}(x_p) := \{x_{2^p}, x_{2^p+1}, x_{4^p} \dots x_{2^{k_p}} \dots x_{2^{k_p+2^k-1}} \dots\}$$

— множество “потомков” вершины  $x_p$ ,

$$\text{Gen}_k(x_p) := A_k \cap \overline{\text{Gen}(x_p)} \text{ — множество “потомков” вершины } x_p \text{ } k\text{-го поколения.}$$

Будем называть множество  $\Sigma_n$  *эталонным деревом* для множества точек  $\{y_0\} \cup A_n$  (где  $n$  — конечное или  $n = \infty$ ). Заметим, что  $\Sigma_n$  определяется числом  $L$  и набором коэффициентов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Несложно сделать следующее наблюдение.

**Теорема 1.2.1.** *Найдется такое  $\bar{\lambda} > 0$ , что если все  $\lambda_k < \bar{\lambda}$ , то для произвольного, не обязательно конечного,  $n$  множество  $\Sigma_n$  не содержит циклов.*

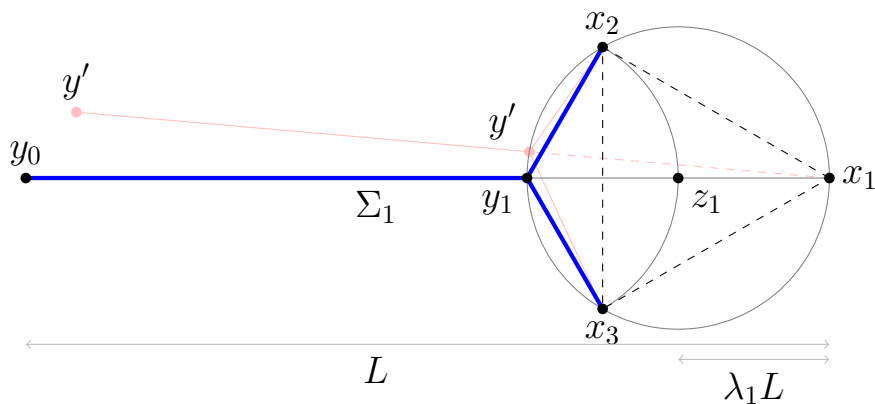


Рис. 1.1: Первая тренога в нашей конструкции.

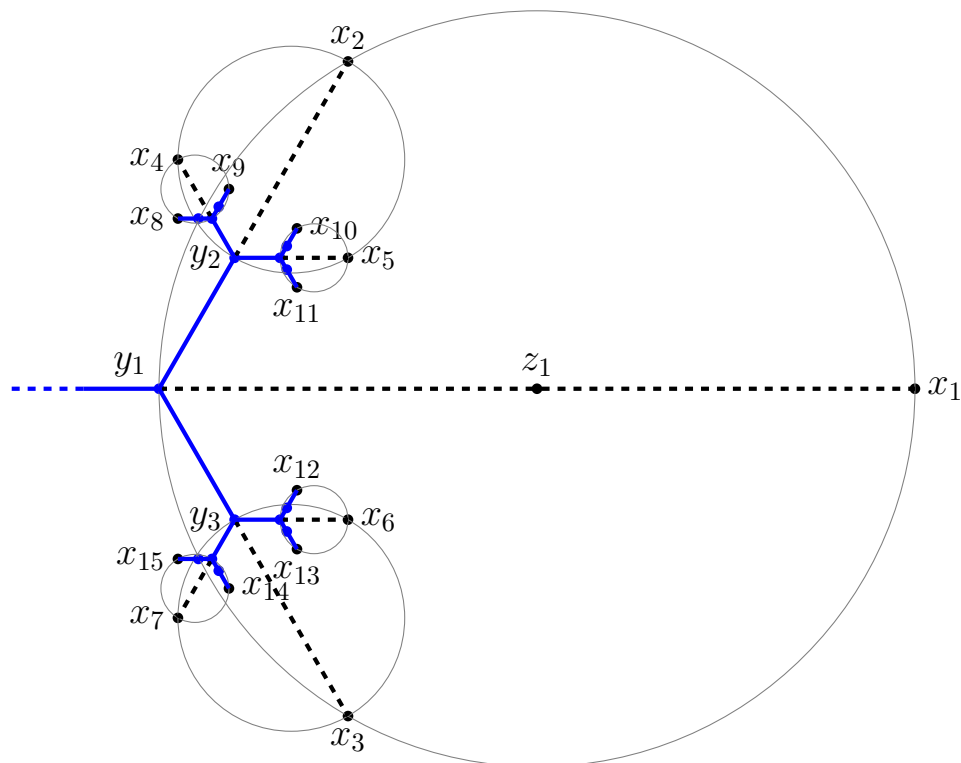


Рис. 1.2: Три шага построения конструкции. Синим выделено множество  $\Sigma_3$ .



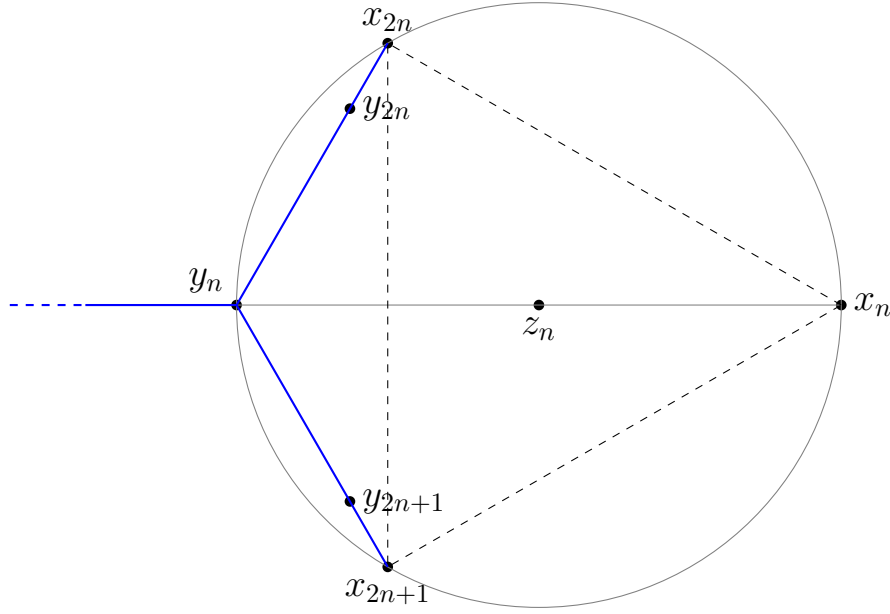


Рис. 1.3: Шаг построения эталонного дерева.

*Доказательство.* Заметим, что расстояние  $|y_1 x_{i_k}|$ , где  $x_{i_k}$  — вершина  $k$ -го поколения, не превосходит суммы

$$\begin{aligned} & |y_1 y_{i_1}| + |y_{i_1} y_{i_2}| + \dots + |y_{i_{k-1}} y_{i_k}| + |y_{i_k} x_{i_k}| \leq |y_1 x_{i_1}| + |y_{i_1} x_{i_2}| + \dots + |y_{i_{k-1}} x_{i_k}| + |y_{i_k} x_{i_k}| = \\ & = |y_0 x_1| (\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k) < |y_0 x_1| (\bar{\lambda} + \dots \bar{\lambda}^k) = \bar{\lambda} |y_0 x_1| \frac{1 - \bar{\lambda}^{k+1}}{1 - \bar{\lambda}} < \frac{|y_0 x_1| \bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Тогда, ввиду самоподобной структуры эталонного дерева,

$$\begin{aligned} |y_0 x_{i_k}| & \geq |y_1 y_0| - |y_1 x_{i_k}| > |y_0 x_1| \left( 1 - \bar{\lambda} - \frac{1 - \bar{\lambda}^{k+1}}{1 - \bar{\lambda}} \right) > \\ & |y_0 x_1| \left( 1 - \bar{\lambda} - \frac{\bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda}} \bar{\lambda} \right) > |y_0 x_1| \frac{1 - 3\bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda}} > 0 \end{aligned}$$

при  $\bar{\lambda} < 1/3$  и  $k \geq 1$ . Аналогично, выполняется  $|y_0 x_{i_{k+1}}| > 0$  и  $|y_1 x_{j_{k+1}}| > 0$ . Тогда  $\text{dist}([y_0 y_1], [x_{i_k} x_{i_{k+1}}]) > 0$  для произвольного  $k \geq 1$  при  $\lambda < 1/3$ . Таким образом, несложно видеть, что дерево не имеет самопересечений на отрезке  $[y_0 y_1]$ . Самоподобная структура дерева влечет отсутствие самопересечений и на отрезках  $[y_1 y_2]$ ,  $[y_2 y_3]$  и т.д.. Требуемое утверждение доказано.  $\square$

**Замечание 1.2.2.** Для эталонного дерева выполняется следующее

$$\angle y_{2j}y_jy_{2j+1} = \angle y_{2j}y_jy_{\lfloor j/2 \rfloor} = \angle y_{\lfloor j/2 \rfloor}y_jy_{2j+1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Действительно, по построению, верно  $y_j = F(y_{\lfloor j/2 \rfloor}, x_{2j}, x_{2j+1})$ , а все углы треугольника  $\Delta y_{2j}y_{\lfloor j/2 \rfloor}y_{2j+1}$  меньше  $2\pi/3$  и, значит, все стороны треугольника видны из точки Ферма под углом  $2\pi/3$ .

**Замечание 1.2.3.** Заметим, что радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника  $\Delta x_{2j}x_{2j+1}x_j$ , составляет  $\lambda_{g(j)} \dots \lambda_1 L = |y_jx_{2j}| = |y_jx_{2j+1}|$ , а центр этой окружности находится в точке  $z_j = F(x_{2j}, x_{2j+1}, x_j)$ , лежащей на отрезке  $[y_jx_j]$ .

**Лемма 1.2.4.** Для любой точки  $c \in A_\infty$  существует сходящаяся к ней последовательность  $\{a_k\}$ , где  $a_k \in A_k$  и  $k \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную точку  $c \in A_\infty = \overline{S_\infty} \setminus S_\infty$ . Существует последовательность  $c_k \in S_\infty = \bigcup_{k=1}^\infty \sigma_k$ , сходящаяся к  $c$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $c_k \in \sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$  (если бы такой подпоследовательности не существовало, то нашелся бы номер  $n$  такой, что  $c \in \overline{\sigma_n} \subset \sigma_{n+1} \subset S_\infty$ ). Тогда  $\text{dist}(c_k, A_k) \leq \lambda_k \dots \lambda_1 L \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку множества  $A_k$  компактны, найдутся вершины  $a_k \in A_k$ , реализующие это расстояние. Но тогда

$$|c - a_k| \leq |c - c_k| + |c_k - a_k| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

□

**Лемма 1.2.5.** В эталонном дереве (построенным с убывающей последовательностью коэффициентов  $\{\lambda_k\}$ :  $\lambda_1 < 1/2$ ) множество  $\text{Gen}(x_n)$  содержится внутри круга  $B_{4L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)}}(x_n)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_p \in \text{Gen}(x_n)$ . Имеем

$$\text{dist}(x_n, x_p) \leq \text{dist}(x_n, y_n) + \text{dist}(y_n, x_p).$$

Оценим  $\text{dist}(y_n, x_p)$ , учитывая, что

$$\text{dist}(y_{\lfloor j/2 \rfloor}, y_j) < \text{dist}(y_{\lfloor j/2 \rfloor}, x_j) = L\lambda_1 \dots \lambda_{g(j)-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{dist}(y_n, x_p) &\leq \text{dist}(y_{\lfloor p/2 \rfloor}, x_p) + \sum_{l=1}^{g(p)-g(n)-1} \text{dist}(y_{\lfloor p/2^l \rfloor}, y_{\lfloor p/2^{l+1} \rfloor}) \\ &\leq L\lambda_1 \dots \lambda_{g(p)-1} + \sum_{l=1}^{g(p)-g(n)-1} L\lambda_1 \dots \lambda_l \\ &= \sum_{l=g(n)}^{g(p)-1} L\lambda_1 \dots \lambda_l = L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)} \left(1 + \sum_{l=g(n)+1}^{g(p)-1} \lambda_{g(n)+1} \dots \lambda_l\right) \\ &\leq L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)} \sum_{l=0}^{g(p)-g(n)-1} \lambda_{g(n)+1}^l \\ &\leq L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)} \frac{1 - \lambda_{g(n)+1}^{g(p)-g(n)}}{1 - \lambda_{g(n)+1}} < 2L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)}, \end{aligned}$$

ПОТОМУ ЧТО

$$\frac{1 - \lambda_{g(n)+1}^{m-g(n)}}{1 - \lambda_{g(n)+1}} < \frac{1}{1 - \lambda_{g(n)+1}} < 2,$$

так как  $\lambda_{g(n)+1} < 1/2$ . При этом

$$\text{dist}(y_n, x_n) = 2L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)}.$$

Таким образом,

$$\text{dist}(x_n, x_p) < 4L\lambda_1 \dots \lambda_{g(n)}.$$

□

### 1.3. Основная теорема.

Основным результатом настоящей главы является следующее утверждение.

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\Sigma_k$  (где  $k$  конечно или  $k = \infty$ ) — эталонное дерево, построенное с убывающей положительной последовательностью коэффициентов  $\lambda_j$ , удовлетворяющей следующему условию:

$$\lambda_j \leq 0.0002 \quad (\text{при } j \geq 2), \quad (1.1)$$

$$120 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \pi/42. \quad (1.2)$$

Тогда  $\Sigma_k \in \mathcal{St}(\{y_0\} \cup A_k)$ , и других деревьев в множестве  $\mathcal{St}(\{y_0\} \cup A_k)$  нет.

*Доказательство.* Теорема будет доказана в несколько шагов. На первом шаге мы докажем, что если корневая точка  $\{y'_0\}$  не сильно отклоняется от своего эталонного положения  $\{y_0\}$ , то оптимальное дерево имеет структуру, похожую на структуру эталонного дерева. На втором шаге покажем, что любое конечное дерево такой структуры, соединяющее вершины из множества  $\{y_0\} \cup A_k$  для произвольного (не обязательно конечного)  $k$ , имеет длину  $|y'_0, x_1|$ . Таким образом, первые два шага означают, что любое оптимальное дерево для конечного или счетного множества вершин  $\{y_0\} \cup A_k$  имеет длину  $|y'_0, x_1|$ . Тем самым автоматически получим оптимальность эталонного дерева. И, наконец, на третьем шаге докажем единственность оптимального дерева с корнем  $y_0$ .

**Шаг 1.** Для произвольного оптимального штейнеровского множества  $\Sigma'_k \in \mathcal{St}(\{y'_0\} \cup A_k)$  докажем, что оно имеет структуру, похожую на структуру эталонного дерева. А именно, оно является деревом, имеющим  $2^k - 1$  точек ветвления  $y'_j$ , то есть

$$\Sigma'_k = \sigma'_k \cup \bigcup_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} [y'_j, x_j],$$

где

$$\sigma'_k := [y'_0, y'_1] \cup \bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} ([y'_j, y'_{2j}] \cup [y'_j, y'_{2j+1}]).$$

При этом

$$y'_j = F(y'_{2j}, y'_{[j/2]}, y'_{2j+1}), \quad j = 0, \dots, 2^{k-2},$$

Поэтому выполняются равенства

$$\angle y'_{2j} y'_j y'_{2j+1} = \angle y'_{2j} y'_j y'_{\lfloor j/2 \rfloor} = \angle y'_{\lfloor j/2 \rfloor} y'_j y'_{2j+1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Кроме того, верно

$$y'_j = F(x_{2j}, x_{2j+1}, y'_{\lfloor j/2 \rfloor}), \quad j = 2^{k-2}, \dots, 2^{k-1},$$

а значит, выполнено и

$$\angle x_{2j} y'_j x_{2j+1} = \angle x_{2j} y'_j y'_{\lfloor j/2 \rfloor} = \angle y'_{\lfloor j/2 \rfloor} y'_j x_{2j+1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Если дерево удовлетворяет описанным выше свойствам, будем говорить, что оно обладает *правильной* структурой. Эталонное дерево, согласно замечанию 1.2.2, обладает правильной структурой. Точку  $y'_j$  будем называть точкой ветвления  $i$ -го поколения, если  $i = g(j)$ . Определим последовательность  $\beta_i$ , положив

$$\begin{aligned} \beta_0 &:= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21}, \\ \beta_{i+1} &:= \beta_i + 120\lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

Тогда, ввиду предположения (1.2), для каждого индекса  $i$  будет выполняться неравенство

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21} < \beta_i < \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{42}.$$

Будем рассматривать только такие точки  $y'_0$ , что  $\angle y'_0 x_1 y_0 < \beta_1$ . Зафиксируем такую точку  $y'_0$ . Индукцией по поколению  $i$  докажем следующее утверждение: для каждого  $1 \leq i \leq k$  оптимальное дерево  $\Sigma'_k$  вне кругов  $\bigsqcup_{g(l)=i+1} B_{20\lambda_{i+1}\dots\lambda_1 L}(x_l)$  является деревом  $i$ -го поколения с правильной структурой (т.е. деревом правильной структуры, имеющим точки ветвления поколения вплоть до  $i$ -го), корнем  $y'_0$  и множеством вершин  $x'_l$ , лежащих на объединении окружностей  $\bigsqcup_{g(l)=i+1} \partial B_{20\lambda_{i+1}\dots\lambda_1 L}(x_l)$ , по одной вершине на каждой окружности. При этом каждая точка  $y'_j$   $i$ -го поколения находится внутри угла

с биссектрисой  $[x_{2j}y_j)$  и величиной  $2\beta_{i+1}$  и вне круга  $B_{(40\lambda_{i+2}L+1)\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(z_{2j})$ , а также внутри угла с биссектрисой  $[x_{2j+1}y_j)$  и величиной  $2\beta_{i+1}$  и вне круга  $B_{(40\lambda_{i+2}L+1)\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(z_{2j+1})$ . База:  $i = 1$ . Согласно лемме 1.2.5 точки множества  $A_k$  лежат внутри кругов с центрами в  $x_2$  и  $x_3$  и радиусом  $4\lambda_1\lambda_2L$ . Тогда, поскольку для точек  $T' := y'_0$ ,  $T := y_0$ ,  $V := x_2$ ,  $U := x_3$  и для множеств  $A := A_k$ ,  $A_V := \text{Gen}(x_2)$ ,  $A_U := \text{Gen}(x_3)$  выполнены условия леммы 1.4.6, то существуют такие точки  $x'_2 := V' \in \partial B_{20\lambda_2\lambda_1L}(x_2)$  и  $x'_3 := U' \in \partial B_{20\lambda_2\lambda_1L}(x_3)$ , что вне кругов  $B_{20\lambda_2\lambda_1L}(x_2)$  и  $B_{20\lambda_2\lambda_1L}(x_3)$  оптимальное для  $A'_k$  дерево совпадает с треногой, соединяющей точки  $y'_0$ ,  $U'$ ,  $V'$  и имеющей точку ветвления  $y'_1 = F(T', U', V')$ . Поскольку точки  $T$ ,  $T'$ ,  $U'$ ,  $V'$ ,  $W := x_1$  удовлетворяют условию леммы 1.4.9 при  $\beta := \beta_2$  и  $\alpha := \angle T'WT < \beta_1 = \beta_2 - 120\lambda_2$ , точка  $y'_1$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_2y_1)$  и величиной  $2\beta_2$ , а ввиду замечания 1.4.10 не попадает в круг  $B_{(40\lambda_3L+1)\lambda_2\lambda_1L}(z_2)$  (применяя замечание 1.4.10, стоит учитывать, что в этой ситуации  $O_V = z_2$ ). Верно и симметричное утверждение: точка  $y'_1$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_3y_1)$  и величиной  $2\beta_2$  и не попадает в круг  $B_{(40\lambda_3L+1)\lambda_2\lambda_1L}(z_3)$ . Тем самым, база индукции доказана.

*Индукционный переход.* Рассмотрим произвольную точку ветвления  $i$ -го поколения ( $y'_j : g(j) = i$ ) (она существует ввиду предположения индукции). Ввиду индукционного предположения, точка  $y'_j$  находится внутри угла с биссектрисой  $[x_{2j}y_j)$  и величиной  $2\beta_{i+1}$  (то есть  $\angle y'_j x_{2j} y_j < \beta_{i+1}$ ) и не попадает в круг  $B_{(40\lambda_{i+2}L+1)\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(z_{2j})$ . Из индукционного предположения известно, что  $\Sigma'_k$  содержит поддерево, соединяющее  $y'_j$  с  $\partial B_{20\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(x_{2j})$ , а значит, поскольку круги с радиусом  $20\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L$  и центром в вершинах поколения  $i + 1$  (то есть круги  $B_{20\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(x_l)$ , где  $g(l) = i + 1$ ) попарно не пересекаются, а вне этих кругов вид  $\Sigma'_k$  известен из индукционного предположения, то дерево  $\Sigma'_k$  содержит и поддерево, соединяющее  $y'_j$  и  $\text{Gen}(x_{2j}) \subset B_{4\lambda_{i+1}\dots\lambda_1L}(x_{2j})$ , причем соединяющее, очевидно, оптимальным образом. Тогда, поскольку ввиду леммы 1.2.5

$$\text{Gen}(x_{2j}) = \text{Gen}(x_{4j}) \sqcup \text{Gen}(x_{4j+1}) \subset B_{4\lambda_{i+2}\dots\lambda_1L}(x_{4j}) \sqcup B_{4\lambda_{i+2}\dots\lambda_1L}(x_{4j+1}),$$

выполнены условия леммы 1.4.6 (с  $A_V := \text{Gen}(x_{4j})$ ,  $A_U := \text{Gen}(x_{4j+1})$ ), то,

применив лемму 1.4.6, получим существование точек  $V' \in \partial B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j})$  и  $U' \in \partial B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j+1})$ , таких, что вне кругов  $B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j})$  и  $B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j+1})$  оптимальное для  $\{y'_j\} \cup \text{Gen}(x_{2j})$  дерево совпадает с треногой, соединяющей точки  $y'_j$ ,  $U'$ ,  $V'$  и имеющей точку ветвления  $y'_{2j} = F(y'_j, U', V')$ . Тогда, применив лемму 1.4.9 (с  $T' := y'_j$ ,  $T := y_j$ ,  $V := x_{4j}$ ,  $U = x_{4j+1}$ ,  $W := x_{2j}$ ,  $\beta := \beta_{i+2}$ ,  $\alpha := \angle T'WT < \beta_{i+1} = \beta_{i+2} - 120\lambda_{i+2}$ , а также с  $L\lambda_1 \dots \lambda_i$  в качестве  $L$ ,  $\lambda_{i+1}$  в качестве  $\lambda_1$  и  $\lambda_{i+2}$  вместо  $\lambda_2$ ), получим, что точка  $y'_{2j}$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_{4j}y_{2j})$  и величиной  $2\beta_{i+2}$  и не попадает в круг  $B_{(40\lambda_{i+3}L+1)\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(z_{4j})$ . Кроме того, точка  $y'_{2j}$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_{4j+1}y_{2j})$  и величиной  $2\beta_{i+2}$  и, в силу замечания 1.4.10 (применяемого с теми же обозначениями), не попадает в круг  $B_{(40\lambda_{i+3}L+1)\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(z_{4j+1})$ . Аналогично верно, что точка  $y'_{2j+1}$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_{4j+2}y_{2j+1})$  и величиной  $2\beta_{i+2}$  и не попадает в круг  $B_{(40\lambda_{i+3}L+1)\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(z_{4j+2})$ . Кроме того, она оказывается внутри угла с биссектрисой  $[x_{4j+3}y_{2j+1})$  и величиной  $2\beta_{i+2}$  и вне круга  $B_{(40\lambda_{i+3}L+1)\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(z_{4j+3})$ . При этом, поскольку  $y'_{2j} = F(y_j, U', V')$ , имеем

$$\angle x'_{4j}y'_{2j}x'_{4j+1} = \angle y'_jy'_{2j}x'_{4j} = \angle x'_{4j+1}y'_{2j}y'_j = \frac{2\pi}{3}$$

с  $x'_{4j+1} := U'$ ,  $x'_{4j} := V'$ . Аналогичное утверждение верно для точки  $y'_{2j+1}$ . То есть оптимальное дерево  $\Sigma'_k$  вне объединения кругов  $\bigsqcup_{g(l)=i+2} B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_l)$  является деревом  $i$ -го поколения с правильной структурой, корнем  $y'_0$  и множеством вершин, лежащим на объединении окружностей  $\bigsqcup_{g(l)=i+2} \partial B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_l)$ , по одной вершине на каждой окружности. Таким образом, индукционный переход, а с ним и утверждение, полностью доказаны.

**Шаг 2.** Докажем, что длина оптимального дерева для  $\{y'_0\} \cup A_k$  ( $k \leq \infty$ ) равна  $|y'_0x_1|$ , если, по-прежнему,  $\angle y_0x_1y'_0 \leq \beta_1$ , и точка  $y'_0$  находится вне круга  $B_{\lambda_1 L(1+40\lambda_2)}(z_1)$ . Сначала рассмотрим случай конечного числа вершин ( $k < \infty$ ). Индукцией по  $k$  докажем, что любое дерево правильной структуры, соединяющее вершины множества  $\{y'_0\} \cup A_n$ , имеет длину  $|y'_0x_1|$ .

*База* очевидна: любое дерево правильной структуры (т.е. не имеющее точек

ветвления, а значит, являющееся отрезком), соединяющее вершины множества  $\{y'_0\} \cup A_0 = \{y'_0, x_1\}$ , имеет длину  $|y'_0 x_1|$ .

*Индукционный переход.* Докажем, что любое дерево правильной структуры, соединяющее вершины множества  $y'_0 \cup A_n$ , имеет длину  $|y'_0 x_1|$ , если это верно для всех деревьев правильной структуры, соединяющих множество  $y'_0 \cup A_{n-1}$ . Пусть  $g(p) = n$ . Тогда

$$y'_p = F(x_{2p}, x_{2p+1}, y_{\lfloor p/2 \rfloor}).$$

По теореме Птолемея (лемма 1.4.1)  $|y'_p x_{2p}| + |y'_p x_{2p+1}| = |y'_p x_p|$ , если точка  $y'_p$  принадлежит окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $\triangle x_{2p} x_{2p+1} x_p$ , а  $\angle x_{2p} y'_p x_{2p+1} = \frac{2\pi}{3}$ , что выполнено, если  $y'_p = F(x_{2p}, x_{2p+1}, x_p)$ . Рассмотрим произвольное дерево правильной структуры, соединяющее вершины множества  $y'_0 \cup A_n$ :

$$\Sigma_n = \sigma'_n \cup \bigcup_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} [y'_j, x_j] = [y'_0, y'_1] \cup \bigcup_{j=1}^{2^n} [y'_j, y'_{2j}] \cup [y'_j, y'_{2j+1}] \cup \bigcup_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} [y'_j, x_j].$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma'_{n-1} &:= [y'_0, y'_1] \cup \bigcup_{j=1}^{2^n} [y'_j, y'_{2j}] \cup [y'_j, y'_{2j+1}], \\ \Sigma'_{n-1} &:= \sigma'_{n-1} \cup \bigcup_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} [y'_j, x_j]. \end{aligned}$$

Поскольку дерево  $\Sigma'_n$  имеет правильную структуру, очевидно, что  $\Sigma'_{n-1}$  также имеет правильную структуру, поскольку никаких новых точек ветвления не появилось: при  $g(j) = n$  выполняется

$$\angle y_{\lfloor j/2 \rfloor} y'_j x_j = \angle y_{\lfloor j/2 \rfloor} y'_j y'_{2j} + \angle y'_{2j} y'_j x_j = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi. \quad (1.3)$$

Предпоследнее равенство верно ввиду правильности структуры  $\Sigma'_n$ . Поскольку  $\Sigma'_{n-1}$  имеет правильную структуру, к нему применимо индукционное предпо-



ложение:

$$\mathcal{H}^1(\Sigma'_{n-1}) = |y'_0 x_1|.$$

Чтобы обосновать индукционный переход, достаточно доказать, что

$$\mathcal{H}^1(\Sigma'_{n-1}) = \mathcal{H}^1(\Sigma'_n).$$

Для этого достаточно проверить равенство

$$\mathcal{H}^1 \left( \bigcup_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} [y'_j, x_j] \right) = \mathcal{H}^1 \left( \bigcup_{j=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} [y'_j, y'_{2j}] \cup [y'_j, y'_{2j+1}] \cup \bigcup_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} [y'_j, x_j] \right),$$

которое верно, поскольку при  $g(p) = n - 1$

$$\begin{aligned} |y'_p x_p| &= |y'_p x_{2p}| + |y'_p x_{2p+1}| && \text{в силу теоремы Птолемея} \\ &= |y'_p y'_{2p}| + |y'_{2p} x_{2p}| + |y'_p y'_{2p+1}| + |y'_{2p+1} x_{2p+1}| && \text{в силу (1.3)}. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что любое дерево, имеющее правильную структуру, имеет длину  $|y_0 x_1|$ . При этом на первом шаге было доказано, что любое оптимальное дерево имеет такую структуру, а значит, длина дерева, оптимального для  $\{y'_0\} \cup A_k$ , равна  $|y'_0 x_1|$ . Рассмотрим теперь случай счетного числа вершин ( $k = \infty$ ). Найдем длину дерева  $\Sigma_\infty$ , оптимального для  $\{y'_0\} \cup A_\infty$ . Большей, чем  $|y'_0 x_1|$ , длины оно иметь не может, поскольку ввиду леммы 1.2.4 хаусдорфов предел  $\tilde{\Sigma}_\infty$  любой подпоследовательности деревьев правильной структуры  $\Sigma'_k$  соединяет точки множества  $\{y'_0\} \cup A_\infty$  (поскольку  $A_k \subset \Sigma'_k$ ), а его длина оценивается как

$$\mathcal{H}^1(\tilde{\Sigma}_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Sigma_n) = |y'_0 x_1|$$

в силу теоремы Голаба (см. [29]). Докажем от противного, что и меньшей длины  $\Sigma_\infty$  иметь не может. Пусть его длина составляет  $|y'_0 x_1| - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Посчитаем длину объединения деревьев  $\bigcup_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} ([x_n z_n] \cup [x_{2n} z_n] \cup [x_{2n+1} z_n])$ ,

соединяющего вершины соседних поколений  $k - 1$  и  $k$ :

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |x_n z_n| + |x_{2n} z_n| + |x_{2n+1} z_n| = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 3\lambda_1 \dots \lambda_k L \leq 3L(2\lambda_1)^k,$$

так что длина объединения данных деревьев стремится к нулю:  $3L \sum_{k=n}^{\infty} (2\lambda_1)^k = 3L \frac{(2\lambda_1)^n}{1-2\lambda_1} \rightarrow 0$ . А значит, для любого  $\varepsilon$  можно выбрать такое  $n$ , что длина объединения соответствующих деревьев не превосходит  $\varepsilon/2$ . Тогда точки  $A_n \cup y'_0$  можно соединить деревом, существование которого мы предположили точки множества  $A_\infty$ , а затем соединить предельные точки и вершины  $A_n$ . Тогда сумма длин оценивается сверху как

$$(|y'_0 x_1| - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < |y'_0 x_1|.$$

Полученное неравенство противоречит утверждению о длине оптимального для  $y'_0 \cup A_n$  дерева. Значит, дерево, оптимальное для  $\{y'_0\} \cup A_\infty$ , имеет длину  $|y'_0 x_1|$ .

**Шаг 3.** Единственность оптимального дерева для  $\{y_0\} \cup A_k$ , где  $k$  конечное или  $k = \infty$ .

В первом шаге доказательства было показано, что любое оптимальное дерево имеет правильную структуру. Теперь индукцией по поколению  $i$  докажем, что корневая точка и точки ветвления  $y'_j$  не отклонились от своих эталонных положений  $y_j$ . Поскольку  $y'_0 := y_0$ , базу индукции можно считать доказанной.

Докажем теперь *индукционный переход*. Пусть утверждение выполнено для корня и для всех точек ветвления до  $i$ -го поколения включительно (то есть  $y'_j : g(j) \leq i$ ), тогда, поскольку, как было показано в первом шаге доказательства,  $\Sigma'_k$  имеет правильную структуру и, значит,

$$\begin{aligned} \Sigma'_k &= [y'_0, y'_1] \cup \bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} [y'_j, y'_{2j}] \cup [y'_j, y'_{2j+1}] \cup \bigcup_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} [y'_j, x_j] \\ &= [y_0, y_1] \cup \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} [y_j, y_{2j}] \cup \bigcup_{j=2^{i-1}}^{2^i-1} \text{Tr } j, \end{aligned}$$

где  $\text{Tr } j \in \mathcal{St}(\{y_{j/2}\} \cup \text{Gen}(x_j))$ . Для того, чтобы длина  $\Sigma'_k$  была минимальна, необходимо, чтобы были минимальны длины всех деревьев  $\text{Tr } l$ , где  $g(l) = i+1$ . Не ограничивая общности, рассмотрим  $\text{Tr } 2j$ , где  $g(j) = i$  и  $y'_j = y_j$  по индукционному предположению. Применим первый шаг доказательства теоремы с  $y_j$  вместо  $y_0$ ,  $\text{Gen}(x_{2j})$  вместо  $A_k$ ,  $k - i$  вместо  $k$ ,  $\lambda_i \dots \lambda_1 L$  вместо  $L$ ,  $x_{2g(l)j+l-2g(l)}$  вместо  $x_l$  и  $\lambda_{l+i}$  вместо  $\lambda_l$  и получим, что вне кругов  $B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j})$  и  $B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j+1})$  любое оптимальное для  $\{y_j\} \cup \text{Gen}(x_{2j})$  дерево  $\text{Tr } 2j$  совпадает с треногой, соединяющей точки  $y_j$ ,  $U'$ ,  $V'$  и имеющей точку ветвления  $y'_{2j} = F(y_j, U', V')$ , где  $V' \in \partial B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j})$ , а  $U' \in \partial B_{20\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(x_{4j+1})$ . Очевидно, что тогда  $\text{Tr } 2j = [y_j, y'_{2j}] \sqcup \text{Tr}'_{4j} \sqcup \text{Tr}'_{4j+1}$ , где  $\text{Tr}'_l \in \mathcal{St}(\{y'_{l/2}\} \cup \text{Gen}(x_l))$ . Заметим, что условия леммы 1.4.9 и замечания 1.4.10 выполнены с  $T' := T := y_j$ ,  $\beta := \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21} + 120\lambda_{i+1}$  и  $\lambda_2$  вместо  $\lambda_{i+1}$ , поскольку

$$0 = \angle TWT' < \beta - 120\lambda_{i+1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21}.$$

Таким образом, точка ветвления  $y'_{2j}$  попадает в угол с биссектрисой  $[x_{4j+1}y_{2j}]$  и величиной  $2\beta$  и не попадает в круг  $B_{(40\lambda_{i+3}+1)\lambda_{i+2}\dots\lambda_1 L}(z_{2j})$ . Тогда для точки  $y'_{2j}$  и множества вершин  $\text{Gen}(x_{4j})$  выполняются условия второго шага доказательства теоремы, если вместо  $y_0$  взять  $y_{2j}$ , вместо  $y'_0$  взять  $y'_{2j}$ , вместо  $A_k$  взять  $\text{Gen}(x_{4j})$ , вместо  $k$  взять  $k - i - 1$ , вместо  $L$  взять  $\lambda_{i+1} \dots \lambda_1 L$ , вместо  $x_l$  взять  $x_{2g(l)+1j+l-2g(l)}$ , вместо  $\lambda_l$  взять  $\lambda_{l+i+1}$ , а вместо  $\beta_1$  взять  $\beta$ . Таким образом доказано, что длина любого оптимального дерева, соединяющего точки множества  $\{y'_{2j}\} \cup \text{Gen}(x_{4j})$ , равна  $|y'_{2j}x_{4j}|$ . В том числе,

$$\mathcal{H}^1(\text{Tr}'_{4j}) = |y'_{2j}x_{4j}|.$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathcal{H}^1(\text{Tr}'_{4j+1}) = |y'_{2j}x_{4j+1}|.$$

Таким образом,

$$\mathcal{H}^1(\text{Tr } j) = \mathcal{H}^1([y_j, y'_{2j}] \sqcup \text{Tr}'_{4j} \sqcup \text{Tr}'_{4j+1}) = |y_j y'_{2j}| + |y'_{2j} x_{4j}| + |y'_{2j} x_{4j+1}|.$$

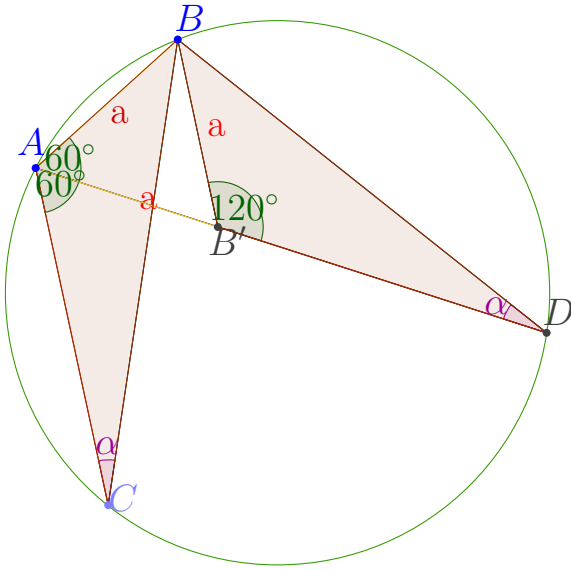


Рис. 1.4: Рисунок, используемый при доказательстве леммы 1.4.1.

Поскольку точка Ферма в треугольнике единственна, для того, чтобы длина  $\text{Tr}_j$  была минимальна, необходимо, чтобы точка  $y'_{2j}$  совпала с точкой  $F(y_j, x_{4j}, x_{4j+1}) = y_{2j}$ . Таким образом, индукционный переход, а с ним и теорема, доказаны.

□

## 1.4. Вспомогательные леммы

В этом разделе собраны технические леммы, уточняющие положения точек сочленения штейнеровских деревьев для множеств определенного вида.

**Лемма 1.4.1.** (Теорема Птолемея) Для вписанного в окружность четырехугольника  $ABCD$  с углами  $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$  справедливо

$$|AD| = |AB| + |AC|.$$

*Доказательство.* Отметим точку  $B'$  на  $AD$  такую, что  $|AB| = |AB'|$ . Тогда  $\triangle AB'B$  — равносторонний, а  $\triangle ACB = \triangle BB'D$ , поскольку  $\angle BAC = \angle BB'D = 120^\circ$ ,  $|AB| = |BB'|$ , а  $\angle ACB = \angle ADB$  (т.к. эти углы опираются на одну дугу). Тогда  $|AC| = |B'D|$ , а  $|AB| = |AB'|$ , а значит  $|AB| + |AC| = |AD|$ . □

Рассмотрим треугольник  $\triangle TUV$ , максимальный угол которого меньше  $2\pi/3$ . Нас будет интересовать, насколько изменяется положение точки Ферма при *небольших* (таких, что, по-прежнему, все углы меньше  $2\pi/3$ ) сдвигах вершин. Введем следующие обозначения:

- $Y := F(T, U, V)$ ,
- $L := |TY| + |YU| + |YV|$ ,
- $\lambda := \frac{|YV|}{L}$ .

**Лемма 1.4.2.** Пусть точка  $T$  лежит внутри угла  $\angle UWV$  и вне окружности, описанной вокруг треугольника  $\triangle UWV$ , где  $\triangle UWV$  — равносторонний. Тогда  $S \in \mathcal{St}(\{T, U, V\})$  — тренога с разветвлением в точке Ферма треугольника  $\triangle TUV$  (при этом  $\mathcal{S}(\{T, U, V\}) = |TW|$ ). Длину получаем, применив теорему Птолемея.

*Доказательство.* Заметим, что эти условия эквивалентны тому, что все углы треугольника  $\triangle TUV$  меньше  $2\pi/3$ , а вид штейнеровского дерева для такого треугольника известен.  $\square$

Пусть точки  $T$ ,  $U$  и  $V$  образуют равнобедренный треугольник. Построим следующую конструкцию, изображенную на рисунке 1.5. Для этого заметим, что  $R := |YU| = |YV|$  — радиус описанной вокруг треугольника  $\triangle VUW$  окружности. Центр этой окружности обозначим  $O$ .

- $Y := F(T, U, V)$ ;
- $L := |TY| + |YU| + |YV|$ ,  $\lambda_1 := \frac{|YV|}{L}$ ,  $\lambda_2 < \lambda_1 < \frac{1}{512}$ ;
- Вокруг вершин  $U$  и  $V$  проведены окружности с радиусом  $\tau := 20\lambda_1\lambda_2L$ ;
- Точка  $W$  такая, что треугольник  $\triangle VUW$  — равносторонний;
- Проведем прямую  $t$  — общую касательную к окружностям  $B_\tau(V)$  и  $B_\tau(U)$  такую, что эти окружности лежат по разные стороны от  $t$ ;

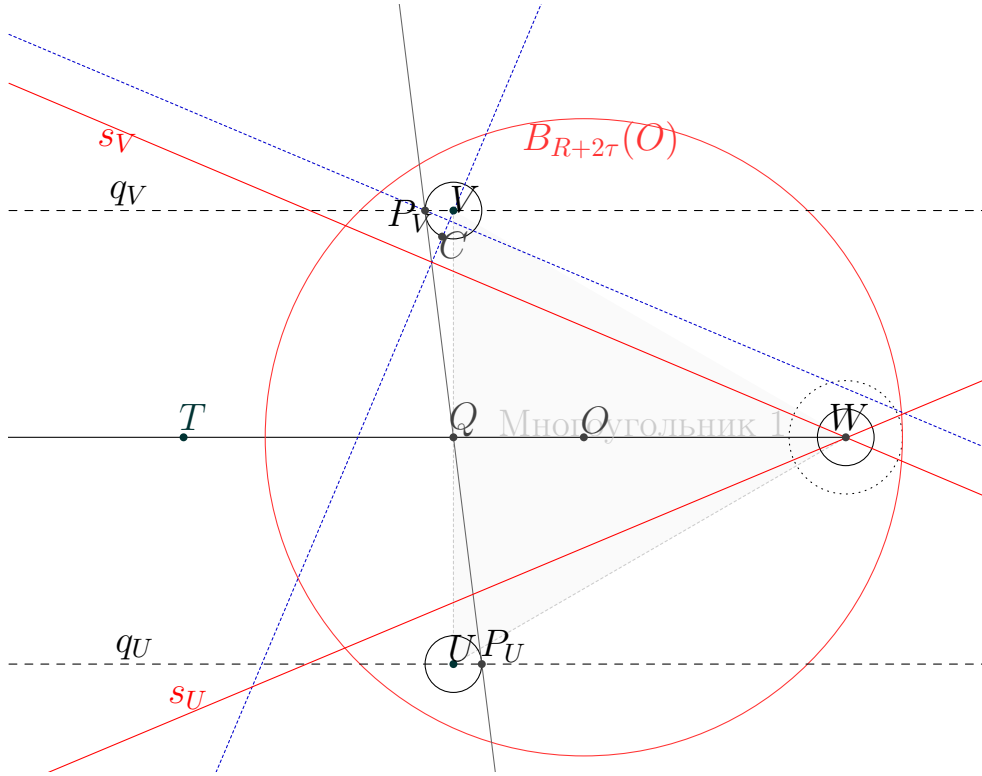


Рис. 1.5: Конструкция, используемая в лемме 1.4.3.

- $P_V := t \cap \partial B_\tau(V)$ ,  $P_U := t \cap \partial B_\tau(U)$ . Не ограничивая общности, будем считать, что  $|TP_V| < |TP_U|$ ;
- Точка  $P_W$  такая, что треугольник  $\triangle P_V P_U P_W$  — равносторонний;
- Из точки  $W$  проведем луч  $s_V$ , параллельный  $(P_V P_W]$ ;
- Луч, симметричный  $s_V$  относительно  $(TW)$ , назовем  $s_U$ ;
- Проведем окружность  $\partial B_{R+2\tau}(O)$ .

**Лемма 1.4.3.** *Верны следующие утверждения:*

(i)  $\psi := \angle(s_V, (TW)) = \arccos \frac{40}{\sqrt{3}} \lambda_2 - \frac{\pi}{3}$ , так что  $\psi \rightarrow \frac{\pi}{6}$  при  $\lambda_2 \rightarrow 0$ .

(ii) Если точка  $T'$  такова, что  $\angle TWT' < \psi$ , то

$$[TT'] \cap s_V = [TT'] \cap s_U = \emptyset.$$

(iii) Если точка  $T'$  расположена таким образом, что

$$[T'T] \cap s_U = [T'T] \cap s_V = \emptyset$$

(в силу (ii) это верно, когда угол  $\angle TWT' < \psi$ ) и

$$[T'T] \cap B_{R+2\tau}(O) = \emptyset,$$

то для любых точек  $U' \in \partial B_\tau(U)$  и  $V' \in \partial B_\tau(V)$  штейнеровское множество  $S' \in \mathcal{St}(\{T', U', V'\})$  имеет форму треноги, при этом  $\mathcal{S}(\{T', U', V'\}) = |T'W'|$ , где треугольник  $\triangle V'U'W'$  — равносторонний.

**Замечание 1.4.4.** В условиях леммы 1.4.3 множество возможных положений точки  $W'$  есть круг  $B_{2\tau}(W)$ . Действительно, так как

$$\begin{aligned} W &= V + R_{\frac{\pi}{3}}(U - V), \\ W' &= V' + R_{\frac{\pi}{3}}(U' - V'), \end{aligned}$$

где  $R_{\frac{\pi}{3}} \in SO(2)$  — матрица поворота на угол  $\pi/3$ , то

$$\begin{aligned} W' &= V + (V' - V) + R_{\frac{\pi}{3}}(U - V) + R_{\frac{\pi}{3}}((U' - U) - (V' - V)) \\ &= W + R_{\frac{\pi}{3}}(U' - U) + (Id - R_{\frac{\pi}{3}})(V' - V). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \{W' : V' \in \partial B_\tau(V), U' \in \partial B_\tau(U)\} &= W + R_{\frac{\pi}{3}}(\partial B_\tau(0)) + (Id - R_{\frac{\pi}{3}})(\partial B_\tau(0)) \\ &= W + \partial B_\tau(0) + \partial B_\tau(0) \\ &= W + B_{2\tau}(0) = B_{2\tau}(W), \end{aligned}$$

где второе равенство из цепочки следует из

$$(Id - R_{\frac{\pi}{3}})(\partial B_\tau(0)) = \partial B_\tau(0).$$

*Доказательство.* Докажем утверждение (i). Для этого проведем через вершину  $U$

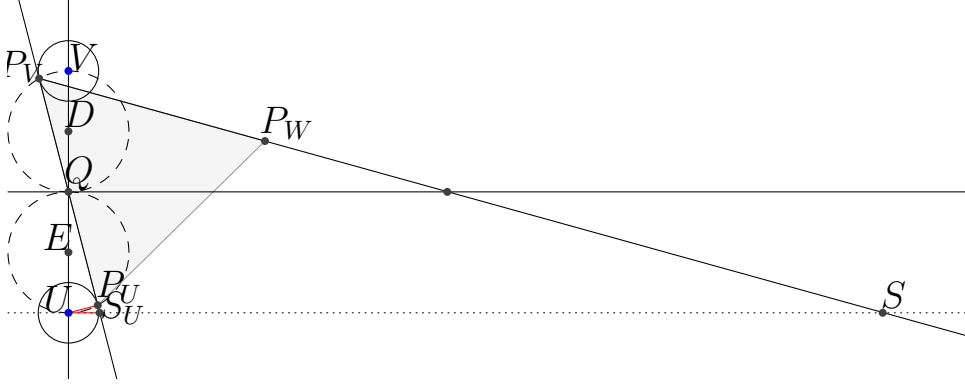


Рис. 1.6: Рисунок, используемый при доказательстве леммы 1.4.3.

прямую, перпендикулярную  $(UV)$ . Обозначим через  $S_U$  ее пересечение с  $(P_V P_U)$ , а также обозначим  $S := (P_V P_U) \cap (US_U)$ . В силу того, что прямая  $(P_V P_W)$  параллельна прямой  $s_V$ , а прямая  $(US_U)$  параллельна  $(TW)$ , угол между прямыми  $(P_V P_W)$  и  $(US_U)$  равен  $\psi$ . Обозначим  $\gamma := \angle US_U P_U$ . Посмотрим на треугольник  $\triangle SP_V S_U$  (см. рис. 1.6):

$$\psi = \pi - \angle P_V S_U S - \angle SP_V S_U = \angle US_U P_U - \angle SP_V S_U = \gamma - \frac{\pi}{3}. \quad (1.4)$$

Обозначим  $Q := (P_U P_V) \cap (TW)$ . Счет углов в треугольниках  $\triangle US_U Q$  и  $\triangle UP_U Q$  дает, что  $\angle QUP_U = \gamma$  (см. рис. 1.7). Рассмотрим треугольник  $\triangle UP_U Q$ ; ясно что

$$\cos \gamma = \frac{|UP_U|}{|UQ|} = \frac{\tau}{|UV|/2}. \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$\gamma = \arccos \frac{2\tau}{|UV|} = \arccos \frac{40\lambda_1\lambda_2 L}{\sqrt{3}\lambda_1 L} = \frac{40}{\sqrt{3}}\lambda_2, \quad (1.6)$$

а значит,

$$\psi = \gamma - \frac{\pi}{3} = \arccos \frac{40}{\sqrt{3}}\lambda_2 - \frac{\pi}{3},$$

так что утверждение (i) доказано. Утверждение (ii) леммы следует непосредственно из конструкции. Докажем утверждение (iii). Рассмотрим произвольные возможные  $U', V'$ . Для того, чтобы все углы треугольника  $\triangle T'U'V'$  были меньше  $2\pi/3$ , достаточно, чтобы были верны следующие утверждения:



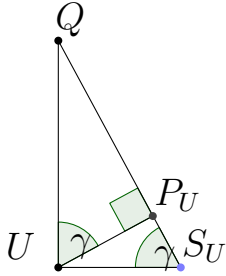


Рис. 1.7: Увеличенный фрагмент рис. 1.6.

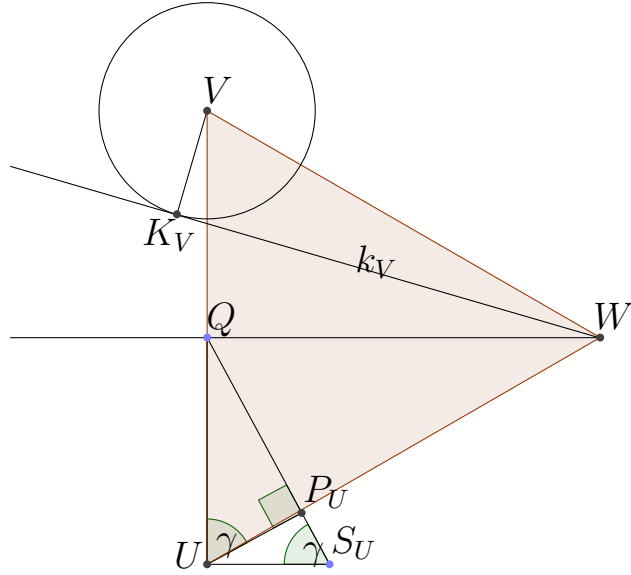


Рис. 1.8: Рисунок, используемый при доказательстве второго шага леммы 1.4.3

- (A)  $T'$  находится вне окружности  $\partial B'$ , описанной вокруг треугольника  $\Delta U'W'V'$ ;  
 (B)  $T'$  находится внутри угла  $\angle U'W'V'$ .

Докажем утверждение (A). Для этого достаточно показать, что  $B' \subset B_{R+2\tau}(O)$ . Посмотрим, как изменяется центр и радиус описанной окружности при сдвигах вершин. Пусть вершина  $U$  осталась на месте, а вершина  $V$  сдвинулась на расстояние, не превосходящее  $\tau$ , ее новое положение обозначим  $V'$ . Обозначим за  $O'$  центр окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника с вершинами  $U$  и  $V'$ . Треугольник  $\Delta VUV'$  подобен треугольнику  $\Delta OOU'$ , поскольку

$$\angle VUV' = \angle VUV' - \angle V'UO = \frac{\pi}{6} - \angle V'UO = \angle V'UO' - \angle V'UO = \angle OOU',$$

а

$$\frac{|OU|}{|VU|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{|O'U|}{|V'U|},$$

откуда

$$|OO'| = \frac{|VV'|}{\sqrt{3}} \leq \tau\sqrt{3}.$$

Таким образом, если обе вершины  $U$  и  $V$  сдвинуть на величины, не превосходящие  $\tau$ , то центр описанной окружности сдвинется не больше, чем на  $2\tau/\sqrt{3}$ , радиус же описанной окружности составляет

$$\frac{|U'V'|}{\sqrt{3}} \leq \frac{|UV| + 2\tau}{\sqrt{3}} = R + \frac{2\tau}{\sqrt{3}}.$$

Очевидно, что тогда

$$B' \subset B_{R+4\tau/\sqrt{3}}(O) \subset B_{R+2\tau}(O).$$

Так как  $[TT'] \cap \partial B_{R+2\tau}(O) = \emptyset$ , то  $T' \notin B'$ . А значит, утверждение (А) доказано. Докажем утверждение (В). Обозначим

$$\begin{aligned} Q' &:= (U'V') \cap (TW), \\ J'_V &:= [V'W') \cap (TW), \\ J'_U &:= [U'W') \cap (TW). \end{aligned}$$

Сначала проверим, что выполняется

$$\angle V'J_VQ' \geq \angle(s_V, (TW)) = \psi. \quad (1.7)$$

Так как

$$\angle V'Q'W = \frac{2\pi}{3} - \angle Q'J'_V V',$$

а максимальное значение  $\angle V'Q'W$  достигается при  $V' := P_V$  и  $U' = P_U$  (т.е. при  $Q' = Q$ ), что соответствует минимальному значению угла  $\angle Q'J'_V V'$ , которое, таким образом, равно  $\psi$ . Поэтому  $\angle Q'J'_V V' \geq \psi$  для любых  $U'$  и  $V'$ . Теперь проверим, что круг  $B_\tau(V)$  находится вне угла с вершиной в точке  $W$ , образованного лучами  $s_V$  и  $(TW]$ . Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\angle(s_V, (TW]) < \angle(k_V, (TW]), \quad (1.8)$$

где  $k_V$  — луч, исходящий из точки  $W$  и опорный для окружности  $B_\tau(V)$ , такой, что круг  $B_\tau(V)$  находится вне угла, образованного лучами  $k_V$  и  $(TW]$ . Точку касания луча  $k_V$  и окружности  $\partial B_\tau(V)$  обозначим  $K_V$ . Вычислим

$$\angle(k_V, (TW)) = \angle TWW - \angle K_V WV = \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{\tau}{|WV|},$$

(см. рис. 1.7). В силу (1.4), (1.6) выполняется

$$\psi = \arccos \frac{2\tau}{|UV|} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{2\tau}{|UV|},$$

так что

$$\psi < \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{\tau}{|UV|} = \angle(k_V, (TW]),$$

а значит, (1.8), а с ним и доказываемое утверждение, доказаны. Таким образом, для любых  $U', V'$  угол  $\angle V'J'_V Q'$  больше угла  $\angle(s_V, (TW])$ , при этом окружность  $B_\tau(V)$  пересекается с лучом  $(V'J'_V]$  и находится строго вне угла  $\angle(s_V, (TW])$ . Из этого следует, что вне окружности  $B_{R+2\tau}(O)$  (содержащей круг  $B_\tau(V)$  и точки  $W$  и  $J'_V$ ), угол, образованный лучами  $s_V$  и  $(TW]$  будет содержаться внутри угла  $\angle V'J'_V Q'$ . Аналогично будет верно, что вне  $B_{R+2\tau}(O)$  угол  $\angle U'J'_U Q'$  будет содержать угол, образованный лучами  $s_U$  и  $(TW]$ . Тогда угол  $\angle V'W'U'$  вне  $B_{R+2\tau}(O)$  будет содержать угол, образованный лучами  $s_V$  и  $s_U$ :

$$\begin{aligned} (V'W'] \setminus B_{R+2\tau}(O) &= (V'J'_V] \setminus B_{R+2\tau}(O), \\ (U'W'] \setminus B_{R+2\tau}(O) &= (U'J'_U] \setminus B_{R+2\tau}(O), \\ \angle V'W'U' \setminus B_{R+2\tau}(O) &= (\angle V'J'_V Q' \cup \angle Q'J'_U U') \setminus B_{R+2\tau}(O) \\ &\supset (\angle(s_V, (TW]) \cup \angle(s_U, (TW])) \setminus B_{R+2\tau}(O) \\ &= \angle(s_V, s_U) \setminus B_{R+2\tau}(O). \end{aligned}$$

А значит, из того, что  $[T'T] \cap B_{R+2\tau}(O) = [T'T] \cap s_U = [T'T] \cap s_V = \emptyset$ , следует, что  $[T'T] \cap (V'W'] = [T'T] \cap (U'W'] = \emptyset$ . Таким образом, доказано (В), а значит, согласно лемме 1.4.2, и утверждение (iii) леммы.  $\square$

**Следствие 1.4.5.** *Если в условиях леммы 1.4.3 точка  $T'$  расположена таким*

образом, что

$$[T'T] \cap B_{R+2\tau}(O) = [T'T] \cap s_U = [T'T] \cap s_V = \emptyset,$$

то для любых точек  $U_1 \in B_\tau(U)$  и  $V_1 \in B_\tau(V)$  штейнеровское множество  $S_1 \in \mathcal{St}(\{T', U_1, V_1\})$  имеет форму треноги.

*Доказательство.* Покажем, что все углы треугольника  $\Delta T'U_1V_1$  меньше  $2\pi/3$ . Пусть

$$U' := [T', U_1] \cap \partial B_\tau(U);$$

$$V' := [T', V_1] \cap \partial B_\tau(V).$$

Тогда, как следует из доказательства леммы 1.4.3,

$$\angle U_1T'V_1 = \angle U'T'V' < \frac{2\pi}{3}.$$

Отметим также точки

$$U'_1 := [U_1, V_1] \cap \partial B_\tau(U),$$

$$V'_1 := [U_1, V_1] \cap \partial B_\tau(V).$$

Тогда

$$\angle T'V_1U_1 \leq \angle T'V'_1U_1 < \frac{2\pi}{3},$$

как следует из доказательства леммы 1.4.3. Аналогично,  $\angle T'U_1V_1 < 2\pi/3$ . Тогда все углы треугольника  $\Delta T'U_1V_1$  меньше  $2\pi/3$  и, значит, штейнеровское дерево имеет форму треноги.  $\square$

**Лемма 1.4.6.** В обозначениях леммы 1.4.3 пусть  $T'$  расположена таким образом, что  $\angle TWT' < \pi/7$  и  $[T'T] \cap B_{R+2\tau}(O) = \emptyset$ , и пусть  $\Sigma \in \mathcal{St}(A)$ , где  $A = A_U \cup A_V \cup \{T'\}$ ,  $A_V \subset B_{4\lambda_1\lambda_2L}(V)$ ,  $A_U \subset B_{4\lambda_1\lambda_2L}(U)$ . Тогда множество  $\Sigma \setminus (B_\tau(V) \cup B_\tau(U))$  имеет форму треноги.

**Замечание 1.4.7.** Заметим, что  $\angle TWT' < \pi/7 < \psi$ , поскольку

$$\begin{aligned} \psi &= \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\lambda_2\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\lambda_2\right) \\ &> \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{40}{\sqrt{3} \cdot 1024}\right) > \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть не существует такого  $\alpha \in (\frac{1}{5}, 1)$ , что  $\Sigma \cap \partial B_{\alpha\tau}(U)$  — одна точка. Тогда, ввиду неравенства коплощади,

$$\mathcal{H}^1(\Sigma \cap (B_\tau(U) \setminus B_{\tau/5}(U))) \geq 2 \cdot \frac{4}{5}\tau.$$

Рассмотрим  $S \in \mathcal{St}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V))$ . Тогда либо существуют такие точки  $U' \in \partial B_\tau(U)$  и  $V' \in \partial B_\tau(V)$ , что  $\mathcal{S}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V)) = \mathcal{S}(\{T', U', V'\})$ , либо существует такой элемент  $G$  множества  $\mathcal{St}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V))$  и, не умаляя общности, существуют такие множества  $S_1$  и  $S_2$ , что  $S_1 \in \mathcal{St}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(V))$ ,  $S_2 \in \mathcal{St}(\partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V))$ , а  $G = S_1 \cup S_2$ . Но, во втором случае, с учетом того, что

$$\mathcal{S}(\partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V)) = |UV| - 2\tau,$$

а

$$\mathcal{S}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(V)) = |T'V| - \tau,$$

получим

$$\mathcal{S}(T' \cup \partial B_\tau(V) \cup \partial B_\tau(U)) = |UV| + |T'V| - 3\tau.$$

А если реализовался первый случай, то длина штейнеровского дерева равна  $|T'W'|$ . Ввиду минимальности длина будет равна расстоянию от  $T'$  до множества возможных положений точки  $W'$ , которое, согласно замечанию 1.4.4, совпадает с кругом  $B_{2\tau}(W)$ . Тогда

$$\mathcal{S}(T' \cup \partial B_\tau(V) \cup \partial B_\tau(U)) = \text{dist}(T', B_{2\tau}(W)) = |T'W| - 2\tau.$$

Убедимся, что

$$|T'W| - 2\tau \leq |UV| + |T'V| - 3\tau, \tag{1.9}$$

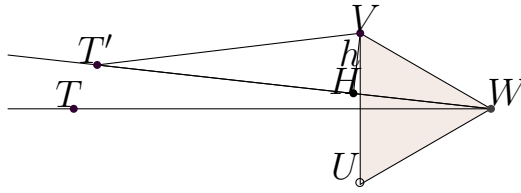
показав таким образом невозможность второго случая. Опустим перпендикуляр  $h$  из  $V$  на  $T'W$  и воспользуемся тем, что  $\lambda_2 \leq \frac{\pi}{42 \cdot 120}$  (см. замечание 1.1), а

$$\angle T'WV = \angle T'WV - \angle TWT' > \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{42}.$$

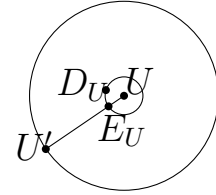
Обозначим  $H := h \cap T'W'$  (см. рис. 1.9 а). Тогда

$$\begin{aligned} |T'V| + |UV| - |T'W| &= |T'V| + |VW| - |T'W| \\ &= (|T'V| - |T'H|) + (|VW| - |HW|) \geq |VW| - |HW| \\ &= |VW|(1 - \cos(\angle T'WV)) \geq \sqrt{3}\lambda_1 L \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{42}\right)\right) \\ &> 0.0048\lambda_1 L > 20\lambda_2\lambda_1 L = \tau, \end{aligned}$$

что доказывает (1.9). Тем самым мы доказали, что существуют такие  $U' \in$



а).



б).

Рис. 1.9: Рисунки, используемые при доказательстве леммы 1.4.6.

$\partial B_\tau(U)$  и  $V' \in \partial B_\tau(V)$ , что  $\mathcal{S}(\{T\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V)) = \mathcal{S}(\{T, U', V'\})$ . Пусть  $S_0 \in \mathcal{St}(\{T', U', V'\})$ . Тогда  $\mathcal{H}^1(\Sigma \setminus (B_\tau(U) \cup B_\tau(V))) \geq \mathcal{H}^1(S_0)$ , поскольку  $\Sigma \setminus (B_\tau(U) \cup B_\tau(V))$  является сетью, соединяющей точки множества  $\{T'\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V)$ , а  $S_0 \in \mathcal{St}(\{T'\} \cup \partial B_\tau(U) \cup \partial B_\tau(V))$ . Существует такая точка  $D_U$ , что  $D_U \in \partial B_{\tau/5}(U) \cap \Sigma$ . Пусть  $C_U$  — та полуокружность  $\partial B_{4\lambda_1\lambda_2 L}(U)$ , которая содержит  $E_U$  и  $D_U$ , где  $E_U := [U', U] \cap \partial B_{4\lambda_1\lambda_2 L}(U)$  (см. рис 1.9 б). Рассмотрим дерево  $\Sigma_0$ , представляющее собой дизъюнктивное объединение:

$$\Sigma_0 := S_0 \cup [U', E_U] \sqcup C_U \sqcup (\Sigma \cap B_{\tau/5}(U)) \sqcup (\Sigma \cap B_\tau(V)).$$

Оценим его длину:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^1(\Sigma_0) &= \mathcal{H}^1(S_0) + |U', E_U| + \mathcal{H}^1(C_U) + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_{\tau/5}(U)) + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_\tau(V)) \\
&= \mathcal{H}^1(S_0) + \frac{4\tau}{5} + \frac{\pi\tau}{5} + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_{\tau/5}(U)) + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_\tau(V)) \\
&< \frac{8\tau}{5} + \mathcal{H}^1(S_0) + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_{\tau/5}(U)) + \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_\tau(V)) = \mathcal{H}^1(\Sigma),
\end{aligned}$$

что противоречит оптимальности  $\Sigma$ , поскольку  $\Sigma_0$  — сеть, соединяющая точки множества  $A$ . Таким образом, мы доказали, что существует такое  $\alpha \in (\frac{1}{5}, 1)$ , что  $\Sigma \cap \partial B_{\alpha\tau}(U)$  — одна точка  $U_1$ . Аналогично существует такое  $\alpha' \in (\frac{1}{5}, 1)$ , что  $\Sigma \cap \partial B_{\alpha'\tau}(V)$  — одна точка  $V_1$ . Тогда

$$\Sigma \setminus (B_{\alpha\tau}(U) \cup B_{\alpha'\tau}(V)) \in \mathcal{St}(T', U_1, V_1).$$

Для точек  $U_1, V_1, T'$  выполнены условия следствия 1.4.5 и, значит, множество  $\Sigma \setminus (B_{\alpha\tau}(U) \cup B_{\alpha'\tau}(V))$  имеет форму треноги. Тогда, очевидно, и множество  $\Sigma \setminus (B_\tau(V) \cup B_\tau(U))$  имеет форму треноги.  $\square$

**Лемма 1.4.8.** *При  $0 < x < \pi/6 - \pi/42$ ,  $0 < y < \pi/6 + \pi/21$ ,  $1/8 > \alpha > 0$  имеют место неравенства*

$$\arcsin\left(\frac{\sin x}{1 + \alpha}\right) > x - \frac{\alpha}{2}, \quad (1.10)$$

$$\arcsin\left(\frac{\sin y}{1 - \alpha}\right) < y + \alpha. \quad (1.11)$$

*Доказательство.* Докажем (1.10). При заданных предположениях вместо (1.10) можно доказывать неравенство

$$\frac{\sin x}{1 + \alpha} > \sin\left(x - \frac{\alpha}{2}\right),$$

что равносильно условию

$$\left( \frac{1}{1+\alpha} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sin x > -\cos x \sin \frac{\alpha}{2},$$

что, при имеющихся ограничениях на  $x$  и  $\alpha$ , эквивалентно

$$\operatorname{tg} x < \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{1+\alpha}},$$

а это верно, поскольку

$$\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{42} \right) < \frac{1}{2} < \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{1+\alpha}}.$$

Докажем (1.11). При заданных предположениях вместо (1.11) можно доказывать

$$\frac{\sin y}{1-\alpha} < \sin(y+\alpha),$$

что равносильно неравенству

$$\left( \frac{1}{1-\alpha} - \cos \alpha \right) \sin y < \cos y \sin \alpha,$$

что, при имеющихся неравенствах на  $y$  и  $\alpha$ , эквивалентно

$$\operatorname{tg} y < \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{1-\alpha} - \cos \alpha},$$

что верно, поскольку

$$\operatorname{tg} y < \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{21} \right) < 0.8 < \frac{\sin \frac{1}{8}}{\frac{1}{1-\frac{1}{8}} - \cos \frac{1}{8}} < \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{1-\alpha} - \cos \alpha}.$$

□

**Лемма 1.4.9.** Пусть в условиях леммы 1.4.3 задан фиксированный угол  $\beta$ :

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21} < \beta < \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{42}.$$



Тогда для того, чтобы  $Y' := F(T', U', V')$  для всех допустимых  $U'$  и  $V'$  попала в угол с биссектрисой  $[VY)$  и величиной  $2\beta$ , достаточно, чтобы отрезок  $[TT']$  не пересекал  $B_{R+2\tau}(O)$  и  $T'$  попала в угол с биссектрисой  $[WT)$  и величиной  $2\alpha < 2(\beta - 120\lambda_2)$ .

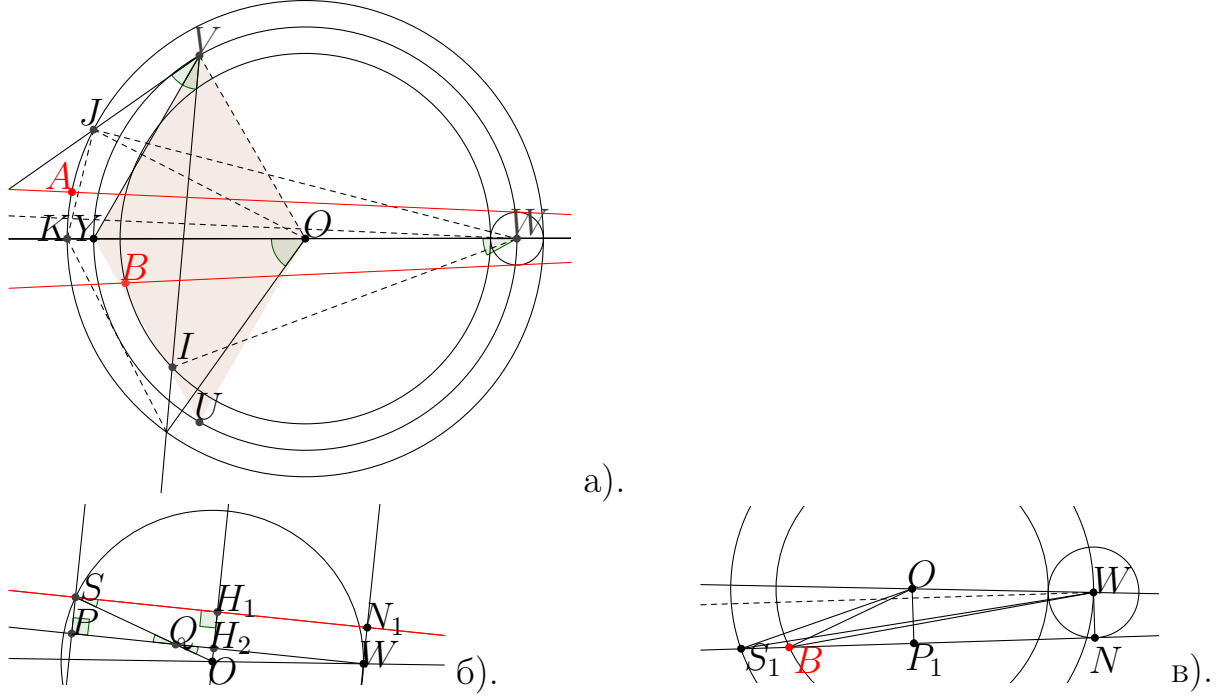


Рис. 1.10: Рисунки, используемые в лемме 1.4.9.

*Доказательство.* Для доказательства потребуются точки

$$\begin{aligned} K &:= (TW) \cap B_{R+2\tau}(O), \\ J &: J \in \partial B_{R+2\tau}(O), \angle YVJ = \beta, \\ I &: I \in B_{R-2\tau}(O), \angle YUI = \beta. \end{aligned}$$

Опишем возможные положения точки  $Y' := F(T', U', V')$ : она лежит на пересечении луча  $(T'W')$  и окружности  $\partial B_{U'V'W'}$ , описанной вокруг треугольника  $U'V'W'$  (т.е.  $Y' = (T'W') \cap \partial B_{U'V'W'}$ ). Пусть  $T'$  лежит в заданном углу  $\delta$  с биссектрисой  $(TW)$  и величиной  $2\alpha \leq 2\beta$ . Проведем лучи, параллельные сторонам этого угла и находящиеся вне его на расстоянии  $2\tau$  от сторон угла. Угол, образованный

этими лучами, назовем  $\gamma$ . Заметим, что стороны угла  $\gamma$  являются опорными к кругу  $\overline{B_{2\tau}(W)}$ , а точка  $W'$  в силу замечания 1.4.4 находится в этом круге. Поэтому луч  $(T'W')$  будет находиться внутри угла  $\gamma$ , при этом круг  $B_{U'V'W'}$  содержится в кольце  $\overline{B_{R+2\tau}(O)} \setminus B_{R-2\tau}(O)$ . Значит,

$$Y' \in \gamma \cap (\overline{B_{R+2\tau}(O)} \setminus B_{R-2\tau}(O)).$$

Посмотрим на ограничивающую эту область криволинейную трапецию и докажем, что она содержится внутри угла с биссектрисой  $[VY)$  и величиной  $2\beta$ . Для этого заметим, что точка  $I$  “ниже” прямой  $(TW)$ , а точка  $J$  “выше”. Первое утверждение верно, потому что луч  $[VI)$  находится между лучами  $[VY)$  и  $[VO)$  (т.к.  $\angle IVY = \beta < \frac{\pi}{3} = \angle OVY$ ), а значит

$$[VI) \cap (TW) \neq \emptyset.$$

Второе же верно потому, что если предположить противное, то

$$\angle OVK \geq \frac{\pi}{3} + \beta,$$

но

$$\angle KOV = \frac{\pi}{3},$$

а значит

$$\angle VKO \leq \frac{\pi}{3} - \beta < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{21}.$$

Тогда из теоремы синусов для треугольника  $\triangle VKO$  следует, что

$$\frac{|KO|}{|VO|} = \frac{\sin \angle OVK}{\sin \angle VKO}. \quad (1.12)$$

Заметим, что  $\angle KVO < \frac{\pi}{2}$ , так как

$$|KO| = R + 2\tau < \frac{|OV|}{\cos \angle KOV} = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2R.$$

Кроме того,  $\angle OVK \geq \frac{\pi}{3} + \beta \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{21}$ . Поэтому из (1.12) следует, что

$$1 + 40\lambda_2 = \frac{R + 2\tau}{R} = \frac{|KO|}{|VO|} = \frac{\sin \angle OVK}{\sin \angle VKO} \geq \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{21})}{\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{21})} > 1.5,$$

а это невозможно при  $\lambda_2 < \frac{1}{80}$ . Для того, чтобы рассматриваемая область содержалась внутри нужного угла, достаточно, чтобы граница области не пересекала лучи  $[VJ)$  и  $[VI)$ . Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что точка  $A$  пересечения внешней окружности с верхней стороной угла  $\gamma$  лежит ниже точки  $J$ . Тогда вся область будет лежать ниже прямой  $(VJ)$ . Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что точка  $B$  пересечения внутренней окружности с нижней стороной угла  $\gamma$  лежит выше точки  $I$ . Тогда вся область будет лежать выше прямой  $(VI)$ . Чтобы доказать, что точка  $A$  лежит ниже точки  $J$ , оценим  $\angle TWA$  и докажем, что

$$\angle TWA < \alpha + 50\lambda_2, \quad (1.13)$$

а также, что

$$\beta - 10\lambda_2 < \angle JWT. \quad (1.14)$$

Тогда, выбрав  $\alpha$  таким, чтобы

$$\alpha + 50\lambda_2 < \beta - 10\lambda_2, \quad (1.15)$$

получим, что точка  $A$  находится внутри дуги  $JK$  окружности  $\partial B_{R+2\tau}(O)$ . Чтобы доказать, что точка  $B$  лежит выше точки  $I$ , оценим  $\angle BWT$  и получим

$$\angle BWT < \alpha + 80\lambda_2. \quad (1.16)$$

Мы также докажем, что

$$\angle IWT > \beta - 40\lambda_2. \quad (1.17)$$

Тогда, выбрав  $\alpha$  таким, чтобы

$$\alpha + 80\lambda_2 < \beta - 40\lambda_2, \quad (1.18)$$

получим, что точка  $B$  находится на дуге окружности  $\partial B_{R-2\tau}(O)$ , соединяющей точку  $I$  с точкой  $\partial B_{R-2\tau}(O) \cap (TW]$ , а значит  $B$  находится внутри угла  $\angle IVK \subset \angle IVJ$ . Поскольку условие (1.18) сильнее, чем условие (1.15), достаточно выбрать  $\alpha$  таким, чтобы

$$\alpha < \beta - 120\lambda_2.$$

Оставшаяся часть доказательства посвящена обоснованиям утверждений (1.13), (1.14), (1.16), (1.17). Сначала докажем вспомогательное неравенство

$$\angle TWS < \alpha + 50\lambda_2, \quad (1.19)$$

где  $S$  — точка пересечения верхней стороны угла  $\gamma$  и окружности  $\partial B_R(O)$ . Опустим перпендикуляр из  $O$  на верхнюю сторону угла  $\gamma$ . Точку пересечения обозначим  $H_1$ , а точку пересечения верхней стороны угла  $\delta$  и перпендикуляра  $[OH_1]$  назовем  $H_2$ . Точку пересечения верхней стороны угла  $\delta$  с отрезком  $[OS]$  назовем  $Q$ , а с перпендикуляром к верхней стороне угла  $\gamma$ , проходящим через точку  $S$ , назовем  $P$ . Тогда (см. рис. 1.10 б) верно, что

$$\begin{aligned} |SP| &= |H_1H_2| = 2\tau, \\ \varphi &:= \angle WQO = \angle PQS = \angle H_1SO, \\ \sin \varphi &= \sin \angle H_1SO = \frac{|H_1O|}{|SO|} = \frac{|H_1H_2| + |H_2O|}{|SO|} \\ &= \frac{|H_1H_2| + |OW| \sin \angle OWH_2}{|SO|} = \frac{2\tau + R \sin \alpha}{R} = \sin \alpha + 40\lambda_2, \\ \operatorname{tg} \angle PWS &= \frac{|SP|}{|PW|} = \frac{|SP|}{|PQ| + |QH_2| + |H_2W|} \leq \frac{|SP|}{|H_2W|} = \frac{|SP|}{|OW| \cos \alpha} \\ &= \frac{2\tau}{R \cos \alpha} < \frac{40\lambda_2}{\cos \beta} < \frac{40\lambda_2}{\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{42})} < 50\lambda_2. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку  $x < \operatorname{tg} x$ ,

$$\angle PWS < \operatorname{tg} \angle PWS < 50\lambda_2.$$

Откуда следует неравенство (1.19):

$$\angle TWS = \angle TWP + \angle PWS < \alpha + 50\lambda_2.$$

Докажем неравенство (1.13). Очевидно, что  $\angle TWS > \angle TWA$ . Тогда, ввиду неравенства (1.19), утверждение (1.13) доказано. Докажем неравенство (1.16). Обозначим через  $S_1$  точку пересечения окружности  $B_R(O)$  с нижней стороной угла  $\gamma$ . Через  $N$  обозначим точку касания нижней стороны угла  $\gamma$  и окружности  $B_{2\tau}(W)$  (см. рис. 1.10 в). И пусть перпендикуляр, опущенный из  $O$  на нижнюю сторону угла  $\gamma$ , пересечет ее в точке  $P_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \angle TWS_1 &= \angle TWS < \alpha + 50\lambda_2, \\ |OP_1| &= |OH_1| = R \sin \alpha + 2\tau, \\ \angle OBW &= \angle OBN - \angle WBN = \arcsin \left( \frac{|OP_1|}{|BO|} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|BN|} \right) \\ &= \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R - 2\tau} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|BN|} \right). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \angle OS_1W &= \angle OS_1N - \angle WS_1N = \arcsin \left( \frac{|OP_1|}{|S_1O|} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|S_1N|} \right) \\ &= \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|S_1N|} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \angle OBW - \angle OS_1W &= \left( \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R - 2\tau} \right) - \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R} \right) \right) \\ &\quad - \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|BN|} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{|WN|}{|S_1N|} \right) \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{|WN|}{|BN|} > \frac{|WN|}{|S_1N|},$$

а  $\arctg$  — возрастающая функция, то

$$\angle OBW - \angle OS_1W < \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R - 2\tau} \right) - \arcsin \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R} \right). \quad (1.20)$$

Так как функция  $\arcsin x - \frac{2}{\sqrt{3}}x$  убывает при  $x < 1/2$ , то при  $1/2 > a > b$  выполняется неравенство

$$\arcsin a - \arcsin b < \frac{2}{\sqrt{3}}(a - b). \quad (1.21)$$

Заметим, что из условия на коэффициент (см. замечание 1.1) следует неравенство

$$\frac{6\tau}{R} = 120\lambda_2 < 1 - 2 \sin \pi/7 < 1 - 2 \sin \alpha,$$

а значит,

$$\frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R - 2\tau} < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно применить оценку (1.21) к (1.20), что дает

$$\begin{aligned} \angle OBW - \angle OS_1W &< \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R - 2\tau} - \frac{R \sin \alpha + 2\tau}{R} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} (R \sin \alpha + 2\tau) \frac{2\tau}{R(R - 2\tau)} \\ &< \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{R^2(\sin \alpha + 40\lambda_2) \cdot 40\lambda_2}{R^2} \\ &= \frac{80}{\sqrt{3}} \lambda_2 (\sin \alpha + 40\lambda_2) \leq \frac{40}{\sqrt{3}} \lambda_2 < 30\lambda_2, \end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство выполняется, потому что

$$\sin \alpha + 40\lambda_2 \leq \sin \pi/7 + 40\lambda_2 < \frac{1}{2}$$

при  $\lambda_2 < 1/800$ . Тогда

$$\angle OS_1W = \angle OWS_1 = \angle TWS_1 = \angle TWS,$$

а значит,

$$\angle TWB = \angle OWB < \angle OBW < \angle TWS + 30\lambda_2 < \alpha + 80\lambda_2,$$

где для получения последнего неравенства использовано (1.19). Тем самым доказано неравенство (1.16). Докажем неравенство (1.13). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \angle OWJ &> \angle WJO = \angle KOJ - \angle OWJ = \angle KOV - \angle JOV - \angle OWJ \\ &= \frac{\pi}{3} - \angle JOV - \angle OWJ = \frac{\pi}{3} - (\pi - \angle OVJ - \angle VJO) - \angle OWJ \\ &= \frac{\pi}{3} - (\pi - (\beta + \frac{\pi}{3}) - \angle VJO) - \angle OWJ = \beta - \frac{\pi}{3} + \angle VJO - \angle OWJ. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\angle OWJ > \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\angle VJO}{2}. \quad (1.22)$$

Применим теорему синусов к треугольнику  $\triangle VJO$ . Получим

$$\frac{\sin \angle VJO}{\sin \angle OVJ} = \frac{|VO|}{|OJ|} = \frac{R}{R + 2\tau} = \frac{1}{1 + 40\lambda_2}.$$

Значит,

$$\sin \angle VJO = \frac{\sin \angle OVJ}{1 + 40\lambda_2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)}{1 + 40\lambda_2},$$

то есть

$$\angle VJO = \arcsin \left( \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)}{1 + 40\lambda_2} \right).$$

Применив к последнему выражению лемму 1.4.8, получим

$$\angle VJO > \beta + \frac{\pi}{3} - 20\lambda_2.$$

С учетом этого из (1.22) получаем, что

$$\angle OWJ > \beta - 10\lambda_2.$$

Учитывая, что  $\angle TWJ = \angle OWJ$ , получаем (1.16). Докажем (1.17). Имеют место

равенства

$$\begin{aligned}\angle OIW + \angle IWO &= \angle IOK = \angle IOV - \angle KOV = (\pi - \angle VIO - \angle OVI) - \frac{\pi}{3} \\ &= (\pi - \angle VIO - (\frac{\pi}{3} - \beta)) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \beta - \angle VIO.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Применим теорему синусов к треугольнику  $\triangle OIV$ , получим

$$\frac{\sin \angle VIO}{\sin \angle OVI} = \frac{|VO|}{|IO|} = \frac{R}{R - 2\tau} = \frac{1}{1 - 40\lambda_2}$$

Значит,

$$\angle VIO = \arcsin \left( \frac{\sin \angle OVI}{1 - 40\lambda_2} \right) = \arcsin \left( \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \beta)}{1 - 40\lambda_2} \right).$$

Применив к последнему выражению лемму 1.4.8, получим

$$\angle VIO < \frac{\pi}{3} - \beta + 40\lambda_2.$$

С учетом (1.23), получаем

$$\angle OIW + \angle IWO > 2\beta - 40\lambda_2.\tag{1.24}$$

Применим теперь теорему синусов к треугольнику  $\triangle OIW$  и получим, что

$$\frac{\sin \angle OIW}{\sin \angle IWO} = \frac{|OW|}{|IO|} = \frac{R}{R - 2\tau} = \frac{1}{1 - 40\lambda_2}.$$

Значит,

$$\angle OIW = \arcsin \left( \frac{1}{1 - 40\lambda_2} \sin \angle IWO \right).$$

Применив к последнему выражению лемму 1.4.8 (это можно сделать, поскольку  $\angle IWO < \pi/6$ ), получим

$$\angle OIW < \angle IWO + 40\lambda_2.$$



тогда, с учетом (1.24), имеем

$$2\angle IWO + 40\lambda_2 > \angle IWO + \angle OIW > 2\beta - 40\lambda_2.$$

А значит,

$$\angle IWT = \angle IWO > \beta - 40\lambda_2.$$

□

**Замечание 1.4.10.** В обозначениях леммы 1.4.3 и при предположении, что

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{21} < \angle TWT' \leq \psi < \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{42},$$

точка  $Y'$  находится вне кругов  $B_{(1+40\lambda_3)\lambda_2\lambda_1 L}(O_V)$  и  $B_{(1+40\lambda_3)\lambda_2\lambda_1 L}(O_U)$  (где  $O_V \in [YV]$ ,  $|O_V V| = \lambda_2\lambda_1 L$ ,  $O_U \in [YU]$ ,  $|O_U U| = \lambda_2\lambda_1 L$ ,  $\lambda_3 \leq \lambda_2$ ).

*Доказательство.* Достаточно показать, что расстояние от точки  $V$  до луча  $p_V$  больше удвоенного радиуса этих кругов (поскольку расстояние между точками  $O_V$  и  $V$  меньше радиуса  $(1 + 40\lambda_3)\lambda_2\lambda_1 L$ ). Нетрудно видеть, что расстояние от точки  $V$  до луча  $p_V$  составляет  $\sin(\pi/6 - \psi) \cdot |VW| - 2\tau$ , где  $|VW| = \sqrt{3}\lambda_1 L$ ,  $\tau = 20\lambda_2\lambda_1 L$ . Таким образом, достаточно проверить неравенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \psi\right) \sqrt{3}\lambda_1 L - 40\lambda_2\lambda_1 L > 2(1 + 40\lambda_3)\lambda_2\lambda_1 L.$$

Поскольку

$$0.07 < \sin\frac{\pi}{42} < \sin\left(\frac{\pi}{6} - \psi\right),$$

достаточно убедиться в том, что

$$\sqrt{3} \cdot 0.07 > 42\lambda_2 + 80\lambda_3\lambda_2,$$

что верно при  $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \frac{\pi}{120 \cdot 42}$  (см. замечание 1.1).

□

## Глава 2. Построение минимайзера максимального расстояния для окружности

Мы изучаем свойства множеств  $\Sigma$ , обладающих минимальной длиной (одномерной мерой Хаусдорфа) в классе замкнутых связных множеств  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих условию

$$\max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma) \leq r$$

для заданного компактного множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  и для заданного числа  $r > 0$ . Такие множества  $\Sigma$  можно воспринимать как водопроводы минимальной длины, подходящие на расстояние не более  $r$  к каждой точке множества  $M$ , которое можно считать множеством потребителей воды.

В этой главе доказывается гипотеза Миранды, Паолини и Степанова, описывающая множество минимайзеров для частного случая, когда  $M$  является окружностью радиуса  $R > 0$ , удовлетворяющего условию  $r < R/4.98$ . Более того, мы показываем, что если  $M$  является границей гладкого выпуклого множества с минимальным радиусом кривизны  $R$ , то любой минимайзер  $\Sigma$  имеет схожую структуру при условии  $r < R/5$ . Кроме того, мы доказываем схожее утверждение для локальных минимайзеров.

### 2.1. История и постановка задачи

Для заданного компактного множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим функционал

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma),$$

где  $\Sigma$  — замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}^2$  и  $\text{dist}(y, \Sigma)$  обозначает евклидово расстояние между  $y$  и  $\Sigma$ . Величина  $F_M(\Sigma)$  будет в дальнейшем называться *энергией* множества  $\Sigma$ . Рассмотрим класс замкнутых связных множеств  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих неравенству  $F_M(\Sigma) \leq r$  для некоторого  $r > 0$ . Нас интересуют свойства множеств минимальной длины (одномерной меры Хаусдорфа)  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ . В дальнейшем будем называть такие множества *минимайзерами*. Такие множества можно воспринимать как водопроводы минимальной длины, подходящие на расстояние не более  $r$  к каждой точке множества  $M$ , которое можно считать множеством потребителей воды.

В работе [25] доказано (даже для общего  $n$ -мерного случая  $M \subset \mathbb{R}^n$ ), что множество  $OPT_\infty^*(M) = \bigcup_{r>0} OPT_\infty^*(M, r)$  минимайзеров (для всех  $r > 0$ ) непусто и совпадает с множеством  $OPT_\infty(M)$  решений двойственной задачи: минимизировать  $F_M$  среди всех компактных связных множеств  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  с заданным ограничением на длину  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$  (для соответствующего  $l > 0$ ). Вышеупомянутая двойственная задача сходна с большим числом задач минимизации других функционалов на классе замкнутых связных множеств, к примеру — функционала среднего расстояния относительно некоторой конечной борелевской меры (см. [4], [6], [7], [22] и [20]) или близких к ним задач городского планирования (см. [5]).

Минимизация функционала максимального или среднего расстояния среди дискретных множеств с заданным ограничением на число компонент связности (а не среди связных одномерных множеств) приводит к классу близких задач:  $k$ -center problem и  $k$ -median problem (см., например, [33], [34], [16] а также [3, 2]).

Некоторые базовые свойства минимайзеров для введенной выше задачи в общем,  $n$ -мерном случае (такие как отсутствие петель или регулярность по Альфорсу), доказаны в [28]. Пусть в дальнейшем  $B_\rho(x)$  обозначает открытый шар с радиусом  $\rho$  и центром в точке  $x$ , а  $B_\rho(M)$  — открытую  $\rho$ -окрестность  $M$ , то есть

$$B_\rho(M) := \bigcup_{x \in M} B_\rho(x).$$

Введем следующие естественные понятия.

**Определение 2.1.1.** Точка  $x \in \Sigma$  называется энергетической, если для каждого

$\rho > 0$  выполняется

$$F_M(\Sigma \setminus B_\rho(x)) > F_M(\Sigma).$$

Множество всех энергетических точек множества  $\Sigma$  будем обозначать  $G_\Sigma$ .

Рассмотрим минимайзер  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M)$  с энергией  $r = F_M(\Sigma)$ . Тогда множество  $\Sigma$  может быть разбито на три непересекающихся множества:

$$\Sigma = E_\Sigma \sqcup X_\Sigma \sqcup S_\Sigma,$$

где  $X_\Sigma \subset G_\Sigma$  — множество изолированных энергетических точек (то есть каждая точка  $x \in X_\Sigma$  — энергетическая и найдется такое  $\rho > 0$ , возможно зависящее от  $x$ , что  $B_\rho(x) \cap G_\Sigma = \{x\}$ );  $E_\Sigma = G_\Sigma \setminus X_\Sigma$  — множество неизолированных энергетических точек, а  $S_\Sigma := \Sigma \setminus G_\Sigma$  — множество неэнергетических точек минимайзера, которое называют штейнеровской частью минимайзера. В [25] доказаны следующие утверждения.

- (a) Для любой точки  $x \in G_\Sigma$  найдется такая точка  $y \in M$ , что  $|x - y| = r$  и  $B_r(y) \cap \Sigma = \emptyset$ . Если  $X_\Sigma$  не конечно, тогда точки сгущения множества  $X_\Sigma$  принадлежат  $E_\Sigma$ .
- (b) Для произвольной точки  $x \in S_\Sigma$  найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что пересечение  $S_\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$  является отрезком или правильной треногой, то есть объединением трех отрезков с общей концевой точкой и попарными углами, равными  $2\pi/3$ . Если точка  $x \in S_\Sigma$  является центром правильной треноги, то её называют штейнеровской точкой (или точкой ветвления) множества  $\Sigma$ .

Заметим, что конечная длина  $\Sigma$  влечет его линейную связность (см., например, [15]). Ввиду отсутствия петель (см. [28]), путь в  $\Sigma$ , соединяющий две точки  $\Sigma$ , единственен.

Также в этой главе будет использоваться задача Штейнера и свойства решений этой задачи на плоскости (см. главу 1). В частности, если  $\Sigma$  является решением задачи Штейнера для множества  $C \subset \mathbb{R}^2$ , то

- $\Sigma \setminus C$  состоит из отрезков;

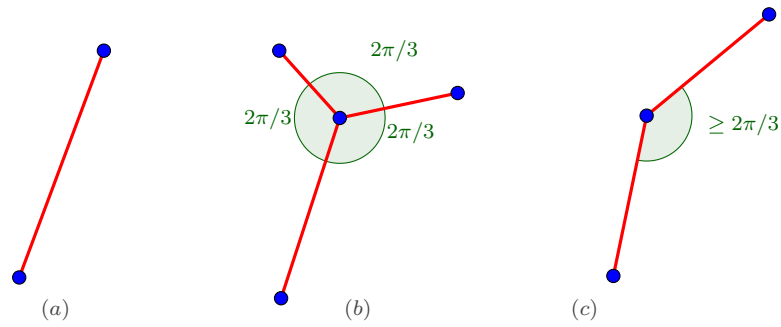


Рис. 2.1: Локально минимальные сети для множеств из двух и трех точек.

- угол между двумя отрезками с общей вершиной составляет хотя бы  $2\pi/3$ ;
- будем называть штейнеровской точкой (или точкой ветвления) такую точку  $\Sigma \setminus A$ , которая не является внутренней точкой отрезка  $\Sigma$ . Тогда её степень (в смысле теории графов) равен трем, а углы между любыми двумя отрезками с концами в ней составляют ровно  $2\pi/3$ . В таком случае будем говорить, что эта точка является центром правильной треноги;
- известно, что для множества из трех точек  $C = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^2$  решение задачи Штейнера единственно. Будем обозначать его  $St(x_1, x_2, x_3)$ .

Будем говорить, что  $S$  является локально минимальной сетью для  $C$ , если для произвольной точки  $x \in S$  найдется такая окрестность  $U \ni x$ , что  $S \cap \bar{U}$  является деревом Штейнера для  $S \cap \partial U$ . Если сколь угодно малая окрестность точки  $x$  в множестве  $\Sigma$  является правильной треногой, то точку  $x$  называем штейнеровской точкой (или точкой ветвления). Локально минимальная сеть удовлетворяет всем свойствам дерева Штейнера (которые можно найти в главе 1), кроме отсутствия циклов (см. [17] и [29]). В настоящей главе нам потребуются локально минимальные сети для множества  $A$ , состоящего не более чем из четырех точек. Известно, что существует только семь комбинаторных типов для таких сетей, которые можно найти на рисунках 2.1 и 2.2.

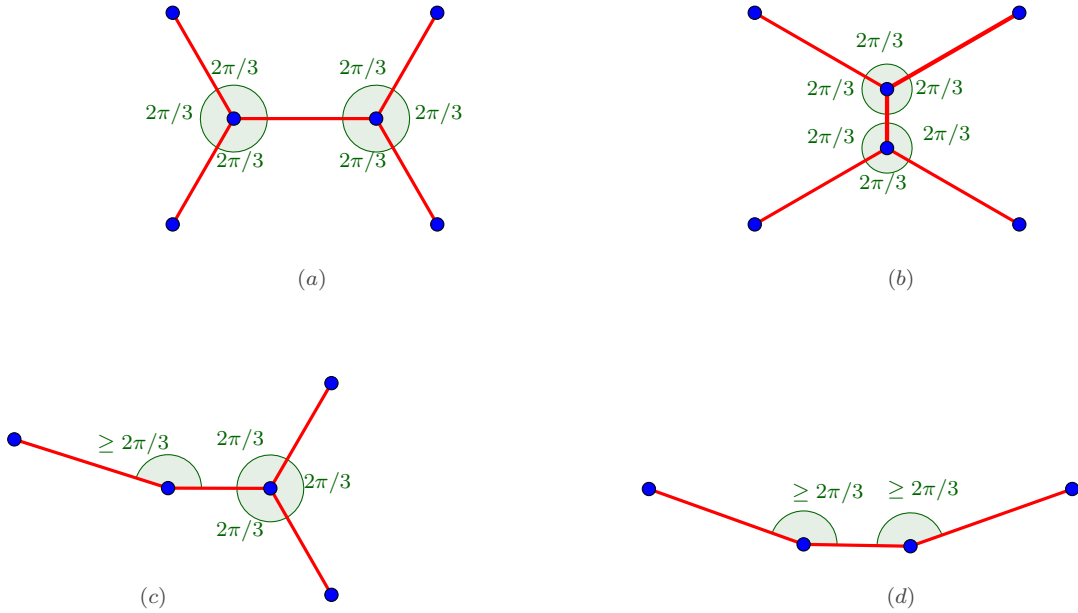


Рис. 2.2: Локально минимальная сеть для множества из 4 точек.

## 2.2. Обозначения и предварительные слова

Мы будем пользоваться следующими обозначениями.

- Для множества  $X \subset \mathbb{R}^2$  мы обозначаем через  $\bar{X}$  его замыкание, через  $\text{Int}(X)$  — его внутренность и через  $\partial X$  — его топологическую границу.
- Для точек  $B$  и  $C$  мы обозначаем через  $[BC]$ ,  $[BC)$  и  $(BC)$  соответственно (замкнутый) отрезок, луч и прямую. Мы обозначаем  $]BC]$  и  $]BC[$  соответствующие полуоткрытый и открытый интервал и через  $|BC|$  — длину этих интервалов.
- Под *замкнутой выпуклой кривой* будем понимать *границу выпуклого компактного плоского множества*.
- Мы называем *хордой* замкнутой выпуклой кривой  $Z$  отрезок, соединяющий две точки из  $Z$ .

- Подмножество плоской кривой  $Z$  называется *дугой*  $Z$ , если оно является непрерывным инъективным образом интервала (возможно, вырожденного). Мы говорим, что дуга кривой  $Z$  *замкнута*, если она является относительно замкнутым подмножеством множества  $Z$ . Образы концевых точек интервала будем называть *концами* дуги; образы внутренних точек интервала будем называть *внутренними* точками дуги, замкнутая дуга с концами в  $B$  и  $C$  будет обозначаться через  $[\overset{\vee}{BC}]$ , а её длина — через  $|\overset{\vee}{BC}|$ .
- Для замкнутого выпуклого множества  $N \subset \mathbb{R}^2$  определим *минимальный радиус кривизны* его границы с помощью формулы

$$R(\partial N) := \inf_{x \in \partial N} \sup\{\rho: \overline{B_\rho(O)} \cap \partial N = x \text{ для некоторой } O \in N\}.$$

- Для замкнутого выпуклого множества  $N \subset \mathbb{R}^2$  определим *внутреннее множество*  $N_r$  как множество всех точек множества  $N$ , находящихся на расстоянии хотя бы  $r$  от границы:  $N_r := N \setminus B_r(\partial N)$ .
- Будем в дальнейшем полагать  $N := \text{conv}(M)$ , где  $\text{conv}$  обозначает замкнутую выпуклую оболочку, и  $M_r := \partial N_r$ . Заметим, что  $N$ ,  $N_r$ ,  $M$  и  $M_r$  — замкнутые множества.

В дальнейшем будем полагать  $M$  выпуклой замкнутой кривой с минимальным радиусом кривизны  $R > r$ . Несложно заметить, что в этом случае  $M_r$  является выпуклой замкнутой кривой с минимальным радиусом кривизны  $R - r$ .

- Если отрезок  $[BC]$  является одновременно дугой множества  $M_r$  и хордой множества  $M_r$  (такое может произойти, если  $M_r$  не является строго выпуклым) мы будем работать с  $[BC]$  как с дугой, если множество  $]BC[$  содержит энергетическую точку, и как с хордой — в противном случае. Во втором разделе мы объясним это подробнее.
- Мы говорим, что дуга  $[\overset{\vee}{BC}] \subset \Sigma$  множества  $M_r$  *продолжается хордой* в множестве  $\Sigma$ , если для некоторой  $J \in \{B, C\}$  существует хорда  $[JD]$  множества  $M_r$  такая, что  $[JD] \subset \Sigma$ .

- Для точки  $x \in \Sigma \cap M_r$  пусть  $Q_x \in M$  — такая точка, что  $\text{dist}(x, Q_x) = r$  (в этом случае  $Q_x$  единственна ввиду условия на кривизну множества  $M$ ). Также в этом случае  $[xQ_x]$  лежит на нормали к  $M_r$  в точке  $x$  и на нормали к  $M$  в точке  $Q_x$ .
- Для энергетической точки  $x \in G_\Sigma$  пусть  $Q_x$  является (возможно не единственной) точкой из свойства (а) энергетических точек. Мы будем рассматривать такой выбор точки  $Q_x \in M$  как канонический выбор точки из  $M$  на расстоянии  $r$  от  $x$ .
- Мы будем говорить, что множество  $Z \subset \mathbb{R}^2$  *покрывает* подмножество  $Q \subset M$ , если  $Q \subset \overline{B_r(Z)}$ . Обычно мы используем этот термин в ситуации, когда  $Q$  является дугой  $M$ .
- Для множества  $Z \subset \mathbb{R}^2$  мы определяем *диаметр* множества  $Z$  как  $\sup\{\text{dist}(x, y) \mid x, y \in Z\}$ , и обозначаем его  $\text{diam}(Z)$ .
- Мы фиксируем на плоскости ориентацию по часовой стрелке.
- Для лучей  $[BC)$  и  $[CD)$  пусть  $\angle([BC), [CD))$  обозначает *направленный угол* от  $[BC)$  к  $[CD)$  в соответствии с ориентацией по часовой стрелке.
- Используя асимптотические обозначения  $o(\cdot)$ ,  $O(\cdot)$ , мы будем подразумевать, что соответствующее асимптотическое условие выполняется относительно переменной, стремящейся к какому-либо пределу, где и переменная, и предел обычно ясны из контекста. При необходимости переменная будет писаться в нижнем индексе асимптотического символа.

### 2.3. Основные результаты главы

**Определение 2.3.1.** Пусть  $M$  — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > r$ . Тогда связная кривая  $\Sigma$  называется *подковой*, если  $F_M(\Sigma) = r$  и  $\Sigma$  — объединение дуги  $q$  множества  $M_r$  и двух невырожденных отрезков, касающихся множества  $M_r$  в различных концевых точках дуги  $q$  и заканчивающихся энергетическими точками (как изображено на рис. 2.3).



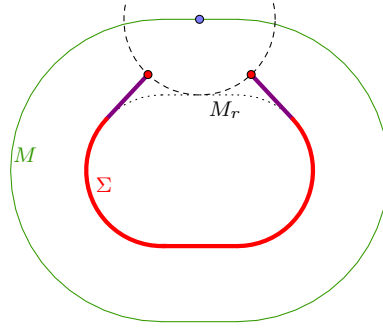


Рис. 2.3: Подкова.

Следующая теорема доказывает гипотезу Миранды, Паолини и Степанова из работы [25] о множестве  $OPT_{\infty}^*(M, r)$  минимайзеров для  $M := \partial B_R(0)$  при условии  $r < R/4.98$ . Она показывает даже больше. А именно, что произвольная замкнутая выпуклая кривая  $M$  имеет минимайзеры схожей структуры, если минимальный радиус кривизны множества  $M$  составляет хотя бы  $5r$ . Заметим, что это не доказывает гипотезу целиком (которая в работе [25] была сформулирована для произвольной  $r < R$ ).

**Теорема 2.3.2.** *Для любой замкнутой выпуклой кривой  $M$  с минимальным радиусом кривизны  $R$  и для произвольного  $r < R/5$  множество минимайзеров  $OPT_{\infty}^*(M, r)$  содержит только подковы. Для окружности  $M := \partial B_R(O)$  утверждение верно при  $r < R/4.98$ .*

**Определение 2.3.3.** *Пусть  $M \subset \mathbb{R}^2$  — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R$ . Связное множество  $\Sigma$  называется локальным минимайзером, если оно покрывает  $M$  и если найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для произвольного связного множества  $\Sigma'$ , покрывающего  $M$  и удовлетворяющего условию  $\text{diam } \Sigma \Delta \Sigma' < \varepsilon$ , выполняется неравенство  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma')$ .*

**Следствие 2.3.4.** *Пусть  $\hat{\Sigma}$  — локальный минимайзер для некоторой замкнутой выпуклой кривой  $M$  с минимальным радиусом кривизны  $R > 5r$ . Тогда если  $\hat{\Sigma}$  — не подкова, то  $\mathcal{H}^1(\Sigma) - \mathcal{H}^1(\Sigma_{\text{opt}}) > (R - 5r)/2$ , где  $\Sigma_{\text{opt}} \in OPT_{\infty}^*(M, r)$  — произвольный (глобальный) минимайзер.*

Отметим, что утверждение теоремы 2.3.2 без требования соотношения на величины  $R$  и  $r$ , вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

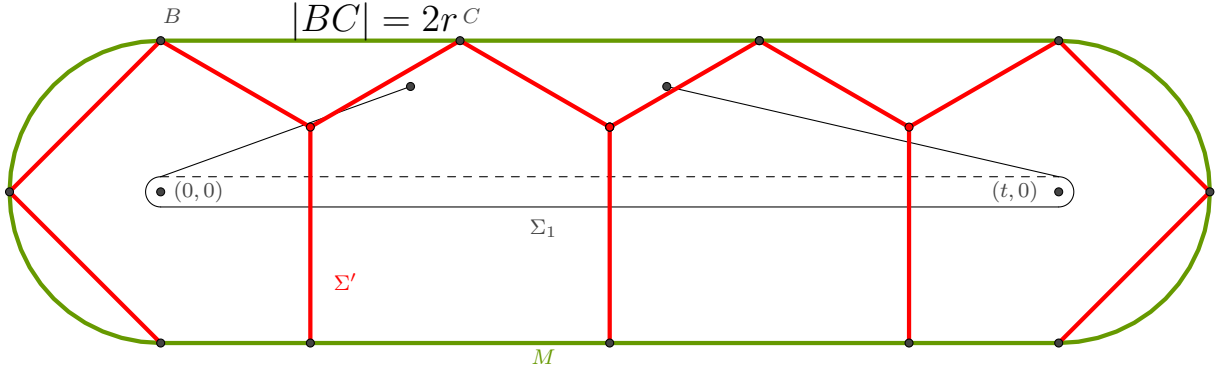


Рис. 2.4: Подкова  $\Sigma_1$  и более удачный кандидат  $\Sigma'$  из примера 2.3.5.

**Пример 2.3.5.** Рассмотрим стадион (см. рис. 2.4)

$$N^t := \overline{\cup_{x \in [0,t] \times \{0\}} B_1(x)}, \quad M^t := \partial N^t.$$

Заметим, что  $M = M^t$  является границей стадиона и имеет минимальный радиус кривизны 1 для каждого  $t$ . Выберем  $1 > r > 1 - \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon$  так, чтобы  $t/r \in 2\mathbb{N}$ . Ясно, что любая подкова имеет длину  $2t - O(1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Рассмотрим точки  $x_{2k} = (2kr, 1)$ ,  $x_{2k+1} = ((2k+1)r, -1) \in M^t$  для  $k = 0, 1, \dots, t/(2r)$ . Пусть  $X$  является объединением множеств  $\mathcal{S}t(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2})$  для  $k = 0, 1, \dots, t/(2r) - 1$ . Каждое такое дерево является треногой, длина которой стремится к  $2 + \sqrt{3}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Заметим, что

$$\Sigma' := X \cup [(0, 1), (-1, 0)] \cup [(-1, 0), (0, -1)] \cup [(t, 1), (t+1, 0)] \cup [(t+1, 0), (t, -1)]$$

связно и  $M^t \subset \overline{B_r(\Sigma')}$  (это правда, поскольку  $\text{dist}(x_i, x_{i+2}) = 2r$ , так что множество  $\{x_i\}$  покрывает горизонтальные прямые  $M^t$ ; а четыре дополнительных отрезка покрывают полуокружности  $M^t$ ). Длина множества  $X$  составляет  $(2 + \sqrt{3} + o_\varepsilon(1)) \frac{t}{2r} + 4\sqrt{2} \leq (1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + o_\varepsilon(1)) \frac{t}{r} < 2t - O_t(1)$ , а значит можно выбрать  $\varepsilon$  столь малым, а  $t$  столь большим, чтобы  $\Sigma'$  было более удачным кандидатом, чем подкова, а значит подкова не является глобальным минимайзером для  $M^t$ .

## 2.4. Схема доказательства основной теоремы главы

Здесь мы приведем схему доказательства теоремы 2.3.2. Напомним, что в [28] следующее утверждение было доказано.

**Лемма 2.4.1.** *Пусть множество  $M \subset \mathbb{R}^2$  компактно, а  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M)$ . Тогда  $\Sigma$  не содержит циклов.*

В дальнейшем объединение замыканий всех связных компонент множества  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$  мы будем обозначать  $\Sigma_r$ .

**Лемма 2.4.2.** *Пусть  $M$  — замкнутое выпуклое множество с минимальным радиусом кривизны  $R$ , а  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M, r)$  является произвольным минимайзером с энергией  $r < R$ . Тогда выполняются следующие утверждения.*

- (i) *Замыкание произвольной компоненты связности множества  $\Sigma \cap N_r$  является решением задачи Штейнера для некоторого множества точек, лежащих на  $M_r$  и, в частности, состоит только из прямолинейных отрезков с концами на  $M_r$  и в точках ветвления.*
- (ii)  *$\Sigma$  состоит из дуг  $M_r$  (возможно, вырожденных) и прямолинейных отрезков.*
- (iii) *Длина любого отрезка множества  $\Sigma_r$  не превосходит  $a_M(r)$  для некоторой функции  $a_M(r) \leq 2r$ . Для окружности  $M := \partial B_R(O)$  можно положить  $a_{\partial B_R(O)}(r) = 2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}}$ .*

Заметим, что в данной лемме не утверждается конечность числа прямолинейных отрезков. Утверждение, подобное лемме 2.4.2, может быть доказано для  $M$ , являющегося границей не обязательно выпуклого множества, но мы будем рассматривать только выпуклый случай, чтобы избежать лишних технических деталей.

Эта и следующие леммы данного раздела будут доказаны в следующем разделе.

**Лемма 2.4.3.** *Пусть  $M$  — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > 2a_M(r) + r$ , где длина произвольного отрезка  $\Sigma_r$  не превосходит  $a_M(r)$  (например, можно выбирать  $a_M$  как в лемме 2.4.2). Тогда  $\Sigma$  не будет*

иметь точек ветвления в  $\text{Int}(N_r) \cup (S_\Sigma \cap M_r)$ . Тогда  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$  состоит из не имеющих общих внутренних точек хорд  $M_r$ .

Рассмотрим множество замыканий связных компонент множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Назовем его  $V_C(G)$  (в дальнейшем ему будет сопоставляться подмножество множества вершин графа). Заметим, что каждый элемент множества  $V_C(G)$  имеет положительную длину, ввиду невырожденности и связности множества  $\Sigma$ . Ввиду компактности  $M$  каждый минимайзер  $\Sigma \in OPT_\infty^*$  имеет конечную длину, а значит множество  $V_C(G)$  не более чем счетно. Рассмотрим произвольный элемент  $S \in V_C(G)$ . Заметим, что ввиду связности  $S$  и условия на радиус кривизны множества  $M$  множество  $\overline{B_r(C)} \cap M$  является замкнутой дугой. Будем обозначать её  $q_S$ . Рассмотрим множество всех максимальных дуг множества  $M_r$  в множестве  $\Sigma$ , которые не содержатся в замыкании связных компонент множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Обозначим за  $V_A(G)$  его подмножество, состоящее из дуг, внутренность которых содержит энергетическую точку. Заметим, что если  $M$  не строго выпукла, тогда надо отдельно обговорить ситуацию, когда дуга кривой  $M_r$  (обозначим её  $[\check{B}C]$ ) является одновременно хордой кривой  $M_r$ . Тогда, если  $] \check{B}C[$  не содержит энергетическую точку, мы будем рассматривать её как хорду: заметим, что если  $\Sigma \setminus ] \check{B}C[$  не покрывает  $Q_x \in M$  для некоторой точки  $x \in ]BC[$ , тогда  $x$  — энергетическая; поэтому если  $]BC[$  не содержит энергетических точек, то  $[BC] = [\check{B}C]$  обладает всеми свойствами обычной хорды множества  $M_r$ . Несложно заметить, что дуга множества  $M_r$   $[\check{B}C] \in V_A(G)$  покрывает дугу множества  $M$   $q_{\check{B}C} := [Q_B, Q_C]$ , где  $Q_B, Q_C \in M$  — единственные такие точки, что  $\text{dist}(B, Q_B) = \text{dist}(C, Q_C) = r$ .

**Определение 2.4.4.** Пусть  $M$  — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > r$ ,  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M, r)$  и  $S \in V_C(G)$ .

- (i) Обозначим за  $n(S)$  количество энергетических точек в  $S$ .
- (ii) Точку  $x \in S \cap M_r$  будем называть точкой входа. Количество точек входа в  $S$  обозначим  $t(S)$ .

Следующая лемма, в частности, показывает, что  $n(S)$  и  $t(S)$  конечны.

**Лемма 2.4.5.** Пусть  $M$  — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > 2a_M(r) + r$ ,  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M, r)$  и  $S \in V_C(G)$ . Тогда  $n(S) \leq 2$ ,

$m(S) \leq 2$ . Более того,  $S$  является локально минимальной сетью (локальным деревом Штейнера), соединяющей множество точек входа и энергетических точек множества  $S$ .

Ввиду предыдущей леммы,  $S$  — локально минимальная сеть для не более чем  $n(S) + m(S) \leq 4$  точек. Все возможные комбинаторные типы таких сетей приведены на рисунках 2.1 и 2.2.

**Лемма 2.4.6.** В условиях теоремы 2.3.2 если  $S \in V(G) := V_C(G) \sqcup V_A(G)$  не является точкой, то

$$q_S \not\subset \bigcup_{S' \in V(G) \setminus \{S\}} q_{S'}.$$

Более того, каждое множество  $S \in V(G)$  содержит энергетическую точку.

**Лемма 2.4.7.** В условиях теоремы 2.3.2 множество  $V(G) = V_C(G) \sqcup V_A(G)$  конечно.

Заметим, что одноточечное множество из  $\Sigma \cap M_r$  (максимальная дуга  $\xi \subset \Sigma \cap M_r$  нулевой длины, не содержащаяся в замыкании компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ ) не может быть энергетической (ввиду предыдущей леммы объединение множеств  $q_S$  по всем  $S \in V(G) \setminus \xi$  является конечным объединением замкнутых множеств, а значит совпадает с  $M$ , поскольку  $q_\xi = \{Q_\xi\}$ ), а значит окрестность  $\xi$  — либо отрезок, либо тренога (последнее невозможно ввиду леммы 2.4.3). Итого, каждая точка множества  $\Sigma \cap M_r$  содержится в максимальной дуге кривой  $M_r$  положительной длины или в замыкании связной компоненты множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Также ввиду леммы 2.4.5 каждая связная компонента множества  $\Sigma \setminus N_r$  содержит не более пяти максимальных отрезков, а значит  $\Sigma$  состоит из конечного числа отрезков и дуг кривой  $M_r$ .

**Лемма 2.4.8.** Пусть  $[BI] \subset \Sigma$  — хорда  $M_r$  в условиях теоремы 2.3.2. Тогда  $I \in S_\Sigma$  и, кроме того, найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\overline{B_\varepsilon(I)} \cap \Sigma = [I_1 I_2]$ , для некоторых  $I_1, I_2 \in \partial B_\varepsilon(I)$ .

**Лемма 2.4.9.** В условиях теоремы 2.3.2 каждая максимальная дуга  $[BC] \in V_A(G)$  продолжается отрезками касательных к кривой  $M_r$ , то есть существует такое открытое множество  $U \supset [BC]$ , что  $\Sigma \cap \overline{U} = [B'V] \cup [BC] \cup [CC']$ ,

где  $[B'V]$  и  $[CC']$  — подмножества касательных к  $M_r$  в точках  $B$  и  $C$  соответственно.

**Лемма 2.4.10.** Пусть в условиях теоремы 2.3.2 точка  $C$  принадлежит пересечению  $M_r \cap \Sigma$ . Тогда  $\Sigma$  имеет касательную в  $C$ , в частности, для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любой пары точек  $B, D \in \Sigma \cap B_\delta(C) \setminus C$  выполняется неравенство  $\min(|\angle BCD - \pi|, |\angle BCD|) < \varepsilon$ .

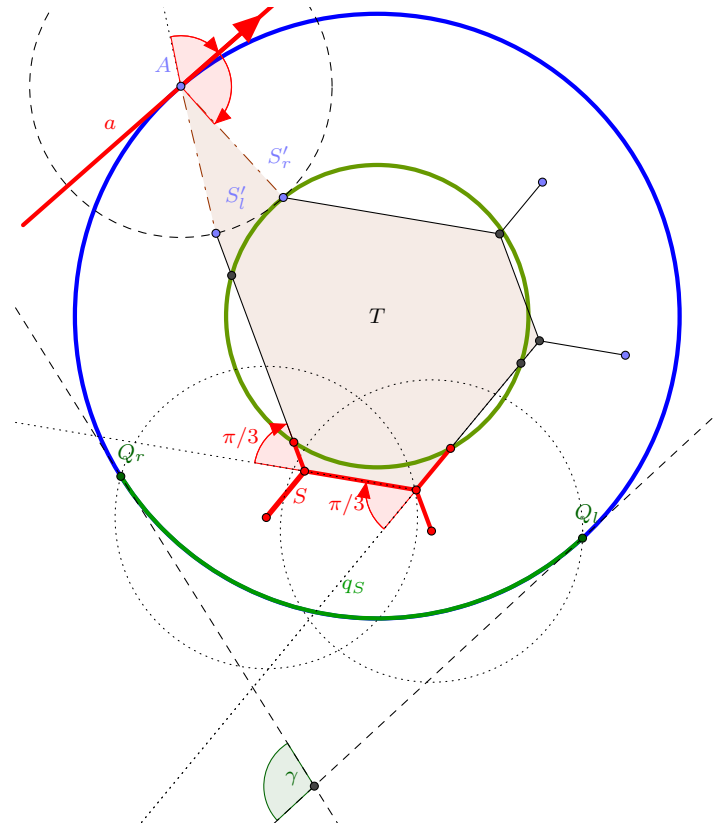
**Определение 2.4.11.** В условиях теоремы 2.3.2 рассмотрим следующий абстрактный граф  $G = (V(G), E(G))$  (напомним, что множество вершин  $V(G) = V_C(G) \sqcup V_A(G)$ ; ввиду леммы 2.4.7 оно конечно), где множество ребер  $E(G)$  определяется следующим образом:

- в случае  $S_1, S_2 \in V_C(G)$  ребро между ними существует, если они соединены в  $\Sigma$  хордой кривой  $M_r$  или если  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ;
- в случае  $S_1 \in V_C(G)$ ,  $[B\check{C}] \in V_A(G)$  ребро между  $S_1$  и  $[B\check{C}]$  существует, если  $S_1 \cap [B\check{C}] \neq \emptyset$ ;
- и, наконец, в случае  $[B_1\check{C}_1], [B_2\check{C}_2] \in V_A(G)$  ребра нет.

**Следствие 2.4.12.** В условиях теоремы 2.3.2 граф  $G$  не содержит циклов; он имеет ровно две вершины степени 1, а все остальные вершины имеют степень 2. Иными словами,  $G$  является путем с хотя бы одним ребром.

*Доказательство.* Ввиду леммы 2.4.7 граф конечен. Ввиду леммы 2.4.8 каждая хорда кривой  $M_r$  в  $\Sigma$  связывает в точности две вершины из множества  $V(G)$ . Тогда неравенство  $t(S) \leq 2$  (лемма 2.4.5) влечет  $\deg(v) \leq 2$  при  $v \in V_C(G)$ ; для  $v \in V_A(G)$  неравенство  $\deg(v) \leq 2$  выполняется ввиду леммы 2.4.9.

Заметим, что если  $(S_1, S_2) \in E(G)$ , то в  $\Sigma$  существует путь между  $S_1$  и  $S_2$ , не пересекающий другие множества  $S \in V(G)$ ,  $S \notin \{S_1, S_2\}$ . Это означает, что если  $G$  содержит цикл, то и  $\Sigma$  тоже, что противоречит лемме 2.4.1. Более того, путь между двумя точками множества  $\Sigma$ , принадлежащими разным вершинам из  $V(G)$ , естественным образом порождает путь в  $G$  (на самом деле, если путь в  $\Sigma$  соединяет разные вершины  $S_1, S_2 \in V(G)$ , не затрагивая другие вершины,

Рис. 2.5: Построение области  $T$ .

то  $(S_1, S_2) \in E(G)$ ; поэтому для произвольного пути в  $\Sigma$  достаточно разбить его на конечное число путей, соединяющих различные вершины  $G$  и не проходящие через другие вершины). Таким образом, связность  $\Sigma$  влечет связность  $G$ . То есть  $G$  — путь.

Покажем теперь, что  $\#V(G) > 1$ . Предположим противное, то есть что  $V(G) = \{v\}$ . Если  $v \in V_G(G)$ , то  $m(v) = 0$ , поэтому  $v$  — отрезок, что невозможно. В противном случае  $v$  — дуга, но  $q_v = M$ , так что  $v = M_r$  содержит цикл. Снова получили противоречие с леммой 2.4.1.  $\square$

Таким образом, в условиях теоремы 2.3.2 существуют две компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ , обладающие ровно одной точкой входа; эти компоненты соответствуют висячим вершинам нашего графа. Мы будем называть их *конечными компонентами* и обозначать  $S_l$  и  $S_r$  (и называть их *левой* и *правой* соответственно); остальные компоненты будем называть *средними*.

Ввиду леммы 2.4.6 каждая точка  $M$  покрыта не более чем двумя множествами

из  $V(G)$ . Ввиду следствия 2.4.12 граф  $G$  является путем, поэтому если  $S_1, S_2$  связаны в  $G$  ребром, то  $q_{S_1} \cap q_{S_2} \neq \emptyset$ . Более того, по тем же причинам  $q_{S_l} \cap q_{S_r} \neq \emptyset$ , потому что иначе нашлась бы часть  $M$ , не покрытая  $\Sigma$ .

**Лемма 2.4.13.** *Внутренности дуг  $q_{S_l}$  и  $q_{S_r}$  не пересекаются.*

Обозначим за  $A$  точку пересечения дуг  $q_{S_l}$  и  $q_{S_r}$  (см. рис. 2.5); ввиду леммы 2.4.13 таких точек не больше двух. Рассмотрим множество  $\hat{\Sigma} := \Sigma \cup [AS'_l] \cup [AS'_r]$ , где  $[AS'_l]$  и  $[AS'_r]$  — отрезки длины  $r$ , соединяющие точку  $A$  с  $S_l$  и  $S_r$  соответственно. Ввиду леммы 2.4.1 и того, что  $B_r(A) \cap \Sigma = \emptyset$ , множество  $\hat{\Sigma}$  ограничивает единственную область, которую мы в дальнейшем будем обозначать  $T$  (см. рис. 2.5).

Предыдущие леммы влекут следующее следствие.

**Следствие 2.4.14.** *Граница множества  $T$  — замкнутая кривая, состоящая из конечного числа дуг кривой  $M_r$  и конечного числа отрезков.*

Рассмотрим поведение касательной к границе области  $T$ . Следствие 2.4.14 и лемма 2.4.10 гарантируют, что все точки, где касательная не непрерывна (то есть точки, в которых касательная к  $\partial T$  не существует), кроме точки  $A$ , принадлежат связным компонентам множества  $\Sigma \setminus N_r$ .

**Определение 2.4.15.** *Пусть  $\gamma$  —  $C^1$ -гладкая плоская инъективная кривая. Будем говорить, что поворот кривой  $\gamma$  — это величина, определенная формулой:*

$$\text{turn}(\gamma) := \int_0^1 d \arg(\gamma'(t)),$$

где  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  является инъективной параметризацией  $\gamma$  с  $\gamma'(t) \neq 0$ , а  $\arg$  — непрерывная ветка многозначной функции  $\text{Arg}$ .

Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — кусочно  $C^1$ -гладкая инъективная плоская кривая, с конечным числом точек разрыва  $\gamma'$ :  $\{t_i\}_{i=1}^N$ , где  $t_i < t_j$  при  $i < j$  (то есть  $\gamma$   $C^1$ -гладкая на каждом интервале  $[t_i, t_{i+1}]$ ). Определим  $t_0 := 0$  и

$$\text{turn}(\gamma) := \sum_{i=0}^N \text{turn}(\gamma([t_i, t_{i+1}])) + \sum_{i=1}^N \angle([\gamma(t_i - 0)\gamma(t_i)], [\gamma(t_i)\gamma(t_i + 0)]).$$



Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — простая замкнутая (то есть  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ) кусочно  $C^1$ -гладкая плоская кривая, с конечным числом точек разрыва  $\gamma' \{t_i\}_{i=1}^N$ ,  $t_i < t_j$  при  $i < j$ . Определим  $t_0 := 0$  и

$$\text{turn}(\gamma) := \sum_{i=0}^N \text{turn}(\gamma([t_i, t_{i+1}])) + \sum_{i=1}^N \angle([\gamma(t_i - 0)\gamma(t_i), [\gamma(t_i)\gamma(t_i + 0)]) + \\ \angle([\gamma(1 - 0)\gamma(1), [\gamma(0)\gamma(0 + 0)]).$$

В нашей постановке поворот незамкнутой кривой  $\gamma$  почти всегда совпадает с направленным углом между касательными к концам  $\gamma$ . Заметим, что для несампересекающейся замкнутой кусочно  $C^1$ -гладкой плоской кривой  $\gamma$  всегда выполняется  $\text{turn}(\gamma) = 2\pi$  (для параметризации, согласованной с ориентацией по часовой стрелке).

Теперь мы определим такую же величину для замыкания связной компоненты  $\Sigma \setminus N_r$ .

**Определение 2.4.16.** В условиях теоремы 2.3.2 пусть  $S$  — замыкание компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Тогда  $\text{turn}(S)$  обозначает поворот кривой  $S \cap \partial T$ , параметризованной по часовой стрелке. В частности, если  $S = S_l$ , то  $\text{turn}(S)$  означает поворот соответствующей кривой  $S \cap \partial T$ , параметризованной так, чтобы начинаться в точке входа и заканчиваться в  $S'_l$ , а если  $S = S_r$ , то  $\text{turn}(S)$  означает поворот кривой  $S \cap \partial T$ , параметризованной так, чтобы начинаться в  $S'_r$  и заканчиваться в точке входа.

Теперь мы можем сформулировать центральную лемму. Рисунок 2.5 может упростить чтение её формулировки.

**Лемма 2.4.17.** В условиях теоремы 2.3.2 пусть  $\Sigma \in OPT_\infty^*(M, r)$  — минимайзер,  $S \in V(G)$  — замыкание связной компоненты множества  $\Sigma \setminus N_r$  или дуги  $M_r$ . Тогда верны следующие утверждения.

- Если  $S$  — средняя компонента или дуга кривой  $M_r$ , то  $\text{turn}(q_S) \leq \text{turn}(S)$ . При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда  $S$  является дугой  $M_r$ .

- Если  $S$  — конечная компонента, то для правой и левой компонент выполняются неравенства

$$\text{turn}(q_{S_l}) \leq \text{turn}(S_l) + \angle([C_l S'_l], [S'_l A]) + \angle([S'_l A], a),$$

$$\text{turn}(q_{S_r}) \leq \angle(a, [AS'_r]) + \angle([AS'_r], [S'_r C_r]) + \text{turn}(S_r),$$

где  $a$  обозначает касательный луч к  $M$  в точке  $A$ , направленный слева направо (см. рис. 2.5, углы  $\angle([S'_l A], a)$  и  $\angle(a, [AS'_r])$  обозначены красным), а  $C_i$  — точка ветвления множества  $S_i$ , если  $S_i$  — тренога, и точка входа  $S_i$  — в остальных случаях, где  $i \in \{l, r\}$  (определение корректно ввиду леммы 2.4.5). Равенство достигается тогда и только тогда, когда  $S$  — отрезок касательной к  $M_r$ .

**Замечание 2.4.18.** Если в лемме 2.4.17 предположить, что  $\Sigma$  не имеет штейнеровских точек в  $N_r$ , то достаточно потребовать выполнения неравенства  $r < R/2.9$  (это будет видно из доказательства леммы 2.4.17, случай 1a).

Теперь теорема 2.3.2 доказывается в несколько строчек.

*Доказательство теоремы 2.3.2.* Ввиду леммы 2.4.2(iii) выполняется неравенство  $2a_M(r) + r < 5r$  для произвольного  $M$  и  $2a_M(r) + r < 4.98r$  если  $M$  — окружность. Заметим, что

$$2\pi = \text{turn}(\partial T) = \sum_{S \in V(G)} \text{turn}(S) + \angle([C_l S'_l], [S'_l A]) + \angle([S'_l A], a) + \angle([AS'_r], [S'_r C_r]) + \angle(a, [AS'_r])$$

ввиду лемм 2.4.9 и 2.4.10, и, кроме того,  $\text{turn}(M) = 2\pi$ . Тогда ввиду леммы 2.4.17

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sum_{S \in V(G)} \text{turn}(S) + \angle([C_l S'_l], [S'_l A]) + \angle([S'_l A], a) + \angle([AS'_r], [S'_r C_r]) + \angle(a, [AS'_r]) \\ &\geq \sum_{S \in V(G)} \text{turn}(q_S) \geq \text{turn}(M) = 2\pi. \end{aligned}$$

Тогда все неравенства в лемме 2.4.17 должны быть равенствами. Итого, каждый

глобальный минимайзер  $\Sigma \in OPT_{\infty}^*(M, r)$  состоит из дуг кривой  $M_r$  и отрезков касательных к  $M_r$ , то есть компонент комбинаторного типа (а) на рис. 2.1, касательных к  $M_r$ . Каждая вершина, соответствующая компоненте комбинаторного типа (а) на рис. 2.1, имеет степень 1 в  $G$ . Тогда  $\Sigma$  имеет единственную дугу кривой  $M_r$ , а ввиду отсутствия циклов не совпадает с  $M_r$ . Ввиду леммы 2.4.9 каждая максимальная дуга  $[BC] \in V_A(G)$  связана в  $G$  с двумя вершинами, соответствующими связным компонентам множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Следовательно произвольный минимайзер является подковой.  $\square$

## 2.5. Доказательства

Напомним, что  $\Sigma$  является произвольным минимайзером для некоторой выпуклой замкнутой кривой  $M$ , а  $N = \text{conv}(M)$ . Ясно, что  $\Sigma \subset N$  ( $N$  — выпуклое множество, поэтому в противном случае можно спроецировать часть множества  $\Sigma$ , лежащую в  $\mathbb{R}^2 \setminus N$ , на  $N$ , от чего длина множества  $\Sigma$  строго уменьшится).

**Лемма 2.5.1.** *Пусть  $M$  — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > r$  и пусть  $B_R(O)$  — шар с радиусом  $R$  и центром в точке  $O \in N$ . Тогда если  $\partial B_R(O)$  касается  $M$ , то  $B_R(O) \subset N$ .*

В дальнейшем, по умолчанию мы будем полагать  $M$  и  $\Sigma$  удовлетворяющими условиям теоремы 2.3.2. Иногда мы будем требовать более слабые условия.

Верно следующее утверждение.

**Лемма 2.5.2.** *Пусть  $M$  — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны  $R > r$  и пусть  $\Sigma$  — произвольный минимайзер для  $M$  (то есть  $\Sigma \in OPT_{\infty}^*(M, r)$ ). Тогда множество  $E_{\Sigma}$  не дискретных энергетических точек минимайзера  $\Sigma$  является подмножеством  $M_r$ .*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда найдется такая точка  $x \in E_{\Sigma} \setminus M_r$ , что  $\text{dist}(x, M) < r - \varepsilon$  для некоторого положительного  $\varepsilon$ , и последовательность  $\{x_k\}$  энергетических точек из  $B_{\varepsilon/2}(x)$ , сходящаяся к  $x$ . Выберем такую последовательность положительных чисел  $\{\varepsilon_k\}$ , что  $B_{\varepsilon_i}(x_i) \cap B_{\varepsilon_j}(x_j) = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Ввиду выпуклости  $N$  и того, что минимальный радиус кривизны множества  $M$  больше  $r$ , можно выбрать  $\{\varepsilon_k\}$  так, чтобы каждая кривая  $\gamma_k := \overline{B_{r+\varepsilon_k}(x_k)} \cap M$  была

связна, так что можно говорить, что каждый замкнутый шар  $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$  покрывает дугу  $\gamma_k$ . Все  $\gamma_j$  имеют общую точку: действительно, для точки  $z \in M$  такой, что  $\text{dist}(x, z) = \text{dist}(z, M)$ , выполняется

$$\text{dist}(x_j, z) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(x_j, x) \leq r - \varepsilon + \varepsilon/2 = r - \varepsilon/2,$$

а значит  $z \in \gamma_j$  для всех  $j$ . Тогда  $\gamma_i \subset \gamma_j \cup \gamma_l$  для некоторых различных  $i, j, l$ . Но тогда одна из точек  $x_i, x_j, x_l$  не энергетическая, поскольку  $F_M(\Sigma) = F_M(\Sigma \setminus B_{\varepsilon_i}(x_i))$ . Противоречие.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.2.* ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (I): Изменения множества  $\Sigma \cap N_r$  не влияют на энергию  $F_M(\Sigma)$ , так что если мы возьмем  $S$  — замыкание произвольной связной компоненты пересечения  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$ , и заменим ее деревом Штейнера, соединяющим точки множества  $S \cap M_r$  (которое непусто если  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r) \neq \emptyset$  ввиду связности  $\Sigma$  и требования  $F_M(\Sigma) \leq r$ , которое влечет  $\Sigma \setminus N_r \neq \emptyset$ ), тогда длина получившегося множества должна остаться той же, что была, ввиду оптимальности  $\Sigma$ , а значит  $S$  является штейнеровским деревом, соединяющим  $S \cap M_r$ , как и утверждалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (II): Напомним, что  $\Sigma = E_\Sigma \sqcup X_\Sigma \sqcup S_\Sigma$ , где  $X_\Sigma$  — дискретное множество точек,  $S_\Sigma$  состоит из локально-минимальных сетей (а значит, из прямолинейных отрезков) и  $E_\Sigma \subset M_r$  ввиду леммы 2.5.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (III): Удалим произвольный открытый отрезок  $\Delta$  из множества  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$ . Значение  $F_M$  не изменится, то есть  $F_M(\Sigma \setminus \Delta) = F_M(\Sigma)$ , и ввиду леммы 2.4.1 множество  $\Sigma \setminus \Delta$  разбивается на две компоненты связности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  такие, что  $\Sigma \setminus \Delta = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$  ( $\Sigma$  — замкнута, поэтому  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  тоже замкнуты). Ясно, что  $M \subset \overline{B_r(\Sigma_1)} \cup \overline{B_r(\Sigma_2)}$ . Тогда ввиду связности  $M$  существует такая точка  $A \in M$ , что  $A \in \overline{B_r(\Sigma_1)} \cap \overline{B_r(\Sigma_2)}$ , но тогда найдутся такие точки  $B \in \overline{\Sigma_1}$  и  $C \in \overline{\Sigma_2}$ , что  $|AB| \leq r$ ,  $|AC| \leq r$ . Тогда расстояние между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не превосходит  $|BC| \leq 2r$ , но длина удаленного отрезка  $\Delta$  не превосходит расстояния между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  ввиду оптимальности  $\Sigma$  (в противном случае можно соединить  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  короче). Пусть  $a_M(r)$  — супремум  $|BC|$  по всем допустимым  $\Delta$ . Таким образом, мы доказали, что  $a_M(r) \leq 2r$ .

В случае  $M = \partial B_R(O)$ , длина  $[BC]$  принимает максимальное значение, когда

отрезок  $[BC]$  является хордой кривой  $M$  и  $|AB| = |BC| = r$ . Тогда для этого случая мы можем посчитать максимальное значение длины отрезка  $[BC]$ :

$$\sin \frac{\angle AOC}{2} = \frac{|AC|}{2|OC|} = \frac{r}{2R},$$

то есть

$$|BC| = 2|OC| \sin \angle AOC = 4|OC| \sin \frac{\angle AOC}{2} \cos \frac{\angle AOC}{2} = 2r \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}}.$$

□

*Доказательство леммы 2.4.3.* Предположим противное, т.е. что  $\Sigma$  содержит штейнеровскую точку (точку ветвления)  $X \in \text{Int}(N_r) \cup (S_\Sigma \cap M_r)$ . Ввиду леммы 2.5.1 найдется такая точка  $O \in N$ , что  $X \in B_R(O)$  и  $B_R(O) \subset \text{Int}(N)$  (тогда  $B_{R-r}(O) \subset N_r$ ). Напомним, что в соответствии с определениями леммы 2.4.2  $\Sigma_r$  — объединение замыканий всех связных компонент  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$ .

Обозначим за  $X_0$  одну из штейнеровских точек множества  $\Sigma_r \cup (S_\Sigma \cap M_r)$ , ближайших к  $O$ , и положим  $t := |OX_0|$ . Мы утверждаем, что  $X_0 \in \text{Int}(N_r)$ . Действительно, в противном случае  $X_0 \in M_r$  и тогда

$$t = \text{dist}(O, M_r) = \text{dist}(O, M) - r \geq R - r > 3.98r,$$

но  $X_0$  — точка ветвления и значит ввиду гладкости и выпуклости  $M_r$  существуют два отрезка  $[X_0Z_i] \subset \Sigma$ ,  $i = 1, 2$  с углом  $2\pi/3$  между ними, пересекающие  $\text{Int}(N_r)$  или один такой отрезок. Тогда, если отрезков было два, то не умаляя общности, а если один, то ввиду условия на минимальный радиус кривизны  $M$ , можно считать, что  $\angle OX_0Z_1 \leq \pi/3$ . Тогда  $Z_1 \in B_t(O) \subset \text{Int}(N_r)$ , поскольку в противном случае найдется такая точка  $Y \in [X_0Z_1] \cap \partial B_t(O) \subset \Sigma \cap \partial B_t(O)$ , что  $[X_0Y] \subset \Sigma$  является хордой кривой  $\partial B_t(O)$ , но тогда

$$|X_0Y| = 2t \cos \angle OX_0Z_1 \geq t > 3.98r,$$

что противоречит п. (iii) леммы 2.4.2. Полученное противоречие показывает, что  $X_0 \in \text{Int}(N_r)$ . Пусть  $\Sigma'$  обозначает замыкание связной компоненты  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$ ,

содержащей  $X_0$ . Ввиду известных свойств структуры локально минимальной сети, поскольку  $X_0 \in \text{Int}(N_r)$ , найдутся три максимальных отрезка множества  $\Sigma'$ , начинающиеся в  $X_0$ . Рассмотрим из них такие два отрезка  $[X_0X_{-1}]$ ,  $[X_0X_1]$ , что точка  $O$  принадлежит углу  $\angle X_{-1}X_0X_1$  (не исключая случай принадлежности стороне угла). Напомним, что угол  $\angle X_{-1}XX_1$  равен  $2\pi/3$ . Заметим также, что точки  $X_{-1}$  и  $X_1$  лежат вне  $B_t(O)$ . Отсюда вытекает, что один из отрезков  $[X_0X_1]$ ,  $[X_0X_{-1}]$  пересекает  $B_t(O)$ . Не умаляя общности будем считать, что этот отрезок —  $[X_0X_1]$ . Обозначим пересечение отрезка  $[X_0X_1]$  и окружности  $\partial B_t(O)$  за  $C$ .

Утверждается, что  $t \leq a_M(r)$ . Предположим противное, тогда, поскольку  $|X_0C| \leq a_M(r)$  и  $|OX_0| = |OC| = t > a_M(r) \geq |X_0C|$ , имеем  $\angle OX_0C > \pi/3$ , отсюда следует, что отрезок  $[X_0X_{-1}]$  также пересекает  $B_t(O)$ . Обозначим пересечение отрезка  $[X_0X_{-1}]$  с окружностью  $\partial B_t(O)$  за  $D$  и заметим, что  $\angle OX_0D > \pi/3$ , а значит  $\angle CX_0D > 2\pi/3$ , что противоречит локальной оптимальности  $\Sigma$ , завершая доказательство утверждения.

Заметим, что точки  $X_1$  и  $X_{-1}$  принадлежат  $\text{Int}(N_r)$ , поскольку  $R - r > 2a_M(r) \geq t + a_M(r)$ , и значит точки  $X_1$  и  $X_{-1}$  являются точками ветвления. Также ввиду леммы 2.4.2 длины отрезков  $[X_0X_{-1}]$  и  $[X_0X_1]$  не превосходят  $a_M(r)$ . Рассмотрим правильный шестиугольник  $P$  со стороной длины  $a_M(r)$  такой, что точка  $X_0$  является его вершиной, а отрезки  $[X_0X_1]$  и  $[X_0X_{-1}]$  принадлежат двум его сторонам. Справедливы следующие утверждения.

- $\text{diam } P = 2a_M(r)$ .
- Отрезок  $[OX_0]$  делит угол  $\angle X_{-1}X_0X_1$  величины  $2\pi/3$  на два угла, хотя бы один из которых острый. Обозначим этот острый угол за  $\angle OX_0B$ , где  $B$  — соответствующая вершина шестиугольника  $P$  (то есть  $|AB| = a_M(r)$ ). Тогда угол  $\angle OBX_0$  также острый, поскольку  $|OX_0| = t \leq a_M(r) = |AB|$ . Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на прямую  $(X_0B)$ , пересекает последнюю на отрезке  $[X_0B]$ , а значит точка  $O$  находится внутри квадрата, построенного на стороне  $[X_0B]$ . Но этот квадрат является подмножеством шестиугольника  $P$ , а значит  $O \in P$ .
- Утверждения выше влекут  $P \subset \overline{B_{2a_M(r)}(O)}$ , и значит  $P \subset \text{Int}(N_r)$ .

Возьмем теперь такие вершины  $X_{-2}$  и  $X_2$ , что  $[X_1X_2], [X_{-1}X_{-2}] \subset \Sigma_r$  и точка  $O$  принадлежит углам  $\angle X_0X_1X_2$  и  $\angle X_0X_{-1}X_{-2}$ . Ясно, что  $X_2, X_{-2} \in P \subset \text{Int}(N_r)$  так что они тоже являются точками ветвления. Так же определим и точки  $X_3, X_{-3}$ :  $[X_2X_3], [X_{-2}X_{-3}] \in \Sigma_r$  и  $O$  принадлежит углам  $\angle X_1X_2X_3$  и  $\angle X_{-1}X_{-2}X_{-3}$ . Точки  $X_3, X_{-3}$  также принадлежат  $P$ , а значит и  $\text{Int}(N_r)$ , поэтому тоже являются точками ветвления. Эти шесть построенных отрезков лежат в  $\text{Int}(N_r)$ , поэтому не содержат концевых точек. Продолжая последовательно строить эту конструкцию, мы получим два пути в  $P \subset \text{Int}(N_r)$ : один путь (начинающийся с  $X_0, X_1, X_2, X_3 \dots$ ) на каждом шаге поворачивает влево, а другой (начинающийся с  $X_0, X_{-1}, X_{-2}, X_{-3} \dots$ ) каждый раз поворачивает вправо. Таким образом,  $\Sigma \cap P$ , являющееся подмножеством  $\Sigma \cap \text{Int}(N_r)$ , содержит концевую точку, что невозможно в  $\text{Int}(N_r)$ , или цикл, что невозможно для дерева Штейнера ввиду леммы 2.4.1 и леммы 2.4.2. Противоречие.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.5.* Пусть  $S \in V_C(G)$  является замыканием связной компоненты множества  $\Sigma \setminus N_r$ . Сначала мы докажем, что  $n(S) \leq 2$ . Ввиду свойства (а) множества энергетических точек, для любой энергетической точки  $x \in S$  найдется такая точка  $Q_x \in M$ , что  $|xQ_x| = r$  и  $B_r(Q_x) \cap S = \emptyset$ . Тогда  $Q_x$  может быть только концом дуги  $q_S$ , поскольку в противном случае  $S = S \setminus B_r(y)$  не связно. Если конец дуги  $q_S$  соответствует двум разным энергетическим точкам  $W_1, W_2$  множества  $S$ , то  $q_{W_1} \subset q_{W_2}$  или  $q_{W_2} \subset q_{W_1}$ . Оба эти случая невозможны, поэтому  $n(S) \leq 2$ , и утверждение доказано.

Докажем теперь, что  $m(S) \leq 2$ . Предположим противное, т.е. существование как минимум трех различных точек входа у  $S$ . Обозначим их  $I_1, I_2$  и  $I_3$ , так что  $Q_{I_2} \in [Q_{I_1}Q_{I_3}] \subset q_S$ . Заметим, что точка  $I_2$  не может быть энергетической, поскольку  $Q_{I_2}$  не является концом дуги  $q_S$ . Тогда у  $I_2$  найдется такая окрестность  $U$ , что  $U \cap \Sigma$  является отрезком или правильной треногой; ввиду леммы 2.4.3 это отрезок.

Мы утверждаем, что  $\Sigma$  содержит хорду множества  $M_r - [I_2J]$ . Это так, если  $\Sigma$  не совпадает с касательной к  $M_r$  в окрестности точки  $I_2$ . Предположим противное, то есть что  $\Sigma$  совпадает с касательной к  $M_r$  в окрестности точки  $I_2$ , тогда  $I_2$  принадлежит замыканиям двух разных компонент связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ , одна из которых —  $S$ ; вторую обозначим  $S'$ .

Пусть  $P_1$  — область, ограниченная дугой  $[I_1\overset{\circ}{I}_2]$  множества  $M_r$  и единственным путем между  $I_1$  и  $I_2$  в  $S$  (выберем область так, чтобы  $P_1$  не содержала  $N_r$ ). Определим область  $P_3$  аналогичным образом (с  $I_3$  вместо  $I_1$ ). Очевидно,  $S' \subset P_1$  или  $S' \subset P_3$ . Отсюда следует, что  $q(S') \subset q(S)$ . Заменяв  $S'$  в  $\Sigma$  на дерево Штейнера, соединяющее  $S' \cap M_r$ , мы получим связное множество, все еще покрывающее  $M$ . При этом любое штейнеровское дерево для  $S' \cap M_r$  лежит в  $N_r$  ввиду выпуклости  $M_r$ , поэтому такая замена уменьшает длину, что невозможно. Таким образом мы доказали, что существует хорда кривой  $M_r - [I_2J] \subset \Sigma$ .

Тогда  $|I_2J| \leq |I_1J|$  (в противном случае замена  $[I_2J]$  на  $[I_1J]$  в  $\Sigma$  приведет к уменьшению длины, при сохранении связности и энергии), и аналогично  $|I_2J| \leq |I_3J|$ . Заметим, что  $J \notin S$ , поскольку ввиду леммы 2.4.1 в  $\Sigma$  нет циклов. Нетрудно заметить, что точки  $I_1, I_2, I_3$  и  $J$  лежат на  $M_r$  в естественном порядке (будем считать, что по часовой стрелке), в противном случае дуга  $q_{S_J}$  является подмножеством дуги  $q_S$ , где  $S_J$  — замыкание компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ , содержащей  $J$ , что невозможно.

Тогда длина  $|JI_2|$  не меньше диаметра  $d$  максимального шара, вписанного в  $N_r$  и касающегося  $M_r$  в точке  $I_2$ . Поскольку  $d \geq 2(R-r)$ , получаем, что  $|JI_2| \geq 2(R-r) > 2r$ , а это противоречит Лемме 2.4.2(iii) и доказывает неравенство  $m(S) \leq 2$ .

Наконец, заметим, что  $S$  должно быть локально минимальным в окрестности любой точки  $x \in S$  кроме энергетических точек и точек входа  $S$ . Мы доказали, что  $n(S) \leq 2$ , а любая не энергетическая точка  $x \in S$  обладает окрестностью  $U_x$  такой, что  $\Sigma \cap U_x$  является отрезком или правильной треногой. Если точка  $x \in S$  является неэнергетической концевой точкой множества  $S$ , то  $\Sigma \cap U_x \neq S \cap U_x$ , так что  $x$  является точкой входа. Таким образом, ввиду определения локально минимальных сетей,  $S$  является локально минимальной сетью для своих точек входа и энергетических точек.  $\square$

**Замечание 2.5.3.** В доказательстве леммы 2.4.5 (см. утверждение  $n(S) \leq 2$ ) мы показали, что если  $x \in G_\Sigma \cap S$ , то  $Q_x$  может быть только концом дуги  $q_S$ . То есть в случае  $n(S) = 2$  есть единственное, взаимнооднозначное соответствие между энергетическими точками компоненты  $S$  и концевыми точками дуги  $q_S$ .



*Доказательство леммы 2.4.6.* Из того, что  $S$  содержит энергетическую точку, следует, что  $q_S$  не может содержаться в объединении  $q_{S'}$  по всем остальным  $S' \in V(G) \setminus \{S\}$ . Предположим противное, то есть что  $S$  не содержит энергетических точек.

Если  $S$  является замыканием компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ , то ввиду леммы 2.4.5  $S$  является локально-минимальной сетью своих точек входа, а поскольку  $m(S) \leq 2$ ,  $S$  должно быть отрезком с концами на  $M_r$ , что невозможно для замыкания компоненты связности множества  $\Sigma \setminus N_r$ .

Если  $S$  является невырожденной дугой  $[BC]$ , то  $[BC] \subset S_\Sigma$ , что невозможно ввиду определения  $V_A(G)$ .  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.7.* Предположим противное. Рассмотрим произвольное  $\varepsilon > 0$  (позже выберем его достаточно малым). Заметим, что ввиду леммы 2.4.6 каждая точка множества  $M$  принадлежит не более чем двум дугам  $q_S$ , где  $S \in V(G)$  (в противном случае нашлись бы три дуги кривой  $M$ , содержащие точку  $x \in M$ , так что одна из них содержалась бы в объединении двух оставшихся, что невозможно ввиду леммы 2.4.6). Тогда сумма длин  $\mathcal{H}^1(q_S)$  по всем  $V(G)$  не превосходит  $2\mathcal{H}^1(M)$ , и значит существует конечное число компонент связности и дуг с  $\mathcal{H}^1(q_S) \geq \varepsilon$ . Обозначим за  $V_\varepsilon(G)$  бесконечное множество таких  $S \in V(G)$ , что  $\mathcal{H}^1(q_S) < \varepsilon$ .

Ясно, что если  $V(G)$  — бесконечное множество, то и  $V_C(G)$  бесконечно. Покажем, что  $\Sigma$  содержит бесконечно много хорд кривой  $M_r$ , пересекающих  $\text{Int}(N_r)$  (если  $N$ , а значит и  $N_r$ , строго выпуклы, то на самом деле каждая хорда кривой  $M_r$  пересекает  $\text{Int}(N_r)$ ). Предположим противное, тогда  $\Sigma \setminus \text{Int}(N_r)$  содержит конечное число компонент связности; но  $V_C(G)$  бесконечно, тогда найдутся компоненты, содержащие бесконечное количество элементов множества  $V_C(G)$ ; пусть  $K$  — одна из таких компонент, содержащая не меньше пяти различных элементов множества  $V_C(G)$ . Ясно, что  $q_K := \overline{B_r(K)} \cap \Sigma$  связно. Ввиду леммы 2.4.6  $K \setminus M_r$  содержит 5 энергетических точек, таких что они принадлежат различным элементам множества  $V_C(G)$ . Обозначим их через  $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5$  таким образом, чтобы  $Q_{W_1}, Q_{W_2}, Q_{W_3}, Q_{W_4}, Q_{W_5} \in q_K$  лежали на  $M$  в естественном (по часовой стрелке) порядке. Тогда  $B_r(Q_{W_i}) \cap \Sigma = \emptyset$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , и значит  $K$  должен

содержать такие точки  $I_2, I_3, I_4 \in M_r$  что

$$\text{dist}(Q_{W_2}, I_2) = \text{dist}(Q_{W_3}, I_3) = \text{dist}(Q_{W_4}, I_4) = r$$

(при этом при  $j = 2, 3, 4$  каждое из множеств  $K \setminus I_j$  будет несвязным). Рассмотрим путь между  $I_2$  и  $I_4$  в  $K$ . Он должен совпадать с дугой  $[I_2 I_4] \subset M_r$ , поскольку в противном случае можно уменьшить длину  $\Sigma$ , спроецировав путь на  $M_r$ . Тогда  $W_3$  принадлежит  $M_r$ , что невозможно ввиду выбора  $W_i, i = 1, \dots, 5$ , и приводит к противоречию. Таким образом множество  $Ch$ , состоящее из хорд кривой  $M_r$  в  $\Sigma$ , пересекающих  $\text{Int}(N_r)$ , бесконечно.

Ввиду конечности длины  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ , количество хорд с длиной хотя бы  $\varepsilon$  — конечно. Исключим из бесконечного множества  $Ch$  конечное множество хорд, обладающих длиной хотя бы  $\varepsilon$ , и конечное множество хорд, смежных с компонентами не из множества  $V_\varepsilon(G)$ ; обозначим получившееся множество за  $Ch'$ : хорды из множества  $Ch'$  смежны только с элементами  $V_\varepsilon(G)$  и имеют длину, строго меньшую, чем  $\varepsilon$ . Покажем, что произвольная хорда из  $Ch'$  соединяет компоненты без точек ветвления. Предположим противное. Надо рассмотреть следующие три случая:

- (i) Хорда из  $Ch'$  смежна с компонентой связности  $S \in V_\varepsilon(G)$  с  $m(S) = 2$ , содержащей точку ветвления. Тогда угол между отрезками компоненты связности, содержащими разные точки входа, равен  $\pi/3$  или  $2\pi/3$ ). Напомним, что  $\mathcal{H}^1(q_S) < \varepsilon$ , поэтому ввиду неравенства треугольника  $S$  является подмножеством  $\varepsilon$ -окрестности множества  $M_r$  (в противном случае  $\text{dist}(x, y) \leq r - \varepsilon$  для некоторых точек  $x \in S, y \in M$ , поэтому  $B_\varepsilon(y) \cap M \subset q_S$ , что противоречит условию  $\mathcal{H}^1(q_S) < \varepsilon$ ). Таким образом, если  $\varepsilon$  достаточно мал, ввиду гладкости  $M_r$  угол между  $M_r$  и каким-то отрезком компоненты, содержащим точку входа, составляет хотя бы  $\pi/12$ . Тогда принадлежащая этому отрезку точка входа  $I$  не может быть энергетической, а значит, ввиду леммы 2.4.3 в её окрестности минимайзер совпадает с отрезком и является концом хорды  $[IJ] \subset \Sigma$  замкнутой кривой  $M_r$ . Тогда, ввиду ограничения на радиус кривизны кривой  $M$ , хорда  $[IJ]$  имеет длину, большую чем  $\varepsilon$ , что противоречит предположению о принадлежности хорды к множеству  $Ch'$ .

(ii) Хорда из  $Ch'$  смежна со связной компонентой  $S \in V_\varepsilon(G)$  с  $m(S) = 1$ , содержащей точку ветвления. Тогда эта компонента имеет комбинаторный тип (b) на рис. 2.1. Рассмотрим треугольник  $\Delta QCI$ , где  $Q$  является концом дуги  $q_S$ ,  $C$  является точкой ветвления компоненты  $S$ , а  $I$  является точкой входа компоненты  $S$ . Поскольку  $\angle QCI = 2\pi/3$ , выполняется условие  $\angle QIC \leq \pi/3$ , так что угол между входящим отрезком  $[CI]$  и кривой  $M_r$  составляет хотя бы  $\pi/6$ . Тогда снова хорда  $[IJ]$  обладает большей длиной, чем  $\varepsilon$ , что противоречит выбору хорды.

(iii) Наконец, хорда из  $Ch'$  смежна с дугой  $S \in V_\varepsilon(G)$ , содержащей точку ветвления  $x$ . Тогда  $x \in M_r$ , и  $x$  является концом хорды кривой  $M_r$  в  $\Sigma$ , которая образует угол  $\pi/3$  с  $M_r$ . Снова ввиду условия на радиус кривизны кривой  $M_r$  и ввиду достаточной малости  $\varepsilon$ , хорда имеет длину больше  $\varepsilon$ , что невозможно.

Рассмотрим хорду  $[I_1I_2] \in Ch'$ , такую что она соединяет компоненты из  $V_\varepsilon(G)$  (которые, как показано выше, не содержат точек ветвления). Заметим, что множество  $]I_2I_1) \cap \Sigma$  (соотв.  $]I_1I_2) \cap \Sigma$ ) содержит энергетическую точку (она может совпадать с  $I_1$  ( $I_2$ )); если  $I_1$  ( $I_2$ ) не является энергетической, энергетическая точка на  $]I_2I_1) \cap \Sigma$  (соотв.  $]I_1I_2) \cap \Sigma$ ) существует ввиду леммы 2.4.3 и отсутствия точек ветвления на рассматриваемых компонентах связности и дугах); обозначим ближайшую к  $I_1$  (соотв.  $I_2$ ) энергетическую точку на  $]I_2I_1) \cap \Sigma$  (соотв.  $]I_1I_2) \cap \Sigma$ ) за  $W_1$  (соотв.  $W_2$ ).

Рассмотрим область  $P$ , ограниченную отрезками  $[W_1Q_{W_1}]$ ,  $[W_2Q_{W_2}]$ ,  $[W_1W_2]$  и меньшей дугой множества  $M$ :  $[Q_{W_1}Q_{W_2}]$ . Покажем, что пересечение  $\text{Int}(P)$  и  $\Sigma$  непусто. Существует две касательные к  $M_r$ , параллельные  $[W_1W_2]$ ; пусть  $l$  — ближайшая к  $[W_1W_2]$  такая прямая. Заметим, что  $[I_1I_2] \in Ch' \subset Ch$ , так что  $[I_1I_2] \cap \text{Int}(N_r) \neq \emptyset$  и  $l \cap [W_1W_2] = \emptyset$ . Рассмотрим точку  $w \in l \cap M_r$  и заметим, что  $Q_w$  не покрывается  $\Sigma \setminus \text{Int}(P)$ , поскольку  $\text{dist}(Q_w, \Sigma \setminus \text{Int}(P)) = \text{dist}(Q_w, [W_1, W_2]) > \text{dist}(Q_w, l) = r$ . Таким образом,  $\text{Int}(P) \cap \Sigma \neq \emptyset$ .

Возьмем точку  $x \in \text{Int}(P) \cap \Sigma$  и рассмотрим путь в  $\Sigma$ , соединяющий  $x$  с отрезком  $[W_1W_2]$ . Существование такого пути влечет, что для некоторого  $i \in \{1, 2\}$  (пусть, не умаляя общности,  $i = 1$ ) выполняется равенство  $W_i = I_i$  (на самом деле,  $]W_1W_2[ \subset S_\Sigma$ , а значит, этот путь соединяет  $x$  и  $W_1$ , не касаясь  $]W_1W_2]$ , но

окрестность в  $\Sigma$  энергетической точки множества  $\Sigma \setminus N_r$  является либо одним, либо двумя отрезками с углом не меньше  $2\pi/3$ , см. рис. 2.1 и 2.2, и значит  $W_1 \in M_r$ ) и  $B_\delta(I_1) \cap \text{Int}(P) \cap \Sigma \neq \emptyset$  для достаточно малого  $\delta > 0$ . Пусть  $k$  — касательная к  $M_r$  в  $I_1 = W_1$ . Поскольку  $|I_1 I_2| \leq \varepsilon$ , угол между  $k$  и  $[I_1 I_2]$  имеет раствор  $O(\varepsilon)$ . Рассмотрим произвольную точку  $y \in \partial B_\delta(I_1) \cap \text{Int}(P) \cap \Sigma$ . Поскольку  $B_r(Q_{I_1}) \cap \Sigma = \emptyset$  и  $|y I_1| = \delta$  угол между  $k$  и  $[y I_1]$  составляет  $O(\delta)$ . Пусть  $z$  является проекцией  $y$  на  $[I_1 I_2]$ . Тогда  $\angle y I_1 z = O(\varepsilon + \delta)$  — наименьший угол (для достаточно малых  $\varepsilon, \delta$ ) в прямоугольном треугольнике  $\Delta y I_1 z$ . А значит можно заменить  $]I_1 z[$  на  $[zy]$  в  $\Sigma$ . Получившееся множество связно, покрывает  $M$  и имеет строго меньшую, чем у  $\Sigma$ , длину. Полученное противоречие с оптимальностью  $\Sigma$  завершает доказательство.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.8.* Заметим, что  $\Sigma$  содержит не больше двух хорд кривой  $M_r$  с концом в  $I$ . Это так ввиду свойств локально минимальной сети: угол между отрезками с концами в одной и той же точке составляет хотя бы  $2\pi/3$ . Покажем, что  $I \in S_\Sigma$ . Предположим противное: пусть  $I \in G_\Sigma$ . Тогда  $B_r(Q_I) \cap \Sigma = \emptyset$ . Возможно два варианта:

- (1)  $I \in S$ , где  $S \in V_C(G)$ ;
- (2)  $I \in S$ , где  $S \in V_A(G)$  (как уже было отмечено после леммы 2.4.7, множество  $S$  не вырождено, т.е. не вырождается в точку  $I$ ).

Напомним, что  $\Sigma$  состоит из конечного числа отрезков и дуг кривой  $M_r$ . В случае (1) гладкость  $M_r$ , лемма 2.4.5 и тот факт, что  $B_r(Q_I) \cap \Sigma = \emptyset$ , влекут, что пересечение малой окрестности точки  $I$  с множеством  $S \setminus N_r$  является подмножеством касательной прямой к  $M_r$  в  $I$ .

Тогда множество  $\Sigma \cap B_\varepsilon(I) \setminus \text{Int}(N_r)$  содержится в объединении касательной прямой  $\tau$  к  $M_r$  в  $I$  и дуги  $M_r \cap B_\varepsilon(I)$ . И  $\tau \cap B_\varepsilon(I)$ , и  $M_r \cap B_\varepsilon(I)$  точкой  $I$  разбиваются на 2 отрезка  $[IE'_1]$ ,  $[IE'_2]$  и 2 дуги  $[I\check{E}_1]$ ,  $[I\check{E}_2]$  множества  $M_r$ , соответственно, где  $E_1, E_2, E'_1, E'_2 \in \partial B_\varepsilon(I)$ . Будем считать, что точка  $E_1$  находится в той же полуплоскости, что и  $E'_1$ , относительно нормали к  $M_r$ , проходящей через  $I$ . Хотя бы одна дуга и один отрезок (будем считать, что это  $[I\check{E}_1]$  и  $[IE'_1]$ ) образуют углы, не превосходящие  $\pi/2$ , с хордой  $[IB]$ . Случаи (i) и (ii) ниже относятся к

ситуации, когда множество  $\Sigma \cap ([\overset{\circ}{I}E_1] \cup [IE'_1])$  — непусто. В остальных случаях  $\Sigma \cap B_\varepsilon(I) \setminus \text{Int}(N_r)$  является подмножеством объединения  $[\overset{\circ}{I}E'_2] \cup [IE_2]$  и поэтому в случаях (iii)-(vi) разбираются варианты когда множества  $B_\varepsilon(I) \cap [\overset{\circ}{I}E'_2]$  и  $B_\varepsilon(I) \cap [IE_2]$  непусты:

- (i) Существует отрезок  $[IE] \subset \Sigma$ , такой что  $(IE)$  является касательной к  $M_r$ ,  $|IE| = \varepsilon$  и  $\angle BIE \leq \pi/2$ ;
- (ii) Найдется такое  $\varepsilon > 0$  и дуга  $[\overset{\circ}{I}E] \subset \Sigma \cap M_r$ , что  $|IE| = \varepsilon$  и  $\angle BIE \leq \pi/2$ ;
- (iii) Найдется такое, достаточно малое,  $\varepsilon > 0$ , что  $\overline{B_\varepsilon(I)} \cap \Sigma$  совпадает с  $[FI] \cup [IE]$  где  $F, E \in \partial B_\varepsilon(I)$ ,  $[FI] \subset [BI]$  и  $[IE]$  является подмножеством касательной к  $M_r$  в точке  $I$ ;
- (iv) Найдется такое, достаточно малое  $\varepsilon > 0$ , что  $\overline{B_\varepsilon(I)} \cap \Sigma$  совпадает с  $[FI] \cup [\overset{\circ}{I}E]$ , где  $F, E \in \partial B_\varepsilon(I)$ ,  $[FI] \subset [IB]$  и  $[\overset{\circ}{I}E] \subset M_r$ ;
- (v) Найдется такое, достаточно малое,  $\varepsilon > 0$ , что  $\overline{B_\varepsilon(I)} \cap \Sigma$  содержит множество  $[FI] \cup [IC] \cup [\overset{\circ}{I}D]$ , где  $[IC]$  является подмножеством касательной прямой к  $M_r$  в точке  $I$ ,  $[FI] \subset [BI]$ ,  $[\overset{\circ}{I}D] \subset M_r$  и  $\angle CID < \pi/6$ ;
- (vi) Найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\overline{B_\varepsilon(I)}$  является подмножеством хорды  $[IB]$ .

Мы покажем, что все эти случаи невозможны. Пусть  $\xi$  обозначает  $[IE]$  в случаях (i) и (iii), и обозначает  $[\overset{\circ}{I}E]$  в случаях (ii) и (iv).

СЛУЧАИ (i), (ii): Пусть  $F := [BI] \cap B_\varepsilon(I)$  и  $l^\varepsilon$  обозначает наименьшую дугу окружности  $\partial B_\varepsilon(I)$ , ограниченную пересечением множеств  $\partial B_r(Q_I)$  и  $M_r$ . Несложно заметить, что  $\mathcal{H}^1(l^\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$  и  $|FI| + \mathcal{H}^1(\xi) - \mathcal{H}^1(\text{St}(F, I, E)) = c\varepsilon + o(\varepsilon)$  с  $c > 0$ , где  $\text{St}(F, I, E)$  обозначает штейнеровское дерево, соединяющее точки  $F, I$  и  $E$ . Тогда длина множества  $\Sigma' := \Sigma \setminus ([FI] \cup \xi) \cup l^\varepsilon \cup \text{St}(F, I, E)$  не превосходит  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$  для достаточно малого  $\varepsilon$ . Кроме того,  $\Sigma'$  связно и  $F_M(\Sigma') \leq F_M(\Sigma)$ . Получили противоречие с оптимальностью  $\Sigma$ .

СЛУЧАИ (iii), (iv): Заметим, что  $|FI| = |IE| = \varepsilon$  (см. рис. 2.6(a)), так что  $\mathcal{H}^1(\xi) = \varepsilon + o(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , ввиду гладкости  $M_r$ . Пусть  $H$  — точка пересечения

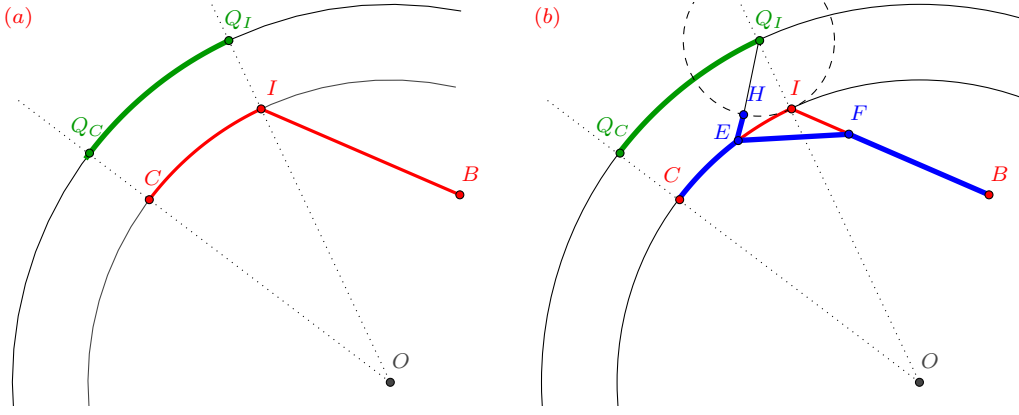


Рис. 2.6: Случай (iv) леммы 2.4.8: (a) (невозможная) часть минимайзера; (b) лучший кандидат.

$[EQ_I]$  и  $\partial B_r(Q_I)$  (см. рис. 2.6(b)). Заметим, что  $(IQ_I)$  перпендикулярна  $M_r$  в точке  $I$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |EH| &= |EQ_I| - |Q_IH| = \sqrt{|EI|^2 + r^2} - r = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2} - r \\ &= r\sqrt{1 + o(\varepsilon)} - r = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Теперь, поскольку угол между  $\xi$  и отрезком  $[FI]$  не превосходит  $\pi$ , получаем, что

$$|EF| = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos \angle EIF} = \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{1 - \cos \angle EIF} < 2\varepsilon - c\varepsilon \text{ для некоторого } c > 0$$

и значит

$$|EH| + |EF| < \mathcal{H}^1(\xi) + |IF| = 2\varepsilon + o(\varepsilon)$$

для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ . Таким образом, мы получили противоречие с оптимальностью  $\Sigma$ , поскольку мы показали, что  $(\Sigma \setminus B_\varepsilon(I)) \cup [EH] \cup [EF]$  является лучшим кандидатом, чем  $\Sigma$ .

СЛУЧАЙ (v): Пусть  $H \in [IC)$  — такая точка, что  $(DH) \perp (IC)$ . Тогда множество

$$\Sigma' = \Sigma \setminus ]ID] \cup [HD]$$

связно, обладает энергией  $F_M$ , не превосходящей энергию  $\Sigma$ , и строго меньшей длиной, поскольку  $|HD| < |ID|/2 \leq \mathcal{H}^1([ID])/2$ . Это значит, что  $\Sigma'$  является лучшим кандидатом, чем  $\Sigma$ , противоречие.

СЛУЧАЙ (vi): В этом случае  $S \in V_A(G)$  и  $S = \{I\}$ , что невозможно.

Таким образом, все случаи невозможны и мы получили противоречие, которое влечет  $I \in S_\Sigma$ . Ввиду леммы 2.4.3  $I$  не может быть точкой ветвления. Тогда найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $S_\Sigma \cap B_\varepsilon(I)$  — отрезок.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.9.* Пусть  $\overset{\circ}{BC}$  такая, как в доказываемом утверждении. Предположим, что отрезок  $[IJ] \subset \Sigma$  таков, что  $I = ]\overset{\circ}{BC}[ \cap [IJ]$ . Мы утверждаем, что  $B_\varepsilon(I) \cap \Sigma \subset [\overset{\circ}{BC}]$ . На самом деле, ввиду леммы 2.4.8  $[IJ]$  не может быть частью хорды кривой  $M_r$ , так что  $]IJ] \subset \Sigma \setminus \text{Int}(N_r)$ . Заметим, что в этом случае  $I$  — энергетическая (поскольку  $B_\varepsilon(I) \cap \Sigma$  не является отрезком или треногой ни для какого  $\varepsilon > 0$ ). Отсюда  $B_r(Q_I) \cup \Sigma = \emptyset$ , так что  $[IJ]$  является частью касательной прямой к  $M_r$  в точке  $I$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  и положим  $\{D_1, D_2\} := [\overset{\circ}{BC}] \cap \partial B_\varepsilon(I)$ ,  $E := [IJ] \cap \partial B_\varepsilon(I)$ . Если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, один из углов  $\angle D_1IE$ ,  $\angle D_2IE$  меньше, чем  $\pi/6$  (например,  $\angle D_1IE$ ). Пусть  $H \in [IJ]$  — такая точка, что  $(D_1H) \perp (IJ)$ . Тогда множество

$$\Sigma' := \Sigma \setminus ]ID_1] \cup [HD_1]$$

связно, энергия  $F_M(\Sigma')$  не превосходит  $F_M(\Sigma)$ , а длина его строго меньше, чем  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ , поскольку  $|HD_1| < |ID_1|/2 \leq \mathcal{H}^1([ID_1])/2$ . Это означает, что  $\Sigma'$  лучше  $\Sigma$ . Мы получили противоречие, показывающее, что  $B_\varepsilon(I) \cap \Sigma \subset [\overset{\circ}{BC}]$  для  $I \in ]\overset{\circ}{BC}[$ .

Докажем теперь, что  $B_\varepsilon(B) \setminus [\overset{\circ}{BC}]$  является подмножеством касательной к  $M_r$  в точке  $B$  (аналогичное утверждение для точки  $C$  полностью симметрично). Ввиду леммы 2.4.8 не существует хорд кривой  $M_r$  в  $\Sigma$  с концевой точкой  $B$ . Таким образом, множество  $B_\varepsilon(B) \setminus [\overset{\circ}{BC}]$  является подмножеством  $\Sigma \setminus N_r$ .

Мы утверждаем, что  $B$  не может быть концевой точкой  $\Sigma$ , т.е.  $B_\varepsilon(B) \setminus [\overset{\circ}{BC}] \neq \emptyset$ . Предположим противное и напомним, что  $Q_B, Q_C \in M$  — такие точки, что  $\text{dist}(B, Q_B) = \text{dist}(C, Q_C) = r$ . Положим тогда  $B_1 := \partial B_\varepsilon(B) \cap [\overset{\circ}{BC}]$  и заменим  $[B_1B]$  отрезком  $[B_1I] := [B_1Q_B] \setminus B_r(Q_B)$ , получив кандидата строго меньшей длины, ввиду того, что  $[\overset{\circ}{BC}] \setminus [B_1B] \cup [B_1I] = [\overset{\circ}{BC}] \cup [B_1I]$  продолжает покрывать дугу  $[Q_BQ_C]$  множества  $M$  (при достаточно малом  $\varepsilon$ ), см. рис. 2.7.

Таким образом мы доказали, что для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  множество  $B_\varepsilon(B) \setminus [\overset{\circ}{BC}]$  является непустым подмножеством  $\Sigma \setminus N_r$ . Если  $B$  — энергетическая,

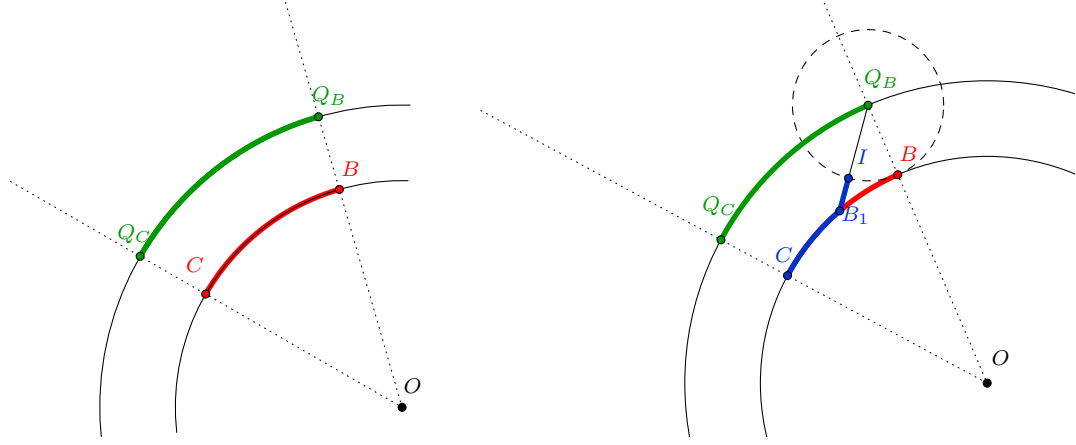


Рис. 2.7: Иллюстрация к лемме 2.4.9. Конец дуги  $M_r \cap \Sigma$  не может быть концевой точкой  $\Sigma$ .

то  $B_r(Q_B) \cap \Sigma = \emptyset$ , а значит  $B_\varepsilon(B) \setminus [\overset{\vee}{BC}]$  является подмножеством касательной к  $M_r$  в точке  $B$ , что влечет доказываемое утверждение. Таким образом  $B \in S_\Sigma$ , откуда следует, что  $B_\varepsilon(B)$  является отрезком или треногой для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ . Но случай треноги невозможен ввиду леммы 2.4.3, так что реализуется случай отрезка (при этом часть  $M_r$  в окрестности  $B$  должна быть плоской).

Итого, единственными отрезками, пересекающими  $[\overset{\vee}{BC}]$ , могут быть отрезки, касательные к  $M_r$  в точках  $B$  и  $C$ . Как следует из леммы 2.4.7,  $\Sigma$  состоит из конечного числа отрезков и максимальных дуг кривой  $M_r$ , так что для достаточно малого  $\varepsilon$  множество  $B_\varepsilon([\overset{\vee}{BC}]) \cap \Sigma$  содержит только 2 отрезка, которые должны быть касательны к  $M_r$  в точках  $B$  и  $C$ , соответственно. Утверждение доказано.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.10.* Рассмотрим точку  $C \in M_r \cap \Sigma$ . Ввиду леммы 2.4.9, если  $C$  принадлежит некоторой невырожденной дуге  $\Sigma \cap M_r$  с энергетической точкой во внутренней (т.е. элементу  $V_A(G)$ ), то утверждение верно. Заметим, что если существует хорда  $[IC] \subset \Sigma$  множества  $M_r$ , то лемма 2.4.8 влечет доказываемое утверждение. Тогда  $B_\varepsilon(C) \cap \text{Int}(N_r) = \emptyset$ . Если  $C \in S_\Sigma$ , то ввиду леммы 2.4.3 её окрестность не может быть треногой, так что она является отрезком и утверждение леммы очевидно. Осталось рассмотреть случай, при котором  $B_\varepsilon(C) \cap \text{Int}(N_r) = \emptyset$  и точка  $C$  — энергетическая, что влечет  $B_r(Q_C) \cap \Sigma = \emptyset$ , так что множество  $B_\varepsilon(C) \cap \Sigma$  является отрезком (поскольку  $\Sigma$ , ввиду леммы 2.4.7,



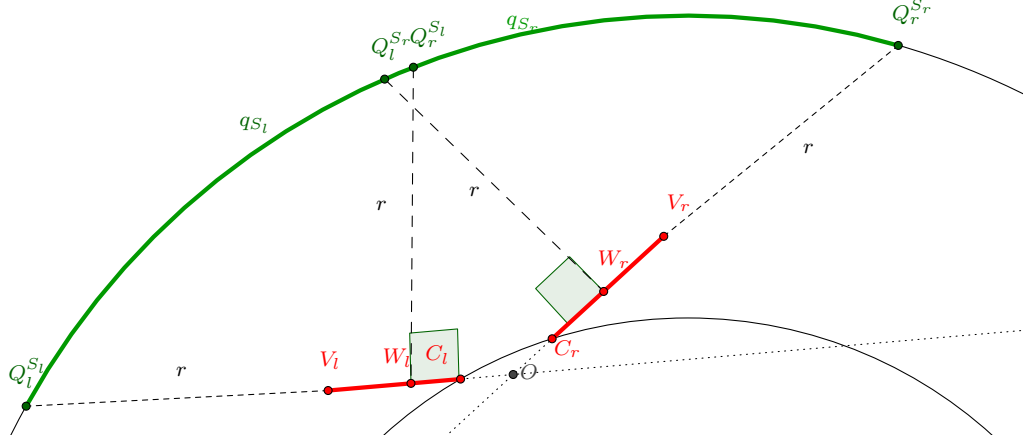


Рис. 2.8: Иллюстрация к 2.4.13

состоит из конечного числа дуг  $M_r$  и отрезков), который должен быть подмножеством касательной к  $M_r$  в  $C$ ; утверждение доказано.  $\square$

*Доказательство леммы 2.4.13.* Напомним, что  $m(S_l) = m(S_r) = 1$ . Обозначим концы  $q_{S_l}$  и  $q_{S_r}$  следующим способом:  $q_{S_l} = [Q_l^{S_l} Q_r^{S_l}]$ ,  $q_{S_r} = [Q_l^{S_r} Q_r^{S_r}]$ . Предположим противное, т.е. что  $Q_r^{S_l} \in ]Q_l^{S_r} Q_r^{S_r}[$ ,  $Q_l^{S_r} \in ]Q_l^{S_l} Q_r^{S_l}[$ .

Предположим, что  $n(S_l) = 2$  или  $n(S_r) = 2$  (пусть  $n(S_l) = 2$ , случай  $n(S_r) = 2$  аналогичен). Тогда ввиду замечания 2.5.3 существует энергетическая точка  $S_l$ , которой соответствует точка  $Q_r^{S_l}$ . Но  $B_r(Q_r^{S_l}) \cap \Sigma \neq \emptyset$ , поскольку  $Q_r^{S_l} \in ]Q_l^{S_r} Q_r^{S_r}[ = q_{S_r}$ . Таким образом, мы получили противоречие с предположением  $n(S_l) = 2$ , и значит  $S_l$  совпадает с отрезком  $[C_l V_l]$ . Ясно, что  $V_l$ ,  $C_l$  и  $Q_l^{S_l}$  принадлежат одной прямой (в противном случае мы могли бы заменить  $[V_l V']$  куском отрезка  $[V' Q_l^{S_l}]$ , где  $V' := \partial B_\varepsilon(V_l) \cap [V_l C_l]$ , и получить кандидата с меньшей длиной). Отсюда  $[C_l V_l]$  касателен к  $B_r(Q_r^{S_l})$  (см. рис. 2.8).

Пусть  $W_l$  — такая точка  $[C_l V_l]$ , что  $\text{dist}(W_l, Q_r^{S_l}) = r$ , а  $W_r$  — такая точка  $[C_r V_r]$ , что  $\text{dist}(W_r, Q_l^{S_r}) = r$ . Заметим, что точки  $C_l$ ,  $V_l$  и  $Q_l^{S_l}$  лежат на одной прямой, так что  $\text{dist}(W_l, Q_l^{S_l}) \geq r = \text{dist}(W_l, Q_r^{S_l})$ , поэтому  $\angle Q_r^{S_l} Q_l^{S_l} W_l \leq \angle Q_l^{S_l} Q_r^{S_l} W_l$ . Отрезок  $[C_l V_l]$  касателен к  $B_r(Q_r^{S_l})$ , отсюда  $(Q_r^{S_l} W_l) \perp (V_l C_l)$ . Посчитав углы в треугольнике  $\Delta Q_r^{S_l} Q_l^{S_l} W_l$ , мы получаем, что  $\angle Q_r^{S_l} Q_l^{S_l} W_l \leq \pi/4$ . Очевидно, что  $\angle Q_r^{S_r} Q_l^{S_l} W_l \leq \angle Q_r^{S_l} Q_l^{S_l} W_l$ , так что  $\angle Q_r^{S_r} Q_l^{S_l} W_l \leq \pi/4$ . Ввиду симметрии выполня-

ется неравенство  $\angle Q_l^{S_l} Q_r^{S_r} W_r \leq \pi/4$ . Обозначим за  $O$  точку пересечения  $(V_l C_l)$  и  $(V_r C_r)$ . Из треугольника  $\Delta Q_r^{S_r} Q_l^{S_l} O$  получим  $\angle Q_r^{S_r} O Q_l^{S_l} \geq \pi/2$ .

Заметим, что  $2r > |W_l W_r| \geq |C_l C_r|$  и  $\angle Q_r^{S_r} O Q_l^{S_l} = \angle C_l O C_r \geq \pi/2$ . Это значит, что  $|C_l O| < 2r$  и  $|C_r O| < 2r$ . Отсюда точка пересечения лучей  $[V_l C_l)$  и  $[V_r C_r)$  принадлежит  $N_r$ , что противоречит оптимальности  $\Sigma$ .  $\square$

## 2.6. Доказательство центральной леммы

Сначала докажем следующую техническую лемму.

**Лемма 2.6.1.** *Пусть  $S$  является замыканием компоненты связности  $\Sigma \setminus N_r$  такой, что  $n(S) = 2$ . Пусть также  $W \in G_\Sigma \cap S$  является энергетической точкой  $S$ , такой что  $\overline{B_\varepsilon(W)} \cap S = [J_1 W] \cup [W J_2]$ . Тогда  $(QW)$  является биссектрисой угла  $\angle J_1 W J_2$ , где  $Q$  является концом дуги  $q_S$  соответствующим  $W$  (в смысле замечания 2.5.3).*

*Доказательство леммы 2.6.1.* Предположим противное, т.е. что  $\angle J_1 W Q \neq \angle Q W J_2$ . Пусть  $l$  — касательная к  $B_r(Q)$  в точке  $W$ . Тогда  $\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_\varepsilon(W)) - \mathcal{H}^1([J_1 Y] \cup [Y J_2]) = O(\varepsilon)$ , где  $Y$  — такая точка на  $l$ , что  $\angle J_1 Y Q = \angle Q Y J_2$ . С другой стороны,  $\text{dist}(Y, \partial B_r(Q)) = O(\varepsilon^2)$ ; пусть  $V \in \partial B_r(Q)$  — такая точка, что  $\text{dist}(Y, \partial B_r(Q)) = \text{dist}(Y, V)$ . Тогда множество  $(\Sigma \setminus B_\varepsilon(W)) \cup [J_1 Y] \cup [J_2 Y] \cup [Y V]$  связно, покрывает  $q(S)$  и имеет строго меньшую длину, чем  $\Sigma$ , противоречие.  $\square$

Наконец, мы готовы доказать центральную лемму.

*Доказательство леммы 2.4.17.* Очевидно, что если  $S$  является дугой, то сравниваемые значения равны. Таким образом, достаточно рассматривать компоненты связности  $\Sigma \setminus N_r$ . Обозначим за  $Q_l$  и  $Q_r$  концы дуги  $q_S$ . Пусть  $O$  является пересечением нормалей к  $M$  в точках  $Q_l$  и  $Q_r$ . Заметим, что  $\text{turn}(q) = \angle Q_l O Q_r$ , и обозначим эту величину за  $\gamma$ . Отметим также, что  $|Q_l O| \geq R$  и  $|Q_r O| \geq R$ . Наконец, обратим внимание, что леммы 2.4.3 и 2.4.5 также как и следствие 2.4.12 остаются верными при  $R > 2a_M(r) + r$ , что выполняется, если  $R > 5r$  (или  $R > 4.98r$  в том случае, когда  $M$  является окружностью радиуса  $R$ ), т.е. в условиях доказываемого утверждения.

Надо разобрать следующие случаи.

1. Пусть  $S$  является средней компонентой. Тогда она, ввиду леммы 2.4.5, является локально-минимальной сетью для двух точек входа и одной или двух энергетических точек.

- (а) *Случай  $n = 2, m = 2$ , комбинаторный тип (а) на рис. 2.2 (см. рис. 2.9).*  
 Обозначим точки ветвления  $S$  за  $V_l$  и  $V_r$ . В этом случае  $\text{turn}(S) = \pi/3 +$

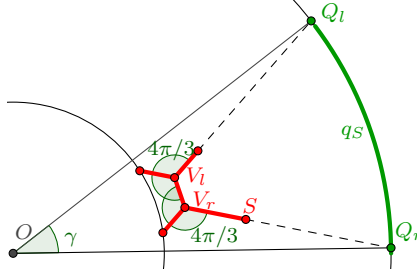


Рис. 2.9: Рисунок к случаю 1а: средняя компонента,  $n = 2, m = 2$ .

$\pi/3 = 2\pi/3$ . Предположив противное (то есть, что  $\gamma \geq 2\pi/3$ ) и соединив  $O$  с  $Q_l$  и  $Q_r$ , получим (невыпуклый) пятиугольник  $Q_l V_l V_r Q_r O$  с двумя углами равными  $4\pi/3$ , и одним углом, не меньшим  $2\pi/3$ , что невозможно.

- (б) *Случай  $n = 2, m = 2$ , комбинаторный тип (б) на рис. 2.2 (см. рис. 2.10).*  
 Заметим, что в этом случае существует точка ветвления, смежная с обеими точками входа, и также существует точка ветвления (обозначим ее за  $B$ ), смежная с обеими энергетическими точками. Ясно, что  $\text{turn}(S) = \pi/3$ . Покажем, что  $\text{turn}(q_S) < \pi/3$ . Посчитаем величину дуги, ограниченной продолжениями отрезков, выходящих из  $B$ . Несложно увидеть, что эта дуга является самой длинной, когда  $B$  лежит на  $M_r$  (это предельный случай). А значит, достаточно смотреть на угол в  $N \setminus N_r$  величины  $2\pi/3$  с вершиной  $B$  на  $M_r$ . Известно, что дуга является самой длинной в случае, если  $S$  касательна к  $M_r$  и когда  $M$  является окружностью. В этом случае нормаль к  $M_r$  в точке  $B$  разбивает угол  $\angle Q_l B Q_r$ , равный  $2\pi/3$ , на углы величины  $\pi/2$  и  $\pi/6$  (как изображено на рис. 2.11). В этом случае величина дуги составляет

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) + \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\right),$$

где  $\delta := R/r$ , а значит строго меньше, чем  $\pi/3$ , при  $\delta \geq 2.9$ .

(с) *Случай  $n = 2$ ,  $m = 2$ , комбинаторный тип (с) на рис. 2.2.*

В этом случае есть два варианта для  $S$ , см. рис. 2.12 и 2.13.

СЛУЧАЙ НА РИС. 2.13 может быть сведен к предыдущему случаю 1b. Действительно,  $\text{turn}(S) = \pi/3$ . Зафиксируем точки входа  $Y_l$ ,  $Y_r$  и левую энергетическую точку  $W_l$  и будем двигать правую энергетическую точку  $W_r$  направо (в направлении луча  $[W_lW_r]$ ). Тогда в какой-то момент комбинаторный тип станет типом (b) на рис. 2.2, при этом во время этого процесса  $\text{turn}(S) = \pi/3$ , а  $\text{turn}(q_S)$  возрастает, но  $\text{turn}(q_S) \leq \pi/3$ , см. случай 1b.

СЛУЧАЙ НА РИС. 2.12: обозначим энергетические точки  $S$  за  $W_l$  и  $W_r$ , точки входа за  $Y_l$  и  $Y_r$ , соответственно, и точку ветвления за  $V_l$  (не умаляя общности она смежна с  $W_l$  и  $Y_l$ ). Пусть  $2\beta := \angle V_lW_rY_r$ , заметим, что  $\angle Y_lV_lW_r = 2\pi/3$ . Тогда  $\text{turn}(S) = (\pi - 2\pi/3) + (\pi - 2\beta) = 4\pi/3 - 2\beta$ . Предположим противное (то есть, что  $\gamma \geq 4\pi/3 - 2\beta$ ) и назовем  $L$  точку пересечения  $(Q_lW_l)$  и  $(Q_rW_r)$ . Ввиду леммы 2.6.1  $\angle LW_rV_l = \angle Y_rW_rV_l/2 = \beta$ . Тогда

$$\pi - \pi/3 - \beta = \angle Q_lLQ_r > \angle Q_lOQ_r = \gamma,$$

(первое равенство получается из подсчета углов в треугольнике  $\Delta V_lW_rL$ ) что влечет неравенство

$$\gamma \geq 4\pi/3 - 2\beta > 2\pi/3 - \beta = \angle Q_lLQ_r > \gamma,$$

противоречие.

(d) *Случай  $n = 2$ ,  $m = 2$ , комбинаторный тип (d) на рис. 2.2 (см. рис. 2.14).*

Обозначим энергетические точки  $S$  за  $W_l$  и  $W_r$ , и точки входа за  $Y_l$  и  $Y_r$ , соответственно. Пусть  $2\alpha := \angle Y_lW_lW_r$ ,  $2\beta := \angle W_lW_rY_r$ . Тогда  $\text{turn}(S) = (\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta)$ . Предположим противное (то есть, что  $\gamma \geq 2\pi - 2\alpha - 2\beta$ ) и обозначим за  $L$  точку пересечения  $(Q_lW_l)$  и  $(Q_rW_r)$ . Ввиду леммы 2.6.1

$\angle LW_l W_r = \angle Y_l W_l W_r / 2 = \alpha$ ,  $\angle LW_r W_l = \angle Y_r W_r W_l / 2 = \beta$ . Тогда

$$\pi - \alpha - \beta = \angle Q_l L Q_r > \angle Q_l O Q_r = \gamma,$$

(первое равенство получается из подсчета углов в  $\Delta W_l W_r L$ ) что влечет

$$\gamma \geq 2\pi - 2\alpha - 2\beta > \pi - \alpha - \beta = \angle Q_l L Q_r > \gamma,$$

противоречие.

(е) *Случай  $n = 1$ ,  $m = 2$ , комбинаторный тип (b) на рис. 2.1 (см. рис. 2.15, 2.16 и 2.17).*

Ясно, что  $\text{turn}(S) = \pi/3$ . Чтобы доказать утверждение, предположим противное (то есть, что  $\gamma \geq \pi/3$ ) и, как в предыдущем случае, соединим точку  $O$  с точками  $Q_l$  и  $Q_r$ . Обозначим энергетическую точку  $S$  за  $W$ . Разберем три подслучая:

- точка  $W$  покрывает обе точки  $Q_r$  и  $Q_l$  (см. рис. 2.15);
- точка  $W$  покрывает  $Q_l$ , а  $Q_r$  покрыта точкой входа (см. рис. 2.16);
- точка  $W$  покрывает  $Q_l$ , а  $Q_r$  покрыта точкой  $H \in S \setminus (M_r \cup W)$  (см. рис. 2.17).

В ПОДСЛУЧАЕ (i)  $|WQ_r| = |WQ_l| = r$ . Соединим  $O$  с  $W$  и заметим, что угол  $\angle Q_l O Q_r = \gamma$  разбивается на два угла; возьмем наибольший (не умаляя общности, пусть это будет  $\angle W O Q_r$ ). Рассмотрим треугольник  $\Delta O Q_r W$  со стороной  $|OQ_r| \geq R$  и острым углом ( $\alpha$  на рис. 2.15) хотя бы  $\pi/6$  напротив стороны  $|WQ_r| = r$ . Напомним, что  $R > 2r$ , и обозначим за  $\beta := \angle O W Q_r$ . Ввиду теоремы синусов для треугольника  $\Delta O Q_r W$  получаем

$$\sin \beta = \frac{|OQ_r|}{r} \sin \alpha \geq \frac{R}{2r} > 1,$$

противоречие.

В ПОДСЛУЧАЕ (ii)  $Q_r$  покрыта точкой входа  $I$ . Тогда  $(CI)$  — перпендикуляр к  $(IQ_r)$ , где  $C$  — точка ветвления  $S$ , так что точки  $Q_r$ ,  $O$  и  $I$  лежат на одной прямой. Рассмотрим сумму углов невыпуклого четырехугольни-

ка  $Q_lCIO$ : это  $\angle Q_l + \angle C + \angle I + \angle O \geq \angle Q_l + 4\pi/3 + \pi/2 + \pi/3 > 2\pi$ , противоречие.

В ПОДСЛУЧАЕ (iii)  $Q_r$  покрыта точкой  $H \in ]CI[$ , где  $C$  — точка ветвления  $S$ , а  $I$  — точка входа  $S$ . Заметим, что  $(CI)$  перпендикулярна  $(HQ_r)$ ; точки  $Q_l, W, C$  лежат на одной прямой. Рассмотрим сумму углов невыпуклого пятиугольника  $Q_lCHQ_rO$ : она составляет  $\angle Q_l + \angle C + \angle H + \angle Q_r + \angle O \geq \angle Q_l + 4\pi/3 + 3\pi/2 + \angle Q_r + \pi/3 > 3\pi$ , противоречие.

- (f) *Последний случай  $n = 1, m = 2$ , комбинаторный тип (с) на рис. 2.1 (см. рис. 2.18).* В этом случае  $S$  состоит из двух отрезков, то есть  $S = [BW] \cup [WD]$ , где  $B, D \in M_r$  — точки входа,  $W$  — энергетическая и  $\angle BWD \geq 2\pi/3$ . В этом случае  $\text{turn}(S) = \pi - \angle BWD$ .

Сначала соединим  $O$  с  $Q_l$  и  $Q_r$ , затем обозначим  $K_l = [OQ_l] \cap M_r$  и  $K_r = [OQ_r] \cap M_r$ . Рассмотрим теперь выпуклый четырехугольник  $P = K_lOK_rW$ . Сумма углов  $\angle K_l + \angle K_r + \angle W$  в  $P$  составляет хотя бы  $\pi/2 + \angle BWD + \pi/2$ , так что оставшийся угол (который равен  $\gamma$ ) не превосходит  $\pi - \angle BWD = \text{turn}(S)$ , как и утверждалось.

В случае же равенства оба отрезка  $[BW]$  и  $[WD]$  касаются  $M_r$ , но точка  $W$  в этом случае не является энергетической, поскольку  $Q_l$  покрыта  $B = K_l$ ,  $Q_r$  покрыта  $D = K_r$ , противоречие.

2. Пусть  $S$  — крайняя компонента (не умаляя общности, это левая крайняя компонента, так что  $Q_r = A$ ). Напомним, что  $C$  означает точку ветвления, если  $S$  является треногой, и точку входа, если  $S$  — отрезок. Тогда возможны два варианта:

- (a) *Случай  $n = 1, m = 1$ , комбинаторный тип (a) на рис. 2.1 (как изображено на рис. 2.19).* В этом случае  $S = [CS'_l]$ , где  $C \in M_r$ ,  $|S'_lQ_r| = r$ , и  $\text{turn}(S) = 0$ . Обозначим за  $K$  такую точку, что  $K \in [OQ_l)$  и  $\angle OQ_rK = \pi/2$ . Определим точки  $L := [S'_lC] \cap (OQ_l)$  и  $P := [CS'_l] \cap (Q_rK)$ , и введем обозначения  $\alpha := \angle PS'_lQ_r$  и  $\beta := \angle S'_lQ_rK$ .

Имеет смысл рассмотреть следующие две возможности. Заметим, что  $|S'_lQ_l| = r$ , поскольку в противном случае можно заменить  $[CS'_l] \cap B_\varepsilon(S'_l)$

на часть  $[DF]$  отрезка  $[DQ_r]$ , где  $D = [CS'_l] \cap \partial B_\varepsilon(S'_l)$ ,  $F$  — точка, удовлетворяющая условию  $\text{dist}(F, Q_r) = r$ , получив кандидата меньшей длины.

- Случай  $\angle CS'_l Q_r \leq \pi$  (см. верхнее изображение на рис. 2.19). Тогда  $\angle([AS'_l], a) = \beta$  и  $\angle([CS'_l], [S'_l A]) = \alpha$ , так что

$$\text{turn}(S) + \angle([CS'_l], [S'_l A]) + \angle([S'_l A], a) = \alpha + \beta.$$

Заметим, что  $\angle S'_l P K = \alpha + \beta$  и  $\angle OKQ_r = \pi/2 - \gamma$ . Если  $\alpha + \beta \leq \gamma$  (что противоречит доказываемому утверждению), то  $\angle OKP + \angle KPS'_l < \pi/2$  так что  $\angle KLP > \pi/2$ , а это невозможно, поскольку тогда  $|CQ_l| < |S'_l Q_l|$ , что противоречит условиям  $|S'_l Q_l| = r$ ,  $|CQ_l| \geq r$ .

- Случай  $\angle CS'_l Q_r > \pi$  (см. нижнее изображение на рис. 2.19. В этом случае  $\angle([S'_l A], a) = \beta$  и  $\angle([CS'_l], [S'_l A]) = -\alpha$ , так что

$$\text{turn}(S) + \angle([CS'_l], [S'_l A]) + \angle([S'_l A], a) = \beta - \alpha$$

и мы знаем, что  $\angle KPC = \beta - \alpha$ . Если  $\beta - \alpha \leq \gamma$  (что противоречит доказываемому утверждению), то  $\angle OKP + \angle KPC < \pi/2$ , а это невозможно, поскольку тогда  $|CQ_l| < |S'_l Q_l|$ , что противоречит условиям  $|S'_l Q_l| = r$ ,  $|CQ_l| \geq r$ .

- (b) Случай  $n = 2$ ,  $m = 1$ , комбинаторный тип (b) на рис. 2.1 (см. рис. 2.20).

Заметим, что  $S$  является треногой:  $S = [BC] \cup [CW] \cup [CS'_l] \subset \overline{(N \setminus N_r)}$ , где  $B \in M_r$ .

Покажем, что  $Q_r = [CS'_l] \cap M$  и  $Q_l = [CW] \cap M$ . Предположим противное, то есть, не умаляя общности,  $C$ ,  $S'_l$  и  $Q_r$  не лежат на одной прямой. Возьмем достаточно малое  $\varepsilon > 0$  и обозначим за  $J$  точку пересечения  $\partial B_\varepsilon(S'_l)$  и  $[CS'_l]$ . Тогда можно заменить  $[JS'_l]$  на  $[JI]$  в  $\Sigma$ , где  $I$  обозначает точку пересечения  $\partial B_r(Q_r)$  и  $[JQ_r]$ . Ясно, что получившееся множество покрывает  $q_{S_l}$ , так что оно имеет такую же энергию  $F_M$ ; а по неравенству треугольника обладает строго меньшей длиной, противоречие.

Заметим, что  $|S'_l Q_r| = r = |WQ_l|$ ;  $B_r(Q_r) \cap \Sigma = B_r(Q_l) \cap \Sigma = \emptyset$ . Пусть  $K \in [OQ_l]$  — такая точка, что  $(Q_r K) \perp (OQ_r)$ . Тогда  $\alpha := \text{turn}(S) =$

$\angle([BC], [CQ_r]) = \pi/3$ ,  $\angle([CS'_l], [S'_lA]) = 0$  и  $\beta := ([CQ_r], [Q_rK]) = \angle([S'_lA], a)$ . Мы должны показать, что  $\alpha + \beta > \gamma$ . Пусть  $P$  является точкой пересечения  $(KQ_r]$  и  $[BC)$ . Тогда  $\angle OKP = \pi/2 - \gamma$  и  $\angle KPC = \alpha + \beta$ . Предположим противное, то есть что  $\alpha + \beta \leq \gamma$ . Тогда  $\angle OKP + \angle KPC < \pi/2$ , отсюда  $\angle KLP \geq \pi/2$ , где  $L$  — точка пересечения прямых  $(BC)$  и  $(OK)$ , но, поскольку  $\angle Q_lCL = 2\pi/3$ , сумма углов в треугольнике  $\Delta CLQ_l$  больше  $\pi$ , что невозможно.

(с) *Случай  $n = 2$ ,  $m = 1$ , комбинаторный тип (с) на рис. 2.1 (см. рис. 2.21).*

В этом случае  $A = Q_r$ ,  $S'_l = W_r$ . Обозначим  $\angle([CW_r], [W_rQ_r])$  за  $\alpha$ ,  $\angle([S'_lA], a) = \angle([W_rQ_r], a)$  за  $\beta$ . Ясно, что  $\text{turn}(S) = \alpha + \beta$ ,  $\text{turn}(q_S) = \gamma$ . Пусть  $L$  является точкой пересечения  $(W_rC)$  и  $(Q_lO)$ . Предположим противное, т.е. что  $\gamma \geq \alpha + \beta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \angle W_rLQ_l &= \pi - \angle W_rLO = \pi - (2\pi - \angle LW_rQ_r - \angle W_rQ_rO - \angle Q_rOL) = \\ &= \pi - (2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi/2 - \beta) - \gamma) = \pi/2 - \beta - \alpha + \gamma \geq \pi/2, \end{aligned}$$

что невозможно, поскольку в таком случае выполнялось бы неравенство  $|CQ_l| < |S'_lQ_l|$ , а это снова противоречит условиям  $|S'_lQ_l| = r$ ,  $|CQ_l| \geq r$ .

□

*Доказательство следствия 2.3.4.* Пусть  $\hat{\Sigma}$  является локальным минимайзером в смысле определения 2.3.3. Предположим, что утверждение неверно, то есть

$$\mathcal{H}^1(\hat{\Sigma}) - \mathcal{H}^1(\Sigma) < (R - 5r)/2 \quad (2.1)$$

и  $\hat{\Sigma}$  не является подковой. Сперва рассмотрим случай в котором  $\hat{\Sigma}_r$  не содержит прямолинейных отрезков с длиной, большей чем

$$a'_M(r) := 2r + \mathcal{H}^1(\hat{\Sigma}) - \mathcal{H}^1(\Sigma) < 2r + (R - 5r)/2.$$

Тогда лемма 2.4.3 остается верной для рассматриваемой ситуации с  $a'_M(r)$  вместо  $a_M$  и по тем же причинам. Мы можем строчку за строчкой повторить доказатель-



ство теоремы 2.3.2 без изменений (мы можем это сделать, потому что все аргументы, которые использовались в этом доказательстве, также как и в лемме 2.4.17, являются локальными, кроме леммы 2.4.3 и части леммы 2.4.5 (утверждение  $m(S) \leq 2$ ), которые верны для  $a'_M(r)$  вместо  $a_M$ . Таким образом,  $\hat{\Sigma}$  является подковой в рассматриваемом случае. С другой стороны, если  $\hat{\Sigma}_r$  содержит отрезок длины хотя бы  $a'_M(r)$ , то используя замену леммы 2.4.2(iii), мы получим противоречие с (2.1).  $\square$

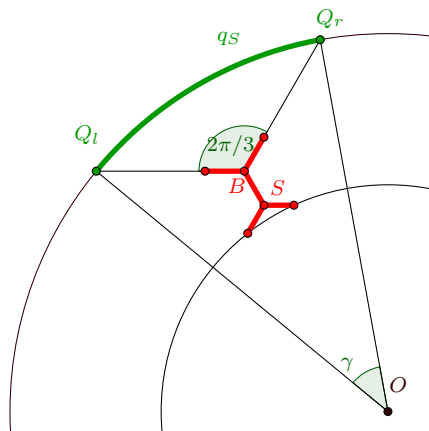


Рис. 2.10: Типичная ситуация для случая 1b: средняя компонента,  $n = 2, m = 2$ .

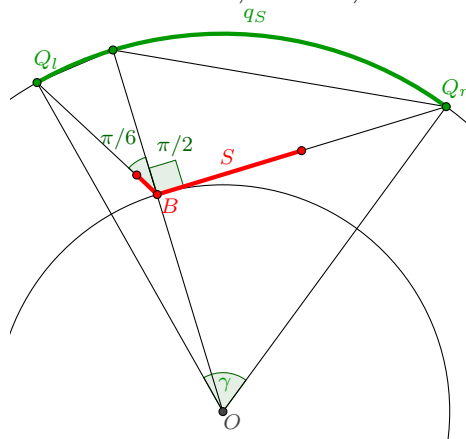


Рис. 2.11: Предельный рисунок к случаю 1b: средняя компонента,  $n = 2, m = 2$ .

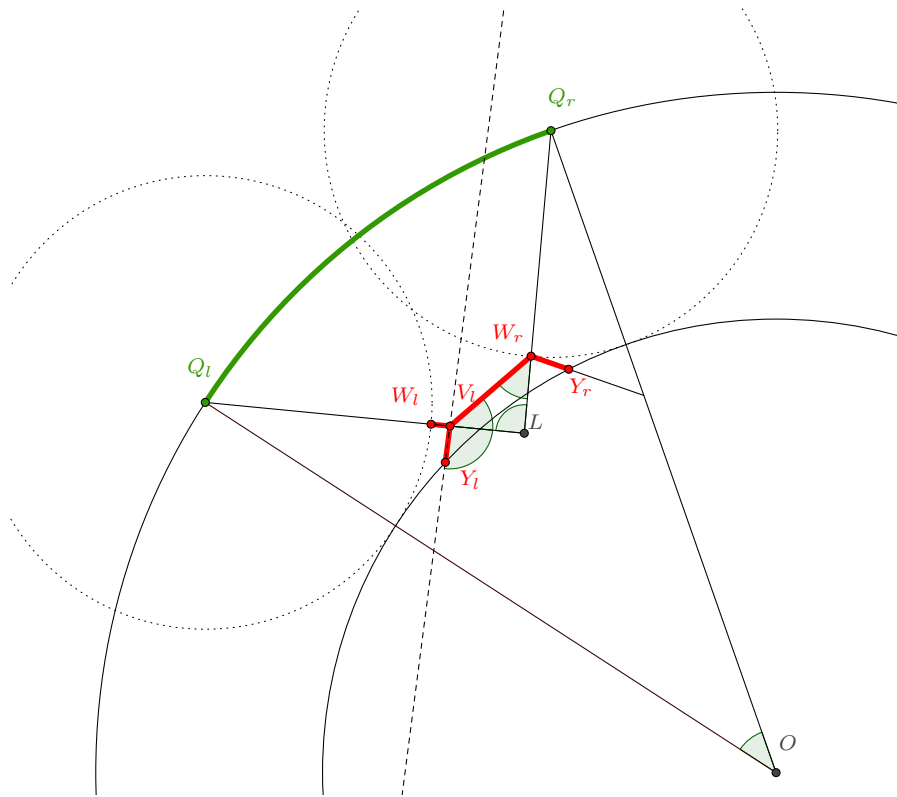


Рис. 2.12: Рисунок для случая 1с: средняя компонента,  $n = 2$ ,  $m = 2$ .

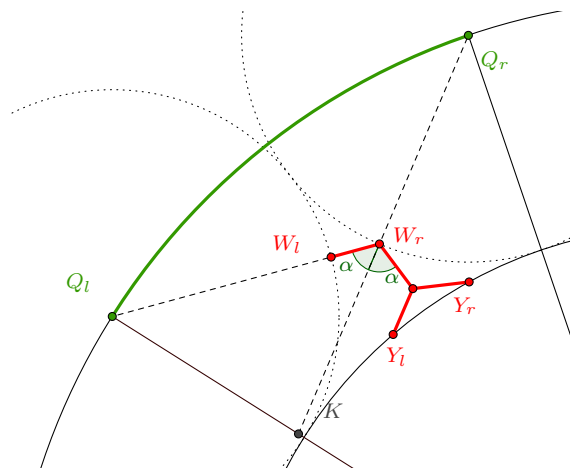


Рис. 2.13: Рисунок для случая 1с: средняя компонента,  $n = 2$ ,  $m = 2$ .

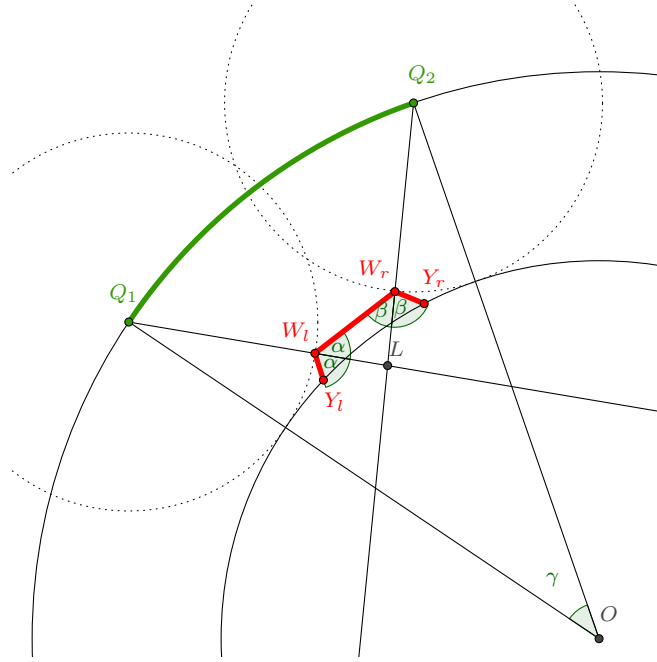


Рис. 2.14: Рисунок для случая 1d: средняя компонента,  $n = 2, m = 2$ .

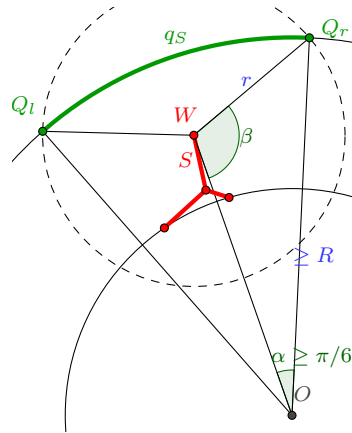


Рис. 2.15: Рисунок для случая 1e: средняя компонента,  $m = 2, n = 1$ .

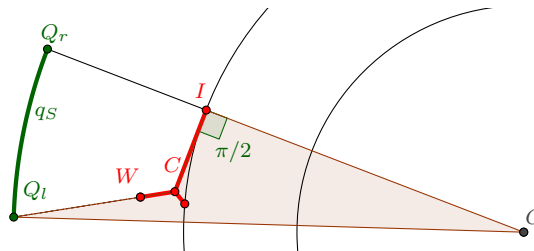


Рис. 2.16: Рисунок для случая 1e: средняя компонента,  $m = 2, n = 1$ .

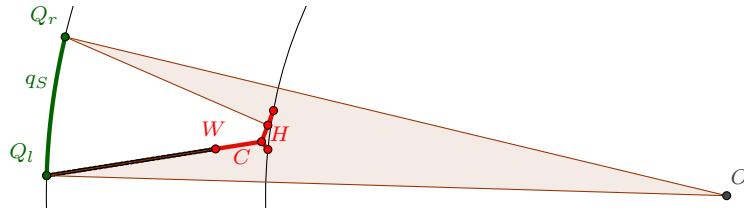


Рис. 2.17: Рисунок для случая 1e: средняя компонента,  $m = 2, n = 1$ .

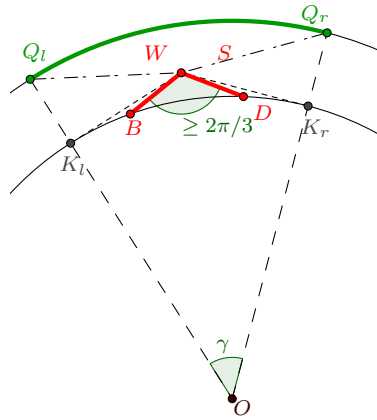


Рис. 2.18: Рисунок для случая 1f: средняя компонента,  $m = 2, n = 1$ .

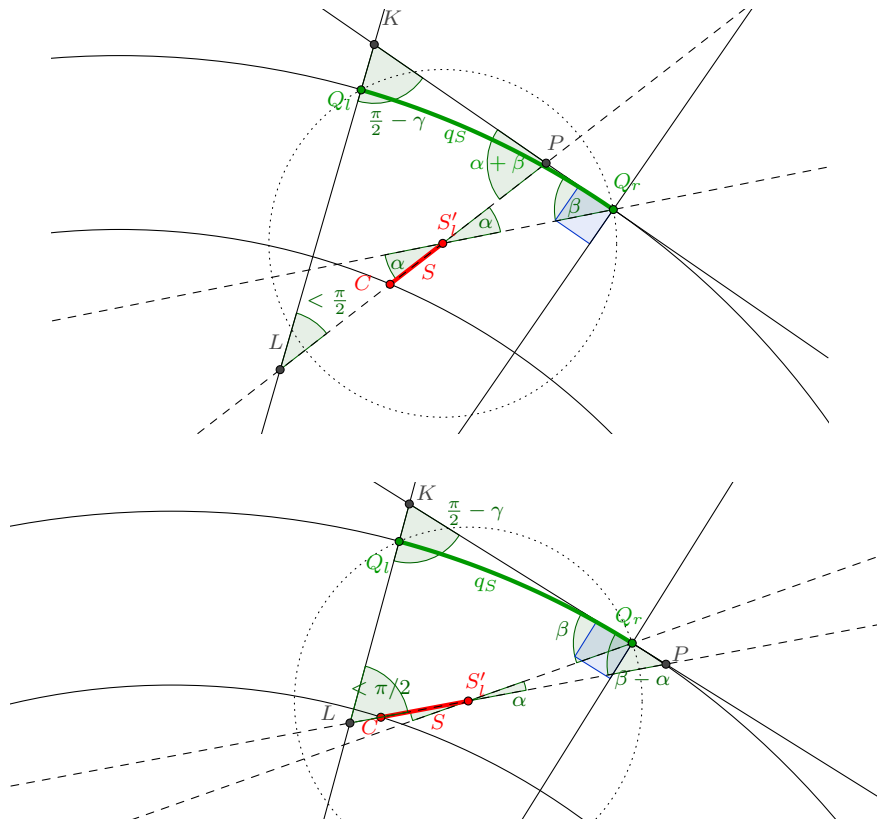


Рис. 2.19: Рисунок для случая 2a: крайняя компонента,  $n = 1, m = 1$ .

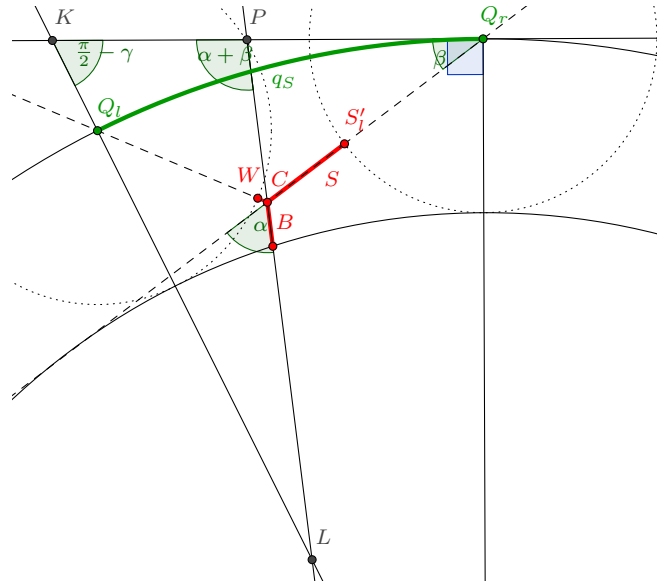


Рис. 2.20: Рисунок для случая 2b: крайняя компонента,  $n = 2$ ,  $m = 1$ .

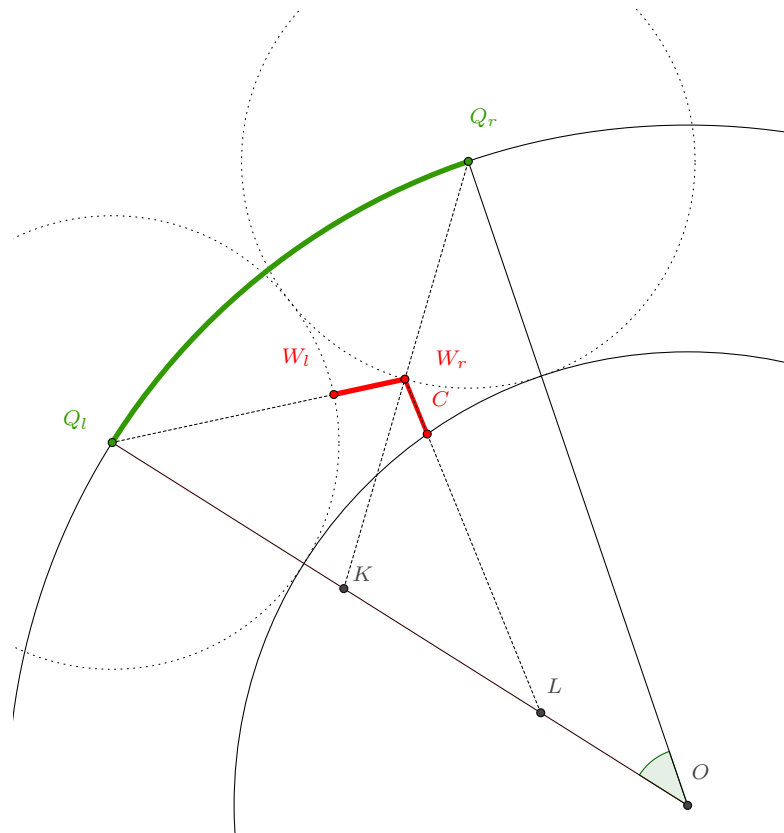


Рис. 2.21: Рисунок для случая 2c: крайняя компонента,  $n = 2$ ,  $m = 1$ .

## Глава 3. Самосжимающиеся кривые

### 3.1. Введение

Пусть  $E$  — метрическое пространство, снабженное расстоянием  $d$ . Кривая  $\theta: I \rightarrow E$ , где  $I \subset \mathbb{R}$  (возможно, бесконечный) интервал, называется *самосжимающейся*, если для любой тройки моментов времени  $\{t_i\}_{i=1}^3 \subset I$ , где  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ , выполняется  $d(\theta(t_3), \theta(t_2)) \leq d(\theta(t_3), \theta(t_1))$ . Особый интерес вызывают непрерывные самосжимающиеся кривые в конечномерном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , снабженном некоторой нормой. В [13] и [21] показано, что такие кривые возникают как кривые градиентного спуска для выпуклых функций и для функций с выпуклыми линиями уровня (иногда также называемых квазивыпуклыми) в пространстве Евклида. В работе [13] доказано, что каждая самосжимающаяся кривая, лежащая в ограниченном подмножестве  $\mathbb{R}^2$  (с обычным расстоянием Евклида), обязательно имеет конечную длину, т.е. является *спрямляемой*. Этот результат в дальнейшем был расширен до  $\mathbb{R}^n$  с произвольным  $n \geq 1$ , также с евклидовой нормой, в [10] (и, независимо, в [21] для непрерывных самосжимающихся кривых) и — для произвольного конечномерного риманова многообразия — в [12]. Заметим, что свойство самосжимаемости чрезвычайно чувствительно к изменению расстояния, а именно, несложно привести примеры кривых, самосжимающихся относительно одной нормы, и не самосжимающихся относительно другой, эквивалентной: например, кривая, проходящая по трем последовательным сторонам квадрата  $[0, 1]^2$  (скажем, по часовой стрелке, от начала координат к  $(0, 1)$ , затем к  $(1, 1)$  и, наконец, к  $(1, 0)$ ) — самосжимающаяся относительно максимальной (т.е.  $\ell_2^\infty$ ) нормы в  $\mathbb{R}^2$ , но не самосжимающаяся относительно евклидовой нормы. Это порождает естественный вопрос о возможности распространения утверждения на самосжимающиеся кривые в  $\mathbb{R}^n$  с произвольной нормой. Этот вопрос был поставлен в [18], и в той

же статье частичный ответ для равномерно выпуклых гладких ( $C^2$ ) норм был дан для случая  $n = 2$ . В этой главе мы даем положительный ответ для случая произвольной, не обязательно гладкой, нормы в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

В отличие от статей [13, 10, 18], которые в значительной степени развивали технику [10]), где доказательства базируются на конечных “непрерывных” аналитических аргументах, основывающихся на идеях из [23], наша техника имеет несколько “дискретный” оттенок. А именно, мы сначала получаем оценку на самосжимающуюся ломаную, отождествляемую с упорядоченным множеством  $(A_1, \dots, A_r) \in E^r$  своих вершин. При этом вектор  $(A_1, \dots, A_r) \in E^r$  называется *самосжимающимся* относительно расстояния  $d$  (или относительно нормы  $\|\cdot\|$ , если  $d$  порождено некоторой нормой  $\|\cdot\|$ ), если  $d(A_k, A_j) \leq d(A_k, A_i)$  для всех  $i \leq j \leq k$ . Мы показываем, что если  $E$  является конечномерным нормированным пространством, то полная евклидова длина самосжимающейся ломаной ограничена величиной, линейно зависящей от евклидова расстоянием между её первой и последней точками. Это немедленно доказывает требуемый результат о самосжимающихся кривых. Доказательство оценки длины самосжимающейся ломанной более или менее дискретно по своей природе, и использует обратную индукцию вместе с некоторыми рассуждениями комбинаторного типа о некоторых специальных разбиениях множества вершин.

### 3.2. Обозначения и предварительные замечания

Для  $\{A, B\} \subset \mathbb{R}^n$   $[AB]$  — замкнутый отрезок с концами в  $A$  и  $B$ ,  $|AB|$  — его евклидова длина. Обозначение  $|\cdot|$  всегда будет использоваться для евклидовой нормы в  $\mathbb{R}^n$ , и  $a \cdot b$  будет обозначать обычное скалярное произведение  $a \in \mathbb{R}^n$  и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Для двух векторов  $\{\nu_1, \nu_2\} \subset \mathbb{R}^n$  мы обозначаем за  $\widehat{(\nu_1, \nu_2)}$  угол между ними, так что  $\widehat{(\nu_1, \nu_2)} \in [0, \pi]$ . Если  $\ell \subset \mathbb{R}^n$  — прямая и  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  — линейное подпространство произвольной положительной размерности, мы обозначаем за  $\widehat{(\ell, \Pi)}$  угол между ними (т.е. минимальный угол между векторами, принадлежащими  $\ell$  и  $\Pi$ , соответственно), так что  $\widehat{(\ell, \Pi)} \in [0, \pi/2]$ . Угол при вершине  $B$  треугольника с вершинами  $A, B, C$  будет обозначаться  $\angle ABC$ . Для множества  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  мы обозначаем за  $\partial\mathbb{D}$  его топологическую границу, и за  $\text{diam } \mathbb{D}$  его евклидов диа-



метр (т.е. диаметр относительно евклидова расстояния). Для  $\{a, b\} \in \mathbb{R}$  мы пишем  $a \vee b := \max\{a, b\}$ .

Обозначение  $\nu^\perp$  для  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , если нет специальной оговорки, будет означать линейное подпространство  $\{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot \nu = 0\}$ , а  $\Pi^\perp$  для линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  будет обозначать его ортогональное дополнение.

Зафиксировав  $\varepsilon > 0$ , мы будем называть отрезок  $[AB]$   $\varepsilon$ -горизонтальным относительно линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  произвольной положительной размерности, если  $(\widehat{[AB]}, \Pi) \leq \varepsilon$ , и  $\varepsilon$ -вертикальным относительно этого подпространства — в противном случае (оба обозначения мы будем сокращать до *горизонтальный* и *вертикальный* соответственно, если подпространство и  $\varepsilon$  ясны из контекста). Мы будем использовать это обозначение в частности когда подпространство  $\Pi$  — одномерно и совпадает с некоторой осью  $x^j$  выбранной координатной системы (ось рассматривается как прямая, то есть без учета направления). С помощью  $p_\Pi$  мы обозначаем ортогональную проекцию на  $\Pi$ .

Если  $E$  — произвольное множество, и  $(A_1, \dots, A_r) \in E^r$  — произвольный вектор точек  $E$ , тогда вектор  $(A_{j_1}, \dots, A_{j_k}) \in E^k$  с  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq r$ , называется подвектором  $(A_1, \dots, A_r)$  и обозначается  $(A_{j_1}, \dots, A_{j_k}) \subset (A_1, \dots, A_r)$ . Там, где это необходимо, мы отождествляем вектор  $(A_1, \dots, A_r) \in E^r$  с множеством  $\{A_1, \dots, A_r\}$ , так что мы пишем просто  $(A_1, \dots, A_r) \subset E$ . В случае  $E = \mathbb{R}^n$ , мы называем *вариацию*  $(A_1, \dots, A_r) \in E^r$  (обозначаемую  $\ell(A_1, \dots, A_r)$ ) евклидовой длиной ломаной  $A_1 \dots A_r := \cup_{j=1}^{r-1} [A_j A_{j+1}]$  т.е.

$$\ell(A_1, \dots, A_r) := \sum_{i=1}^{r-1} |A_i A_{i+1}|.$$

Более того, для линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  произвольной положительной размерности, мы определяем вариацию  $(A_1, \dots, A_r)$  вдоль  $\Pi$  с помощью правила

$$\ell_\Pi(A_1, \dots, A_r) := \ell(p_\Pi(A_1), \dots, p_\Pi(A_r)).$$

Для кривой  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $I \subset \mathbb{R}$  является отрезком (не обязательно конечным),

мы обозначаем с помощью  $\ell(\theta)$  её длину, определенную следующей формулой:

$$\ell(\theta) := \sup \left\{ \ell \left( \{\theta(t_j)\}_{j=1}^m \right) : \{t_j\}_{j=1}^m \subset I, t_1 \leq \dots \leq t_m, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

### 3.3. Основные результаты

Следующая теорема является первым главным результатом этой главы.

**Теорема 3.3.1.** *Пусть  $A_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, r$ , и вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  является самосжимающимся относительно нормы  $\|\cdot\|$ , тогда*

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C|A_1 A_r|$$

для некоторого  $C > 0$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$  и от размерности пространства  $n$ .

В качестве тривиального следствия этого результата получаем следующую теорему о самосжимающихся кривых, которая дает полный ответ на интересующий нас вопрос.

**Теорема 3.3.2.** *Пусть  $E$  — конечномерное пространство, снабженное нормой  $\|\cdot\|$ , и пусть  $\theta: I \rightarrow E$ , где  $I \subset \mathbb{R}$  является (возможно, неограниченным) интервалом, является самосжимающейся кривой, след которой лежит в ограниченном множестве  $\mathbb{D} \subset E$ . Тогда  $\ell(\theta) \leq C \text{diam } \mathbb{D}$  для некоторого  $C > 0$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$  и от размерности пространства.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное конечное множество  $\{t_i\}_{i=1}^r \subset I$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$ . Мы знаем, что для  $A_i := \theta(t_i)$  вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся в  $E$ . Тогда

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C|A_1 A_r| \leq C \text{diam } \mathbb{D}$$

ввиду теоремы 3.3.1, что завершает доказательство. □

**Замечание 3.3.3.** *На самом деле, в доказательствах теорем 3.3.1 и 3.3.2 мы нигде не пользуемся симметричностью нормы  $\|\cdot\|$ . Если норма не симметрична*

(т.е. не обязательно удовлетворяет условию  $\| -x \| = \| x \|$  для всех  $x \in E$ ), с расстоянием (теперь не обязательно симметричным) определяемым по-прежнему как  $d(x, y) := \| y - x \|$ , тогда геометрический смысл свойства самосжимаемости кривой не меняется относительно стандартной ситуации симметричной нормы, а именно, что для любых трех моментов времени  $\{t_i\}_{i=1}^3 \subset I$  с  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  и  $\theta(t_1)$  на границе шара нормы (теперь шар нормы — не обязательно симметричное выпуклое ограниченное множество) с центром в  $\theta(t_3)$ , точка  $\theta(t_2)$  не может располагаться строго снаружи вышеупомянутого шара. Тогда, используя лемму 3.7.2 следует изменить её условие в соответствии с написанным в замечании 3.7.3. Это изменит константу  $3/4$  в утверждении леммы 3.5.10 и отсюда также точные константы во всех последующих леммах должны быть заменены константами, зависящими только от нормы  $\| \cdot \|$ , но все соответствующие результаты останутся верными с точностью до изменения констант. Таким образом, теорема 3.3.1 и теорема 3.3.2 верны и для несимметричных норм.

**Замечание 3.3.4.** Важно отметить, что не каждая самосжимающаяся кривая с ограниченным следом в конечномерном нормированном пространстве является непрерывной. Действительно, функция  $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная следующим образом:  $\theta(t) := 0$  для  $t \in [0, 1/2)$  и  $\theta(t) := 1$  для  $t \in [1/2, 1]$  дает пример разрывной самосжимающейся кривой даже в  $\mathbb{R}$ .

Пример ниже показывает, что соответствующий результат не верен в бесконечномерной ситуации (даже для бесконечномерного гильбертова пространства вместо евклидова).

**Пример 3.3.5.** Пусть  $\ell^2$  обозначает стандартное гильбертово пространство квадратично суммируемых последовательностей, снабженных стандартной нормой  $\| \cdot \|_2$ ,  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  обозначает его стандартный ортонормированный базис. Тогда кривая  $\theta: [0, +\infty) \rightarrow \ell^2$ , определенная следующим образом

$$\theta(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} e_j, & t \in [k-1, k), \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \end{cases}$$

является самосжимающейся, поскольку

$$\|\theta(k), \theta(l)\|_2^2 = \sum_{j=l}^{k-1} \frac{1}{j^2} > \sum_{j=m}^{k-1} \frac{1}{j^2} = \|\theta(k), \theta(m)\|_2^2$$

когда  $l < m < k$ ,  $\{l, m, k\} \subset \mathbb{N}$ , и ее след содержится в компактном подмножестве  $\ell^2$  (в гильбертовом кубе), но  $\ell(\theta) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$ . Эта же кривая, ограниченная на произвольный конечный интервал времени, скажем  $[0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , дает пример самосжимающейся кривой в ограниченном подмножестве евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , для которого константа  $C$  из теоремы 3.3.2 стремится к бесконечности при  $n \rightarrow +\infty$ . Несложно преобразовать данный пример в пример с непрерывной самосжимающейся кривой.

Полезно также привести следующий пример.

**Пример 3.3.6.** Пусть  $L^2(0, 1)$  обозначает стандартное пространство Лебега интегрируемых функций над  $(0, 1)$ , снабженных обычной нормой, обозначаемой  $\|\cdot\|_2$  (конфликт обозначений с предыдущим примером не возникает, несмотря на то, что используются то же самое обозначение для нормы), и пусть кривая  $\theta: [0, 1] \rightarrow L^2(0, 1)$  определена как  $\theta(t) := \mathbf{1}_{[0,t]}$  характеристическая функция интервала  $[0, t]$ ,  $t \in [0, 1]$ . Она очевидно самосжимающаяся, поскольку  $\|\theta(t) - \theta(s)\|_2 = |t - s|^{1/2}$ , и то же соотношение показывает, что она не спрямляемая, хотя её образ компактное множество (как непрерывный образ  $[0, 1]$ ).

Остаток главы займет доказательство теоремы 3.3.1, сначала простого частного случая, на примере которого хорошо видны основные идеи доказательства, а затем и в общей ситуации.

### 3.4. Простой случай

Прежде чем приводить длинное и технически сложное доказательство теоремы 3.3.1 во всей общности, приведем для удобства читателя его очень простую версию для частного случая двумерного пространства  $\mathbb{R}^2$ , снабженного максимальной нормой  $\|(x_1, x_2)\|_{\infty} := |x_1| \vee |x_2|$ , так что ее замкнутый единичный шар  $\mathbb{B}$  представляет из себя квадрат  $[-1, 1]^2$ .

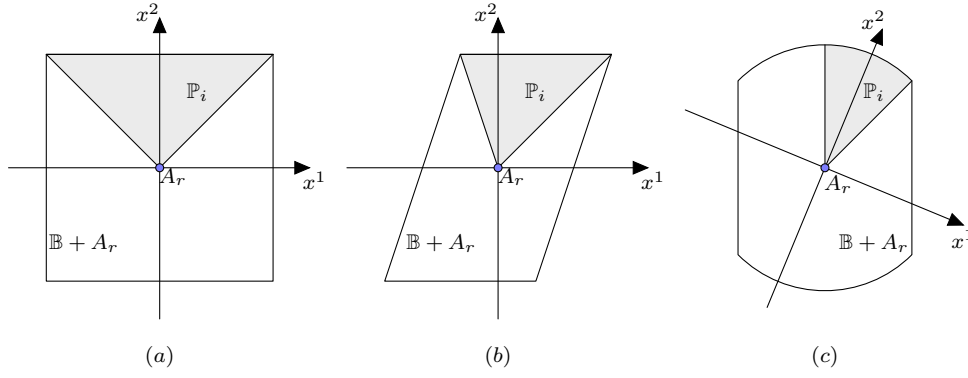


Рис. 3.1: (а) Доказательство простого случая теоремы 3.3.1 ( $n = 2$ , максимальная норма), шаг 2; (б) случай  $n = 2$ , единичный шар — выпуклый многогранник; (с) случай  $n = 2$ , произвольная норма.

*Доказательство теоремы 3.3.1, простой случай.* Шар  $\mathbb{B} = [-1, 1]^2$  может быть представлен как объединение  $N = 4$  треугольников  $\{\mathbb{P}_i\}_{i=1}^N$ , вершинами каждого из треугольников  $\mathbb{P}_i$  являются начало координат и две соседние вершины квадрата  $[-1, 1]^2$ . Будем считать, что треугольники пересекаются только по началу координат (то есть они ни замкнуты, ни открыты). Мы можем также полагать, не умаляя общности, что  $A_j \in \mathbb{B} + A_r$  для всех  $j = 1, \dots, r$ . Оставшаяся часть доказательства разбивается на три шага.

*Шаг 1.* Мы утверждаем, что

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C_1 \sum_{i=1}^N \ell((A_1, \dots, A_r) \cap (\mathbb{P}_i + A_r)) + C_2 |A_1 A_r| \quad (3.1)$$

для некоторых положительных констант  $C_1$  и  $C_2$ . Действительно, рассмотрим произвольное  $j \in \{1, \dots, r-1\}$  такое, что  $A_{j+1} \in \mathbb{P}_i + A_r$ , но  $A_j \notin \mathbb{P}_i + A_r$  для некоторого  $i = 1, \dots, N$ . Тогда для каждого фиксированного  $i \in \{1, \dots, N\}$  реализуется один из двух вариантов:

- (i)  $j$  — первое число из множества  $\{1, \dots, r\}$  такое что  $A_{j+1} \in \mathbb{P}_i + A_r$ , т.е.  $\{s \in \{1, \dots, j\} : A_s \in \mathbb{P}_i + A_r\} = \emptyset$ . В этом случае, поскольку  $\{A_j, A_{j+1}\} \in \lambda \mathbb{B} + A_r$  с  $\lambda := \|A_1 A_r\|$  (поскольку  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающаяся), мы имеем

$$|A_j A_{j+1}| \leq \sqrt{2} \|A_j A_{j+1}\| \leq 2\sqrt{2} \|A_1 A_r\| \leq 2\sqrt{2} |A_1 A_r|.$$

Для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$ , кроме одного (для которого  $A_1 \in \mathbb{P}_i + A_r$ ), существует ровно одно  $j$ , обладающее вышеупомянутыми свойствами, и значит сумма евклидовых длин всех этих отрезков  $|A_j A_{j+1}|$  по всем  $\mathbb{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ограничена сверху величиной  $C_2 |A_1 A_r|$ , с  $C_2 := (N - 1)2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ;

(ii) найдется такое

$$s(j) := \max\{s \in \{1, \dots, j\} : A_s \in \mathbb{P}_i + A_r\},$$

и  $s(j) < j$  по определению  $s(\cdot)$ , поэтому

$$|A_j A_{j+1}| \leq \sqrt{2} \|A_j A_{j+1}\| \leq \sqrt{2} \|A_{s(j)} A_{j+1}\| \leq \sqrt{2} |A_{s(j)} A_{j+1}|.$$

Тогда при  $C_2 := \sqrt{2}$  получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \{A_j, A_{j+1}\} \subset \mathbb{P}_i + A_r}} |A_j A_{j+1}| + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \text{как в (ii)}}} |A_j A_{j+1}| \\ & \leq C_2 \left( \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \{A_j, A_{j+1}\} \subset \mathbb{P}_i + A_r}} |A_j A_{j+1}| + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \text{как в (ii)}}} |A_{s(j)} A_{j+1}| \right) \\ & = C_2 \ell((A_1, \dots, A_r) \cap (\mathbb{P}_i + A_r)). \end{aligned}$$

Из (i) и (ii) следует (3.1).

*Шаг 2.* Предположим теперь, что  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_i + A_r$  для некоторых  $i = 1, \dots, N$ , и покажем, что

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C |A_1 A_r| \tag{3.2}$$

для некоторой универсальной константы  $C > 0$ . Рассмотрим для этой цели систему декартовых координат с осями, проходящими через  $A_r$  (далее будем рассматривать эту точку в качестве начала координат), с осью  $x^2$ , направленной перпендикулярно стороне  $\mathbb{P}_i$ , совпадающей со стороной квадрата  $\partial\mathbb{B}$  (см. рис. 3.1(a)), и

осью  $x^1$ , параллельной этой стороне. Тогда

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq \sum_{j=1}^{r-1} (|x_{j+1}^1 - x_j^1| + |x_{j+1}^2 - x_j^2|) = \ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) + \ell_{x^2}(A_1, \dots, A_r), \quad (3.3)$$

где  $x_j^l := p_{x^l}(A_j)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Но  $x_{j+1}^2 \leq x_j^2$  для всех  $j$  (поскольку  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_i + A_r$ ), так что

$$\ell_{x^2}(A_1, \dots, A_r) = \sum_{j=1}^{r-1} |x_{j+1}^2 - x_j^2| = - \sum_{j=1}^{r-1} (x_{j+1}^2 - x_j^2) = |x_r^2 - x_1^2|. \quad (3.4)$$

Чтобы вычислить  $\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r)$ , заметим, что существует подмножество  $(A_{q_1}, \dots, A_{q_l}) \subset (A_1, \dots, A_r)$ , обладающее тем же  $\ell_{x^1}$ , но с  $(x_{q_j}^1 - x_{q_{j+1}}^1)(x_{q_{j-1}}^1 - x_{q_j}^1) < 0$ , т.е. проекция  $(A_{q_j}A_{q_{j+1}})$  на  $x^1$  направлена противоположно относительно  $(A_{q_{j-1}}A_{q_j})$ , для всех  $j = 2, \dots, l-1$ . Множество индексов  $\Lambda := \{q_1, \dots, q_l\}$  формируется с помощью обратной индукции, а именно: положим  $q_l := r$ ,  $q_{l-1} := r-1$  и тогда для каждого  $j$ , для которого уже определены  $q_j$  и  $q_{j+1}$ , найдем максимальный индекс  $s < j$  такой, что  $(x_{q_j}^1 - x_{q_{j+1}}^1)(x_s^1 - x_{q_j}^1) < 0$  и положим  $q_{j-1} := s$ . Поскольку ясно, что  $\ell_{x^1}(A_{j-1}, A_j, A_{j+1}) = \ell_{x^1}(A_{j-1}, A_{j+1})$  когда проекции  $(A_{j-1}A_j)$  и  $(A_jA_{j+1})$  на  $x^1$  имеют одинаковое направление, тогда

$$\ell_{x^1}(A_{q_1}, \dots, A_{q_l}) = \ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r),$$

и тогда мы можем предположить, не умаляя общности (с точностью до перенумерации), что исходный вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  имеет следующее свойство: проекция  $(A_jA_{j+1})$  на  $x^1$  направлена противоположным образом относительно  $A_{j-1}A_j$ , для всех  $j = 2, \dots, r-1$ . Теперь мы заметим, что неравенство

$$|x_{j+1}^1 - x_{j-1}^1| \vee |x_{j+1}^2 - x_{j-1}^2| = \|A_{j-1}A_{j+1}\| \geq \|A_jA_{j+1}\| \geq |x_{j+1}^1 - x_j^1|$$

влечет

(i) или  $|x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq |x_{j+1}^2 - x_{j-1}^2|$  (т.е. отрезок  $(A_{j-1}A_{j+1})$  “вертикальный”)

(ii) или  $|x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq |x_{j+1}^1 - x_{j-1}^1|$  (т.е. отрезок  $(A_{j-1}A_{j+1})$  “горизонтальный” (т.е. проекция  $x^1$  больше)).

В случае (ii)  $x_{j+1}^1$  ближе к  $x_j^1$ , чем к  $x_{j-1}^1$ , но находится по ту же сторону относительно  $x_j^1$ , что и  $x_{j-1}^1$ , а значит

$$|x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq \frac{1}{2}|x_j^1 - x_{j-1}^1|,$$

и тогда в любом случае

$$|x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq \frac{1}{2}|x_j^1 - x_{j-1}^1| + |x_{j+1}^2 - x_{j-1}^2|.$$

Тогда по индукции получаем

$$|x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{2^{j-1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{j+1} \frac{|x_k^2 - x_{k-2}^2|}{2^{j-k}},$$

и значит,

$$\begin{aligned} \ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) &= \sum_{j=1}^{r-1} |x_{j+1}^1 - x_j^1| \leq |x_2^1 - x_1^1| \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=3}^{j+1} \frac{|x_k^2 - x_{k-2}^2|}{2^{j-k}} \\ &= |x_2^1 - x_1^1| \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2^{j-1}} + \sum_{k=3}^r |x_k^2 - x_{k-2}^2| \sum_{j=k-1}^{r-1} \frac{1}{2^{j-k+1}} \\ &\leq 2|x_2^1 - x_1^1| + 2 \sum_{k=3}^r |x_k^2 - x_{k-2}^2| \leq 2|x_2^1 - x_1^1| + 2\ell_{x^2}(A_1, \dots, A_r) \\ &\leq 2|x_2^1 - x_1^1| + 2|x_1^2 - x_r^2| \quad \text{ввиду (3.4)} \\ &\leq 2|A_1A_2| + 2|A_1A_r| \leq 4\sqrt{2}|A_1A_r| + 2|A_1A_r|, \\ &\quad \text{поскольку } \{A_1, A_2\} \subset A_r + \|A_1A_r\|\mathbb{B}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) и (3.4) в (3.3), получаем (3.2).

*Шаг 3.* Обозначим теперь  $(A_{j_i^1}, \dots, A_{j_i^{m(i)}}) := (A_1, \dots, A_r) \cap (\mathbb{P}_i + A_r)$  для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$ , где  $j_i^l \in \{1, \dots, r\}$  (ясно, что  $j_i^{m(i)} = r$ ), применяя результат



Шага 2 (с  $j_i^1$  вместо 1 и  $j_i^{m(i)}$  вместо  $r$ ), получаем, что

$$\ell((A_1, \dots, A_r) \cap (\mathbb{P}_i + A_r)) \leq C|A_{j_i^1} A_{j_i^{m(i)}}| = C|A_{j_i^1} A_r| \leq C\sqrt{2}|A_1 A_r|,$$

и затем, применив (3.1), завершаем доказательство.  $\square$

### 3.4.1. От простого частного случая к более общей ситуации

Приведенное выше доказательство использует все основные аргументы полного доказательства, а именно: разбиение единичного шара  $\mathbb{B}$  на “конусообразные” подмножества  $\mathbb{P}_i$ , сведение условия на вариацию  $(A_1, \dots, A_r)$  к условию на вариацию его подвекторов в каждом  $\mathbb{P}_i$  (т.е. Шаг 1 доказательства выше и Шаг 1 доказательства ключевой леммы 3.6.13 ниже) и независимые оценки вариации ломаной в каждой  $\mathbb{P}_i$  вдоль каждой из правильно выбранных осей, с отдельным разбором ситуации “вертикальных” и “горизонтальных” отрезков (как в Шаге 2 доказательства, написанного выше). Однако в ходе экстраполяции такого доказательства возникает ряд трудностей, которые мы перечислим ниже.

- (i) Первая сложность возникает уже при попытке обобщить вышеперечисленные аргументы на случай  $n = 2$  и единичного шара  $\mathbb{B}$ , нормы  $\|\cdot\|$ , являющегося произвольным выпуклым *многоугольником*, а не квадратом. Разделение  $\mathbb{B}$  на треугольники  $\mathbb{P}_i$  и выбор осей для каждого  $\mathbb{P}_i$  очевидным образом производится как в нашем простом модельном случае максимальной нормы, см. рис. 3.1(b), так что самосжимающаяся ломаная с вершинами внутри  $\mathbb{P}_i$  при таком выборе никогда не идет вверх по направлению  $x^2$ . Однако рассуждения Шага 2 изложенного выше доказательства модельного случая становятся более сложными, поскольку оценки “горизонтальных” и “вертикальных” частей ломаной совсем не такие простые, как в случае максимальной нормы.
- (ii) Следующая трудность возникает в случае произвольной нормы  $\|\cdot\|$  (т.е. с единичным шаром не обязательно многоугольником) в  $\mathbb{R}^2$  (т.е. по-прежнему  $n = 2$ ). В этом случае приходится делить единичный шар  $\mathbb{B}$  нормы  $\|\cdot\|$  на множества  $\mathbb{P}_i$  так что для некоторого естественного выбора направления  $x^2$  для каждого  $\mathbb{P}_i$ , самосжимающаяся ломаная с вершинами внутри  $\mathbb{P}_i$  может идти

вверх по направлению  $x^2$ , но “не слишком сильно”, см. рис. 3.1(с). Это естественным образом приводит к количественным понятиям “горизонтальности” и “вертикальности” для отрезков.

- (iii) Однако с наибольшими сложностями приходится столкнуться при попытке применить эти аргументы к общему случаю пространства размерности  $n$ . В самом деле, давайте рассмотрим самый простой случай, а именно максимальную норму  $\|\cdot\|$  в  $\mathbb{R}^3$ , с единичным шаром  $\mathbb{B}$ , являющимся кубом  $[-1, 1]^3$ . Тогда множества  $\mathbb{P}_i$  (также как в случае максимальной нормы в  $\mathbb{R}^2$ ) представляют собой шесть пирамид с одной из вершин в начале координат, и основаниями, совпадающими с гранями куба (что оправдывает обозначение  $\mathbb{P}_i$  для них).

При естественном выборе координат для каждой из этих пирамид ( $x^3$  перпендикулярна основанию) самосжимающаяся ломаная с вершинами внутри пирамиды может идти только вниз по направлению  $x^3$ , но не имеет таких ограничений по другим двум направлениям. Отсюда интуитивно ясно, что имеет смысл отдельно рассматривать “горизонтальные” части ломаной и писать отдельные оценки на её подчасти, принадлежащие снова различным пирамидам (и при этом находящиеся внутри исходно рассматриваемой пирамиды  $\mathbb{P}_i$ ), с вершинами не в начале координат. Это подводит нас к понятию *допустимого* упорядоченного множества пирамид (см. определение 3.5.6); каждое такое множество определяет естественную систему не обязательно ортогональных координат, а также позволяет провести технически сложное индуктивное рассуждение для пространств произвольной размерности. Грубо говоря, в произвольном пространстве размерности  $n$ , в каждом множестве  $\mathbb{P}_i$  мы будем независимо считать вариацию “вертикальной” части самосжимающегося вектора, что несложно сделать ввиду монотонности (или “почти монотонности” в случае произвольной нормы, когда  $\mathbb{P}_i$  не является пирамидой)  $x^n$ -й координаты вершины, где ось  $x^n$  определяется множеством  $\mathbb{P}_i$ , и затем, по индукции, вариацию его “горизонтальной” части. При вычислении последней мы разделим эту часть на подчасти, принадлежащие различным множествам  $\mathbb{P}_j$ , каждое из которых определит соответствующую ось  $x^{n-1}$  и снова позволит оценить ва-

риацию “вертикальных” и “горизонтальных” частей (теперь относительно оси  $x^{n-1}$ ) посредством обратной индукции.

Заметим, что, как было показано выше, в ситуации  $n = 2$  можно обойтись без использования индукции; однако описываемое нами доказательство предусматривает использование индукции даже в этом относительно простом случае.

И наконец, полезно отметить, что для произвольной нормы  $\|\cdot\|$  множества  $\mathbb{P}_i$  больше не являются пирамидами и могут иметь достаточно сложную структуру (что, однако, не влияет на доказательство).

## 3.5. Предварительные построения

### 3.5.1. Разбиение выпуклого тела

Для выпуклого множества  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  мы говорим, что  $\nu_x \in \mathbb{R}^n$  является вектором внешней нормали к  $\mathbb{D}$  в точке  $x \in \partial\mathbb{D}$ , если существует опорная гиперплоскость  $\Pi$  к  $\mathbb{D}$  в точке  $x$ , ортогональная  $\nu_x$ , и  $\nu_x$  направлена в сторону открытой полуплоскости, ограниченной  $\Pi$  и не содержащей  $\mathbb{D}$ . Ясно, что если  $\partial\mathbb{D}$  не является гладкой, то в точке  $x \in \partial\mathbb{D}$  может быть много векторов внешней нормали.

Нам потребуется следующая конструкция.

**Утверждение 3.5.1.** Пусть  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество. Тогда для каждого  $\delta > 0$  существует покрытие множества  $\partial\mathbb{D}$  конечным набором множеств  $\{\mathbb{T}_i\}_{i=1}^N$  (для некоторого  $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ ), обладающее следующим свойством: для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$  существует вектор  $\nu^i$ , такой что для каждой  $x \in \mathbb{T}_i$  существует вектор внешней нормали  $\nu_x$  к  $\mathbb{D}$  в  $x$  с  $\widehat{(\nu_x, \nu^i)} < \delta$ .

*Доказательство.* Для данного  $\delta > 0$ , мы берем конечное покрытие  $S^{n-1}$  как в доказываемом утверждении, т.е. ищем  $\{\tilde{\mathbb{T}}_i\}_{i=1}^N$  (с некоторым  $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ ),  $\cup_{i=1}^N \tilde{\mathbb{T}}_i = S^{n-1}$ , такое что для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$  существует вектор  $\nu^i$  со следующим свойством: для каждой точки  $x \in \tilde{\mathbb{T}}_i$  единственный вектор внешней нормали  $\nu_x$  к  $S^{n-1}$  в  $x$  удовлетворяет условию  $\widehat{(\nu_x, \nu^i)} < \delta$ . Теперь достаточно определить  $\mathbb{T}_i$  как множество всех  $x \in \partial\mathbb{D}$ , допускающих единичный вектор внешней

нормали  $\nu_x$  к  $\mathbb{D}$ , совпадающих с некоторым вектором единичной внешней нормали  $\nu_y$  к  $S^{n-1}$  в некоторой  $y \in \tilde{\mathbb{T}}_i$ .  $\square$

**Замечание 3.5.2.** Несмотря на то, что множества  $\mathbb{T}_i$ , упомянутые в утверждении 3.5.1, могут пересекаться, мы можем легко сделать их дизъюнктными с помощью замены  $\mathbb{T}_i$  на  $\mathbb{T}_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} \mathbb{T}_j$ .

Применяя утверждение 3.5.1 и замечание 3.5.2 к замкнутому единичному шару  $\mathbb{B}$  нормы  $\|\cdot\|$  при заданном  $\delta > 0$ , мы находим  $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$  и конечное семейство дизъюнктных множеств  $\{\mathbb{T}_i\}_{i=1}^N$  и векторов  $\{\nu^i\}_{i=1}^N$ , таких что  $\cup_i \mathbb{T}_i = \partial\mathbb{B}$  и для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$  и каждой  $x \in \mathbb{T}_i$  существует вектор внешней единичной нормали  $\nu_x$  к  $\mathbb{D}$  в  $x$  с  $\widehat{(\nu_x, \nu^i)} < \delta$ . Определим  $\mathbb{P}_i := \cup_{t \in [0,1]} t\mathbb{T}_i$ , и заметим, что теперь  $\mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_j = \{0\}$  при  $i \neq j$ .

В дальнейшем мы будем часто использовать следующий факт.

**Лемма 3.5.3.** Пусть  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_i + A_r$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, N\}$  является самосжимающейся относительно нормы  $\|\cdot\|$ . Тогда условие  $((A_j \widehat{A_{j+1}}), (\nu^i)^\perp) > \delta$ ,  $j \in \{1, \dots, r-1\}$  влечет

$$(A_j - A_{j+1}) \cdot \nu^i > 0.$$

*Доказательство.* Утверждение следует из леммы 3.5.4 ниже, примененной к множеству  $\mathbb{D} := A_r + \lambda\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{T} := A_r + \lambda\mathbb{T}_i$ , где  $\lambda := \|A_j - A_r\|$ ,  $A_j$  вместо  $A_1$  и  $A_{j+1}$  вместо  $A_2$ . Несложно заметить, что  $A_{j+1} \in \mathbb{D}$  ввиду условия самосжимаемости на  $(A_1, \dots, A_r)$ .  $\square$

Следующий геометрический факт будет использоваться в доказательстве.

**Лемма 3.5.4.** Пусть  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество,  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{T} \subset \partial\mathbb{D}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^n$  такие, что для каждого  $x \in \mathbb{T}$  существует вектор внешней нормали  $\nu_x$  к  $\mathbb{D}$  в  $x$  с  $\widehat{(\nu_x, \nu)} < \delta$ . Если  $A_1 \in \mathbb{T}$ ,  $A_2 \in \mathbb{D}$  и  $((A_1 \widehat{A_2}), \nu^\perp) > \delta$ , тогда  $(A_1 - A_2) \cdot \nu > 0$ .

*Доказательство.* Если вектор  $B \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий условию  $((A_1 \widehat{B}), \nu^\perp) > \delta$ , таков, что  $(B - A_1) \cdot \nu \geq 0$ , то  $(B - A_1, \nu) < \pi/2 - \delta$ , так что

$$(B - A_1, \nu_{A_1}) \leq (B - A_1, \nu) + \widehat{(\nu, \nu_{A_1})} < \frac{\pi}{2} - \delta + \delta = \frac{\pi}{2}.$$

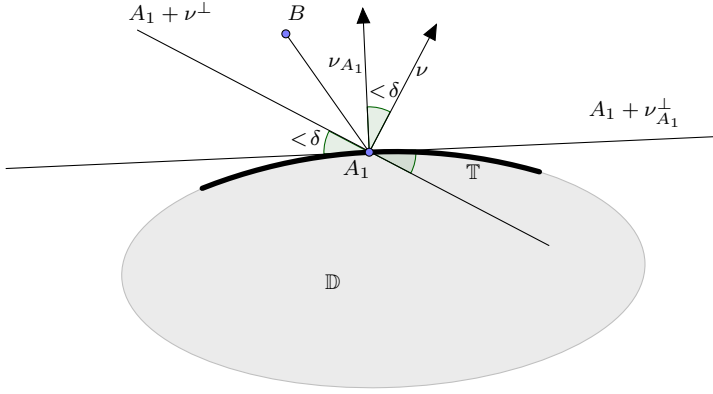


Рис. 3.2: Построения из доказательства леммы 3.5.4.

$A$  значит  $B$  лежит в открытой полуплоскости, ограниченной гиперплоскостью  $A_1 + \nu_{A_1}^\perp$  и не содержащей  $\mathbb{D}$  (см. рис. 3.5.1). Следовательно, невозможна ситуация  $(A_2 - A_1) \cdot \nu \geq 0$  поскольку  $A_2 \in D$ , что завершает доказательство.  $\square$

Для линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  произвольной размерности, и  $\varepsilon \geq 0$  мы определим

$$V_\varepsilon(\Pi) := \{z \in \mathbb{R}^n : (\widehat{(0, z)}, \Pi) \leq \varepsilon\} \cup \{0\}.$$

Нам также потребуется следующее утверждение.

**Лемма 3.5.5.** Пусть  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченное выпуклое множество с непустой внутренней частью  $\text{Int } \mathbb{D}$ , и  $0 \in \text{Int } \mathbb{D}$ . Тогда найдутся  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\bar{\xi} \in (0, \pi/2)$  (зависящие только от  $\mathbb{D}$ ), такие что для каждого линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  произвольной размерности и каждого  $x \in V_{\varepsilon_0}(\Pi) \cap \partial\mathbb{D}$  каждая внешняя нормаль  $\nu_x$  к  $\mathbb{D}$  в  $x$  удовлетворяет условию  $\widehat{(\nu_x, \Pi)} < \bar{\xi}$ .

*Доказательство.* Если утверждение неверно, то существует последовательность линейных подпространств  $\{\Pi_k\}$ , и точек  $\{x_k\} \subset \partial\mathbb{D}$ , таких что  $\lim_k \widehat{(\nu_{x_k}, \Pi_k)} = \pi/2$ . Переходя к подпоследовательности (без нумерации), мы можем считать, что  $\Pi_k \rightarrow \Pi$  в смысле Хаусдорфа (для некоторого линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ),  $x_k \rightarrow x \in \partial\mathbb{D}$ ,  $\nu_{x_k} \rightarrow \nu$  (для некоторого  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ) и опорные гиперплоскости  $x_k + (\nu_{x_k})^\perp$  к  $\mathbb{D}$  в  $x_k$ , ортогональные к  $\nu_{x_k}$ , сходятся к гиперплоскости  $x + \nu^\perp$ , которая должна быть опорной гиперплоскостью к  $\mathbb{D}$  в  $x$  (как предел опорных

гиперплоскостей) при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку тогда  $\widehat{(\nu, \Pi)} = \pi/2$ , выполняется  $\Pi \subset \nu^\perp$ , и отсюда  $0 \in \nu^\perp$ , то есть  $0 \in \partial\mathbb{D}$ , что противоречит предположению  $0 \in \text{Int } \mathbb{D}$ .  $\square$

Мы применяем лемму 3.5.5 к  $\mathbb{D} := \mathbb{B}$  (замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$ ), и находим  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\bar{\xi}$ , зависящие только от  $\mathbb{B}$  (и значит от  $\|\cdot\|$ ), такой что для каждого линейного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  произвольной размерности и для каждого  $x \in V_{\varepsilon_0}(\Pi) \cap \partial\mathbb{D}$  каждая внешняя нормаль  $\nu_x$  к  $\mathbb{B}$  в  $x$  удовлетворяет  $\widehat{(\nu_x, \Pi)} < \bar{\xi} < \pi/2$ . Отсюда, обозначив

$$\mathbb{A}_\varepsilon(\Pi) := \{i \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{T}_i \cap V_\varepsilon(\Pi) \neq \emptyset\},$$

получаем, что  $\widehat{(\nu^i, \Pi)} < \bar{\xi} + \delta$  для всех  $i \in \mathbb{A}_{\varepsilon_0}(\Pi)$ . Отсюда найдется  $\bar{\delta} > 0$ , зависящее только от  $\bar{\xi}$  (то есть только от  $\|\cdot\|$ ) такое что  $\widehat{(\nu^i, \Pi)} < \xi$  для всех  $i \in \mathbb{A}_{\varepsilon_0}(\Pi)$  и для некоторого  $\xi \in (0, \pi/2)$ , которые все еще зависят только от  $\|\cdot\|$ , когда  $\delta < \bar{\delta}$  (например, можно выбрать  $\xi := \bar{\xi}/2 + \pi/4$  и  $\bar{\delta} := \pi/4 - \bar{\xi}/2$ ). Следующее обозначение будет центральным для нашей индукционной конструкции.

**Определение 3.5.6.** Мы будем называть (упорядоченный)  $(n-i+1)$ -набор множеств  $(\mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$ , с  $\alpha_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j = i, \dots, n$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  допустимым, если для всех  $j = i+1, \dots, n$  выполняется

$$\alpha_{j-1} \in \mathbb{A}_{\varepsilon_0}(\Pi^{j-1}), \quad \text{где } \Pi^{j-1} := (\text{span} \{\nu^{\alpha_k}\}_{k=j}^n)^\perp,$$

или, что то же самое,  $\mathbb{T}_{\alpha_{j-1}} \cap V_{\varepsilon_0}(\Pi^{j-1}) \neq \emptyset$ , то есть,

$$\widehat{(\nu^{\alpha_{j-1}}, \Pi^{j-1})} < \xi \quad \text{для всех } j = i+1, \dots, n. \quad (3.6)$$

В случае  $i = n$  упорядоченный  $(n-i+1)$ -набор  $(\mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  сводится к точке, которая по определению всегда рассматривается как допустимый набор.

Каждый допустимый упорядоченный  $n$ -набор множеств  $(\mathbb{P}_{\alpha_1}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  естественным образом определяет (не обязательно ортогональную) координатную систему (разную для разных допустимых  $n$ -наборов): на самом деле, оси  $x^j$ ,  $j = 2, \dots, n$ , будут направлены вдоль векторов  $\nu^{\alpha_j}$ , определенных множествами  $\mathbb{P}_{\alpha_j}$ , в то время как ось  $x^1$  выбирается ортогональной ко всем  $x^j$  при  $j = 2, \dots, n$ .

Идея доказательства теоремы 3.3.1 следующая: вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  разбивается на подвектора в соответствии с допустимыми упорядоченными  $n$ -наборами  $(\mathbb{P}_{\alpha_1}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$ , так что полная вариация каждого подвектора может быть вычислена в координатной системе, определенной соответствующим  $n$ -набором, и полная вариация целого вектора тогда будет определена суммой вариаций выбранных подвекторов.

И, наконец, нам потребуется следующая несложная геометрическая лемма.

**Лемма 3.5.7.** Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерное линейное подпространство,  $\{\nu_i\}_{i=1}^k \subset \Pi$  такие что

$$\left( x^i, \widehat{(\text{span}\{\nu_j\}_{j=i+1}^k)}^\perp \right) \leq \zeta, \quad i = 1, \dots, k-1 \quad (3.7)$$

для некоторого  $\zeta \in (0, \pi/2)$ , где  $x^i := \text{span}\{\nu_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Тогда найдется константа  $C = C_k(\zeta) > 0$  такая что для каждой  $A \in \mathbb{R}^n$  выполняется

$$|p_\Pi(A)| \leq C \sum_{i=1}^k |p_{x^i}(A)|.$$

*Доказательство.* Сначала заметим, что в соответствии с условием (3.7) на  $\{\nu_j\}$ , эти вектора являются линейно независимыми и отсюда  $\Pi = \text{span}\{\nu_i\}_{i=1}^k$ . Затем заметим, что утверждение достаточно доказать для  $A \in \Pi$ , в этом случае искомое неравенство сводится к

$$|A| \leq C_k(\zeta) \sum_{i=1}^k |p_{x^i}(A)|. \quad (3.8)$$

Действительно тогда для произвольной  $A \in \mathbb{R}^n$  выполняется оценка

$$|p_\Pi(A)| \leq C_k(\zeta) \sum_{i=1}^k |p_{x^i}(p_\Pi(A))| \leq C_k(\zeta) \sum_{i=1}^k |p_{x^i}(A)|,$$

где последнее неравенство верно ввиду  $|p_{x^i}(p_\Pi(A))| = |p_{x^i}(A)|$ .

Докажем, таким образом, неравенство (3.8) для  $A \in \Pi$ . Для этого мы применим (конечную) индукцию по  $k$ . Утверждение тривиально при  $k = 1$  (с  $C_1(\zeta) := 1$ ). Предположим, что это правда при  $k = m$ . Чтобы доказать утверждение при  $k =$

$m + 1$ , мы обозначим

$$\begin{aligned}\Pi_m &:= (\text{span} \{\nu_j\}_{j=2}^{m+1})^\perp \cap \Pi, \\ \Pi_m^\perp &:= \text{span} \{\nu_j\}_{j=2}^{m+1}.\end{aligned}$$

Заметим, что для  $A \in \Pi$  выполняется тождество

$$\begin{aligned}p_{x^1}(A) &= p_{x^1}(p_{\Pi_m}(A) + p_{\Pi_m^\perp}(A)) = p_{x^1}(p_{\Pi_m}(A)) + p_{x^1}(p_{\Pi_m^\perp}(A)) \\ &= p_{\Pi_m}(A) \cos(\widehat{x^1, \Pi_m}) + p_{\Pi_m^\perp}(A) \sin(\widehat{x^1, \Pi_m}),\end{aligned}\tag{3.9}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}|A| &\leq |p_{\Pi_m}(A)| + |p_{\Pi_m^\perp}(A)| \\ &= \frac{1}{\cos(\widehat{x^1, \Pi_m})} \left( |p_{x^1}(A)| - |p_{\Pi_m^\perp}(A)| \sin(\widehat{x^1, \Pi_m}) \right) + |p_{\Pi_m^\perp}(A)| \quad \text{по (3.9)} \\ &\leq \left( 1 + \text{tg}(\widehat{x^1, \Pi_m}) + \frac{1}{\cos(\widehat{x^1, \Pi_m})} \right) (|p_{x^1}(A)| + |p_{\Pi_m^\perp}(A)|) \\ &\leq \left( 1 + \text{tg} \zeta + \frac{1}{\cos \zeta} \right) (|p_{x^1}(A)| + |p_{\Pi_m^\perp}(A)|), \quad \text{поскольку } (\widehat{x^1, \Pi_m}) \leq \zeta \\ &\leq \left( 1 + \text{tg} \zeta + \frac{1}{\cos \zeta} \right) \left( |p_{x^1}(A)| + C_m(\zeta) \sum_{i=2}^{k+1} |p_{x^i}(A)| \right)\end{aligned}$$

ввиду предположения индукции,

что влечет это утверждение с  $C_{m+1}(\zeta) := \left( 1 + \text{tg} \zeta + \frac{1}{\cos \zeta} \right) (C_m(\zeta) \vee 1)$ .  $\square$

С этого момента мы будем пользоваться обозначением

$$C(\zeta) := \max_{k \in \{1, \dots, n\}} C_k(\zeta),\tag{3.10}$$

где  $C_k(\zeta) > 0$  определяется леммой 3.5.7 (на самом деле, мы можем всегда выбирать  $C_k(\zeta)$ , неубывающими по  $k$ , в этом случае  $C(\zeta) = C_n(\zeta)$ ). Ясно, что для фиксированного  $\zeta$  константа  $C(\zeta)$  зависит только от размерности пространства  $n$ .



### 3.5.2. Предварительная лемма о самосжимающихся ломаных

В дальнейшем мы, без дополнительных оговорок, будем часто использовать следующие несложные наблюдения.

**Замечание 3.5.8.** Если вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся, тогда и подвектор  $(A_{j_1}, \dots, A_{j_k})$  тоже самосжимающийся.

**Замечание 3.5.9.** Если  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся, то

$$|A_j A_m| \leq C |A_1 A_r|$$

для всех  $(j, m) \subset \{1, \dots, r\}$  и для некоторого  $C > 0$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$ . Действительно, свойство самосжимаемости  $(A_1, \dots, A_r)$  влечет  $\{A_j, A_m\} \subset A_r + \lambda \mathbb{B}$ , где  $\mathbb{B}$  — замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$  и  $\lambda = |A_1 A_r|$ , так что  $|A_j A_m| \leq \lambda \text{diam } \mathbb{B}$ , а значит можно выбирать  $C := \text{diam } \mathbb{B}$ .

Нам также потребуется следующая лемма.

**Лемма 3.5.10.** Существует константа  $\varepsilon_1 \in (0, \pi/2)$ , зависящая только от нормы  $\|\cdot\|$ , такая что если  $(A_1, A_2, A_3)$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$ , и  $\angle A_1 A_2 A_3 \leq 2\varepsilon_1$ , то  $|A_2 A_3| \leq 3/4 |A_1 A_2|$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{B}$  как обычно обозначает замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$ . Ввиду леммы 3.5.5 минимальный по всем  $P \in \partial \mathbb{B}$  угол между  $(OP)$  и некоторой опорной гиперплоскостью к  $\mathbb{B}$  в  $P \in \partial \mathbb{B}$  составляет хотя бы  $\pi/2 - \bar{\xi} > 0$ . Для произвольного  $\alpha \in (0, \pi/2 - \bar{\xi})$  обозначим

$$\Delta(\alpha) := \inf\{|PQ| : \{P, Q\} \subset \partial \mathbb{B}, P \neq Q, \angle OPQ \leq \alpha\},$$

см. рис. 3.3(A). Выполняется  $\Delta(\alpha) > 0$ . Действительно, в противном случае существует последовательность  $\{P_\nu, Q_\nu\}_\nu \subset \partial \mathbb{B}$ , такая что  $P_\nu \neq Q_\nu$ ,  $\lim_\nu P_\nu = \lim_\nu Q_\nu = P \subset \partial \mathbb{B}$  и  $\angle OP_\nu Q_\nu \leq \alpha$ . Выберем произвольную опорную гиперплоскость  $\Pi_\nu$  к  $\mathbb{B}$  в  $Q_\nu$ . Не умаляя общности, мы предполагаем существование предела  $\lim_\nu \Pi_\nu = \Pi$ . Тогда  $\Pi$  является опорной гиперплоскостью к  $\mathbb{B}$  в  $P$ . Обозначая

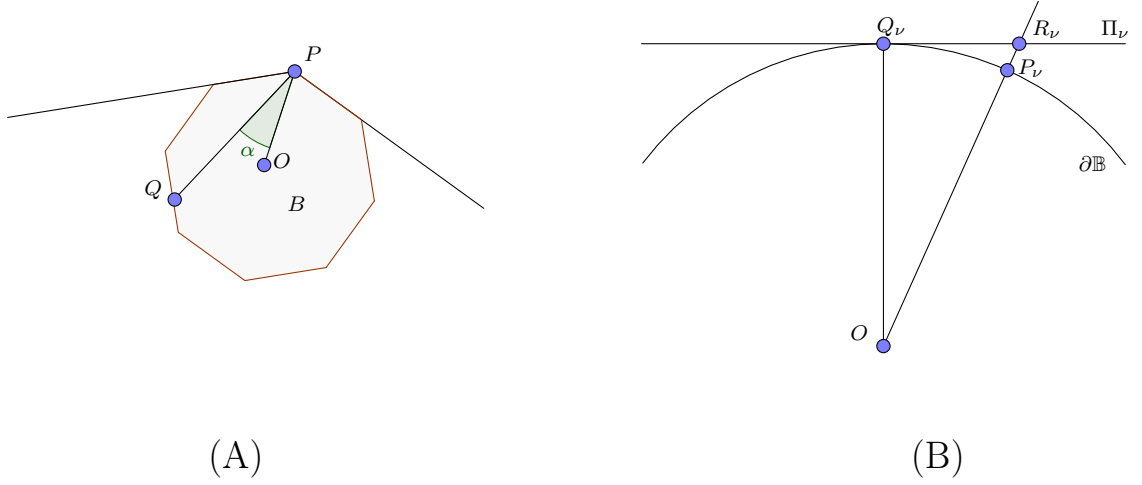


Рис. 3.3: Построения из доказательства леммы 3.5.10. (А): определение  $\Delta(\alpha)$ . (В): Доказательство положительности  $\Delta(\alpha)$ .

$R_\nu := \Pi_\nu \cap (OP_\nu)$ , получаем

$$\begin{aligned} ((\widehat{OP}), \Pi) &= \lim_\nu ((\widehat{OP_\nu}), \Pi_\nu) \leq \lim_\nu \angle OR_\nu Q_\nu \\ &\leq \lim_\nu \angle OP_\nu Q_\nu, \quad \text{поскольку } P_\nu \in [OR_\nu], \\ &\leq \alpha, \end{aligned}$$

см. рис. 3.3(В), что невозможно для  $\alpha \in (0, \pi/2 - \bar{\xi})$ , из-за неравенства  $((\widehat{OP}), \Pi) \geq \pi/2 - \bar{\xi}$ .

Рассмотрим множество  $\mathbb{D}_3 := \{z \in \mathbb{R}^n : \|A_2 - z\| \leq \|A_1 - z\|\}$  (см. рис. 3.4) и заметим, что  $\{A_2, A_3\} \subset \mathbb{D}_3$ . Ввиду леммы 3.7.2 существует  $\bar{\varepsilon} > 0$  такое, что

$$|A_2 C_\alpha| \leq 3/4 |A_1 A_2| \quad \text{когда } \angle A_1 A_2 C_\alpha \leq 2\bar{\varepsilon}, \quad C_\alpha \in M(A_1, A_2), \quad (3.11)$$

где  $M(A_1, A_2)$  обозначает *медиатрису* отрезка  $[A_1 A_2]$  (т.е. множество точек, равноудаленных от концов отрезка). Зафиксируем произвольное  $\alpha \in (0, \pi/2 - \bar{\xi})$  и обозначим  $\varepsilon_1 := \bar{\varepsilon} \wedge \alpha/2$ , тогда  $\Delta(2\varepsilon_1) \geq \Delta(\alpha) > 0$  ввиду определения  $\Delta(\cdot)$ . Положим  $r \geq \|A_2 - A_3\|$ , таким что  $r\Delta(2\varepsilon_1) > |A_1 A_2|$ . Тогда для каждых  $\{P, Q\} \subset \partial(r\mathbb{B} + C)$ , таких что  $C \in \mathbb{R}^n$ ,  $P \neq Q$  и  $\angle CPQ \leq 2\varepsilon_1$  выполняется  $|PQ| > |A_1 A_2|$ . Предположим, что  $\angle A_1 A_2 A_3 \leq 2\varepsilon_1$ . Рассмотрим точку  $C \in [A_2 A_3]$  с  $\|A_2 - C\| = r$ .

Из  $A_2 \in \partial(r\mathbb{B} + C)$  следует, что для точки  $Q \in (A_1A_2) \cap \partial(r\mathbb{B} + C)$ ,  $Q \neq A_2$  и находящейся на прямой  $(A_1A_2)$  по ту же сторону от  $A_2$ , что и  $A_1$ , выполняется  $|A_2Q| > |A_1A_2|$ . Тогда  $A_1 \in r\mathbb{B} + C$ , т.е.  $\|A_1 - C\| < r = \|A_2 - C\|$ , или, другими словами,  $C \in \mathbb{D}_3^c$ . Отсюда найдется точка  $C' \in [A_3, C]$ , такая что  $C' \in M(A_1, A_2)$ , см. рис. 3.4. Тогда

$$|A_2A_3| \leq |A_2C'| \leq 3/4|A_1A_2|,$$

последнее неравенство верно ввиду (3.11). □

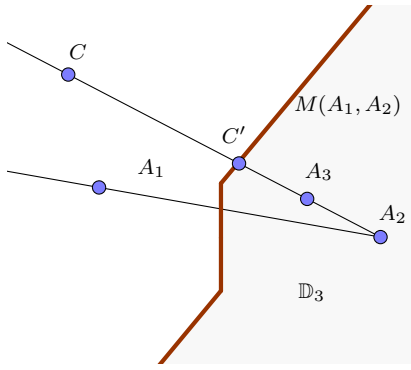


Рис. 3.4: Доказательство утверждения леммы 3.5.10.

**Следствие 3.5.11.** *Предположим, что вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и обладает чередующимися направлениями вдоль некоторой оси  $x = \text{span}\{\nu\}$  для некоторой  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , т.е. конечная последовательность чисел  $\{(A_{k+1} - A_k) \cdot \nu\}_{k=1}^{r-1}$  имеет чередующиеся знаки. Если каждый отрезок  $[A_kA_{k+1}]$ ,  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ , является  $\varepsilon_1$ -горизонтальным относительно  $x$ , где  $\varepsilon_1 > 0$  как в лемме 3.5.10, то*

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq 4|A_1A_2|. \quad (3.12)$$

*Доказательство.* Ввиду неравенства треугольника для  $((\widehat{A_{k-1}A_k}), x)$  и  $((\widehat{A_kA_{k+1}}), x)$  получаем неравенство  $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1} \leq 2\varepsilon_1$ . Отсюда, применяя лемму 3.5.10 к каждой последовательной тройке  $(A_{k-1}, A_k, A_{k+1})$ , получаем, что

$$|A_kA_{k+1}| \leq 3/4|A_{k-1}A_k|, \quad k = 2, \dots, r-1.$$

Отсюда,

$$\ell(A_1, \dots, A_r) = \sum_{k=1}^{r-1} |A_k A_{k+1}| \leq |A_1 A_2| \sum_{k=1}^{r-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \leq 4|A_1 A_2|,$$

что доказывает (3.12). □

### 3.6. Индукционная конструкция

С этого момента мы будем использовать константу  $\varepsilon_0 > 0$ , определенную в лемме 3.5.5 и  $\varepsilon_1 > 0$ , определенную в лемме 3.5.10. Пусть также  $\bar{\delta}$  и  $\xi$  определены как в разделе 3.5.1, константа  $C(\xi)$  определена в (3.10) и положим

$$\delta_0 := \bar{\delta} \wedge \arctg \frac{\sin \varepsilon_0}{8(n-1)C(\xi)} \wedge \arctg \left( \frac{1}{8(n-1)(3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1)C(\xi)} \right).$$

Доказательство теоремы 3.3.1 основывается на следующем утверждении.

**Утверждение 3.6.1.** *Предположим, что  $\delta \in (0, \delta_0)$ . Тогда существует константа  $C > 0$ , зависящая только от  $\|\cdot\|$  и от  $\delta$ , такая что если вектор  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{R}^n$  является самосжимающимся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_n} + A_r$  для некоторого  $\alpha_n \in \{1, \dots, N\}$ , то*

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C|A_1 A_r|, \quad (3.13)$$

с  $C > 0$ , зависящим только от  $\|\cdot\|$ ,  $n$ ,  $\delta$  и  $\xi$ .

**Замечание 3.6.2.** *Заметим, что свойство самосжимаемости и неравенство (3.13) устойчивы относительно растяжений и переносов.*

По модулю этого результата можно легко доказать теорему 3.3.1.

*Доказательство теоремы 3.3.1.* С точностью до растяжений можно считать, что замкнутый единичный шар  $\mathbb{B}$  нормы  $\|\cdot\|$  в  $\mathbb{R}^n$  удовлетворяет  $\min_{x \in \partial \mathbb{B}} |x| \geq 1$ . Мы будем отождествлять теперь  $\mathbb{R}^n$  с подмножеством  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  и записывать каждый элемент  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  как пару  $\tilde{x} = (x', x_{n+1})$ ,  $x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,

так что каждый элемент  $x \in \mathbb{R}^n$  отождествляется с некоторой  $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Снабдим  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  нормой, определенной так, чтобы её замкнутый единичный шар был  $\tilde{\mathbb{B}} := \mathbb{B} \times [-1, 1]$ . Определим разложение этого замкнутого единичного шара  $\tilde{\mathbb{B}}$  следующим образом. Если семейство множеств  $\{\mathbb{T}_j\}_{j=1}^N$  является дизъюнктным покрытием  $\partial\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ , определенным в утверждении 3.5.1, мы определяем дизъюнктное покрытие  $\partial\tilde{\mathbb{B}}$  семейством, состоящим из множеств  $\tilde{\mathbb{T}}_j := \mathbb{T}_j \times (-1, 1)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , и двух дополнительных множеств  $\tilde{\mathbb{T}}_{N+1} := \mathbb{B} \times \{1\}$  и  $\tilde{\mathbb{T}}_{N+2} := \mathbb{B} \times \{-1\}$ . Несложно заметить, что это покрытие удовлетворяет свойству, определенному в утверждении 3.5.1. Тогда мы полагаем  $\tilde{\mathbb{P}}_i := \cup_{t \in [0, 1]} t\mathbb{T}_i$ . Теперь рассмотрим  $(A_1, \dots, A_r)$  как подмножество  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ввиду замечания 3.6.2, не умаляя общности мы можем сжать все  $A_j$ , так что  $|A_1 A_r| = 1$ , и затем сдвинуть их на фиксированный вектор так, чтобы  $A_r = (0, 1)$  и все  $A_j$  принадлежали гиперплоскости  $\{x_{n+1} = 1\}$ . Ясно, что вектор  $(A_1, \dots, A_r, 0)$  — самосжимающийся относительно введенной нормы в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и  $(A_1, \dots, A_r, 0) \in \tilde{\mathbb{P}}_{N+1}$  по построению. Применяя утверждение 3.6.1 с  $(A_1, \dots, A_r, 0)$  вместо  $(A_1, \dots, A_r)$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  (с введенной нормой) вместо  $\mathbb{R}^n$  (с исходной нормой  $\|\cdot\|$ ),  $n+1$  вместо  $n$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}_j$  вместо  $\mathbb{P}_j$  и  $\alpha_{n+1} := N+1$ , мы получаем

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq \ell(A_1, \dots, A_r, 0) \leq C|A_1| \leq C\sqrt{2} = C\sqrt{2}|A_1 A_r|$$

с  $C > 0$ , как и утверждалось.  $\square$

Доказательство утверждения 3.6.1 является немедленным применением следующего индукционного утверждения с  $i := n$ .

**Утверждение 3.6.3.** *Предположим, что  $\delta \in (0, \delta_0)$ . Тогда для каждого  $i \in \{1, \dots, n\}$  существует константа  $C_i > 0$ , зависящая только от  $\|\cdot\|$ ,  $n$ ,  $\delta$  и  $\xi$ , такая что для любого допустимого  $(n-i+1)$ -набора  $(\mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  если вектор  $(A_j)_{j=1}^{r+n-i} \subset \mathbb{R}^n$  является самосжимающимся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для всех  $j = i, \dots, n$ , то*

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C_i |A_1 A_r|.$$

Доказательство утверждения 3.6.3 — (конечная) индукция по  $i \in \{1, \dots, n\}$  с

базой индукции, доказанной в лемме 3.6.4, и индукционным переходом, доказанным в лемме 3.6.13, которую приведем позже.

### 3.6.1. База индукции

Мы доказываем следующее утверждение, которое будет служить базой индукции.

**Лемма 3.6.4.** *Пусть*

$$\delta \in \left( 0, \bar{\delta} \wedge \arctg \left( \frac{1}{8(n-1)(3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1)C(\xi)} \right) \right),$$

где  $\varepsilon_1 > 0$  определено в лемме 3.5.10 (в частности, когда  $\delta \in (0, \delta_0)$ ), и  $n$ -набор  $(\mathbb{P}_{\alpha_1}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  с  $\alpha_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  допустим. Пусть вектор  $(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+n-1}) \subset \mathbb{R}^n$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для всех  $j = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C_1 |A_1 A_r| \quad (3.14)$$

для некоторой константы  $C_1 > 0$ , зависящей только от нормы  $\|\cdot\|$ ,  $n$ ,  $\delta$  и  $\xi$ .

Остаток раздела будет посвящен доказательству леммы 3.6.4. С этой целью мы будем рассматривать координатную систему с началом координат в  $A_r$  и оси  $x^j$  направлены вдоль векторов  $\nu^{\alpha_j}$ , определенных множествами  $\mathbb{P}_{\alpha_j}$  с  $\alpha_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j = 2, \dots, n$ , и  $x^1 := (\operatorname{span} \{\nu^{\alpha_j}\}_{j=2}^n)^\perp$  (со случайно выбранным направлением). Для краткости мы определяем  $A_i^j := p_{x^j}(A_i)$ .

**Общая лемма.**

Нам потребуется пара утверждений, которые будут полезны одновременно и для базы индукции и для индукционного перехода.

**Лемма 3.6.5.** *Предположим, что  $\delta \in (0, \bar{\delta})$ , и что для некоторого  $i \in \{2, \dots, n\}$   $(n - i + 2)$ -набор множеств  $(\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  — допустимый. Тогда для каждого*

вектора  $(A_1, \dots, A_r)$  выполняется неравенство

$$\ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}(A_1, \dots, A_r) \leq C(\xi) \sum_{j=i}^n \ell_{x_j}(A_1, \dots, A_r),$$

где, как обычно,  $x_j = \text{span} \{\nu^{\alpha_j}\}$ ,  $j = i, \dots, n$ , и  $\Pi^{i-1} = (\text{span} \{\nu^{\alpha_j}\}_{j=i}^n)^\perp$ .

*Доказательство.* Применяя лемму 3.5.7 с  $\Pi := (\Pi^{i-1})^\perp$ ,  $k := n - i + 1$ ,  $\nu_j := \nu^{\alpha_j}$ ,  $j = i, \dots, n$  и  $\zeta := \xi$  (условия леммы 3.5.7 выполняются ввиду (3.6), поскольку  $\delta < \bar{\delta}$ ), мы получаем

$$|p_{(\Pi^{i-1})^\perp}(A)| \leq C(\xi) \sum_{j=i}^n |p_{x_j}(A)|$$

для каждого  $A \in \mathbb{R}^n$ , и, подставляя в последнее неравенство  $A := A_{m+1} - A_m$ ,  $m = 1, \dots, r - 1$ , и суммируя по  $m$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Лемма 3.6.6.** Пусть вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  такой, что для некоторого  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , обозначая  $x_k := (A_k - A_r) \cdot \nu$ , получаем  $x_k < x_{k-1}$ , если  $((A_{k-1} \widehat{A_k}), \nu^\perp) > \delta$ . Тогда

$$\ell_x(A_1, \dots, A_r) \leq |A_1 A_r| + 2\ell_{x^\perp}(A_1, \dots, A_r) \text{tg } \delta, \quad (3.15)$$

где  $x = \text{span} \{\nu\}$ .

*Доказательство.* Для  $j \in \{2, \dots, n\}$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} x_1 - x_r &= - \sum_{k=2}^r (x_k - x_{k-1}) = - \sum_{k \in \{2, \dots, r\}, x_k > x_{k-1}} |x_k - x_{k-1}| + \sum_{k \in \{2, \dots, r\}, x_k < x_{k-1}} |x_k - x_{k-1}| \\ &= -\ell_x(A_1, \dots, A_r) + 2 \sum_{k \in \{2, \dots, r\}, x_k > x_{k-1}} |x_k - x_{k-1}|, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \ell_x(A_1, \dots, A_r) &\leq |x_r - x_1| + 2 \sum_{k \in \{2, \dots, r\}, x_k > x_{k-1}} |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq |x_r - x_1| + 2 \sum_{k \in \{2, \dots, r\}, x_k > x_{k-1}} |p_{x^\perp}(A_k) - p_{x^\perp}(A_{k-1})| \text{tg } \delta. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \ell_x(A_1, \dots, A_r) &\leq |x_r - x_1| + 2\ell_{x^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta \\ &\leq |A_1 A_r| + 2\ell_{x^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta, \end{aligned}$$

что доказывает требуемое утверждение.  $\square$

Также нам потребуется следующее несложное вычисление.

**Лемма 3.6.7.** *Если для некоторого  $i \in \{1, \dots, n\}$  выполняется*

$$L_j \leq L_0 + C \sum_{k=i}^n L_k, \quad j = i, \dots, n, \quad (3.16)$$

с некоторой  $C \in (0, (n - i + 1)^{-1}/2)$ , тогда  $\sum_{j=i}^n L_j \leq 2(n - i + 1)L_0$  и  $L_j \leq 2L_0$  для всех  $j = i, \dots, n$ .

*Доказательство.* Суммируя (3.16) по  $j = i, \dots, n$ , мы получаем

$$\sum_{j=i}^n L_j \leq (n - i + 1)L_0 + (n - i + 1)C \sum_{j=i}^n L_j,$$

так что ввиду  $(n - i + 1)C \leq 1/2$  мы получаем

$$\sum_{j=i}^n L_j \leq 2(n - i + 1)L_0,$$

и отсюда требуемое утверждение доказывается с помощью подстановки последнего соотношения в (3.16).  $\square$

**Оценка вариации вектора  $(A_1, \dots, A_r)$  вдоль каждой  $x^j$ ,  $j = 2, \dots, n$ .**

**Лемма 3.6.8.** *Предположим, что*

$$\delta \in \left(0, \bar{\delta} \wedge \operatorname{arctg} \frac{1}{4(n-1)C(\xi)}\right) \quad (3.17)$$



(в частности, если  $\delta$  такое, как в лемме 3.6.4),  $n$ -набор  $(\mathbb{P}_{\alpha_1}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  с  $\alpha_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и вектор  $(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+n-1}) \subset \mathbb{R}^n$  удовлетворяют условиям леммы 3.6.4. Тогда

$$\ell_{x^j}(A_1, \dots, A_r) \leq 2|A_1 A_r| + 4\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta, \quad j = 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

*Доказательство.* Заметим для начала, что в частном случае, в котором  $\delta$  берется из леммы 3.6.4, тривиальное неравенство  $3 \cos \varepsilon_1 + 8 \geq (\sin \varepsilon_1)/2$  (с  $\varepsilon_1 > 0$ , определенным в лемме 3.5.10) влечет  $3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1 \geq 1/2$ , и тогда  $\delta$  удовлетворяет (3.17).

Для случайного  $\delta$ , удовлетворяющего (3.17), поскольку  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для  $j \in \{2, \dots, n\}$  как мы потребовали в лемме 3.6.4, тогда  $(A_1, \dots, A_r)$  удовлетворяет условиям леммы 3.6.6 (с  $\nu^{\alpha_j}$  вместо  $\nu$ ) ввиду леммы 3.5.3, и отсюда ввиду леммы 3.6.6 выполняется

$$\begin{aligned} \ell_{x^j}(A_1, \dots, A_r) &\leq |A_1 A_r| + 2\ell_{(x^j)^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta \leq |A_1 A_r| + 2\ell(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta \\ &\leq |A_1 A_r| + 2\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta + 2\ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ввиду леммы 3.6.5 с  $i := 2$ , получаем

$$\ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) \leq C(\xi) \sum_{k=2}^n \ell_{x_k}(A_1, \dots, A_r).$$

Отсюда (3.19) превращается в

$$\ell_{x^j}(A_1, \dots, A_r) \leq |A_1 A_r| + 2\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta + 2 \operatorname{tg} \delta C(\xi) \sum_{k=2}^n \ell_{x_k}(A_1, \dots, A_r). \quad (3.20)$$

Теперь мы можем применить лемму 3.6.7 с

$$\begin{aligned} L_0 &:= |A_1 A_r| + 2\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{tg} \delta, \\ L_j &:= \ell_{x^j}(A_1, \dots, A_r), \end{aligned}$$

$i := 2$  и  $C := 2 \operatorname{tg} \delta C(\xi)$  (напомним, что  $\operatorname{tg} \delta < 1/(4(n-1)C(\xi))$ ) и получить требуемое утверждение.  $\square$

### Оценка вариации $(A_1, \dots, A_r)$ вдоль $x^1$ .

В этом подразделе мы для краткости будем использовать обозначение  $A_j^\perp := p_{(x^1)^\perp}(A_j)$ .

**Лемма 3.6.9.** *Предположим, что вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$ . Тогда для произвольной прямой  $x^1$  выполняется*

$$\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \leq C_1 \ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) + C_2 |A_1 A_r|, \quad (3.21)$$

с некоторыми положительными константами  $C_1$  и  $C_2$ , зависящими только от нормы  $\|\cdot\|$ , и, в частности, можно взять  $C_1 := 3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1 > 0$  определено в лемме 3.5.10, и  $C_2 := \operatorname{diam} \mathbb{B}$ , где  $\mathbb{B}$  — замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon_1 > 0$  такое, как в лемме 3.5.10. Начиная с последнего отрезка  $[A_{k-1}A_k]$   $\varepsilon_1$ -горизонтального относительно  $x^1$  (т.е. с максимальным  $k \in \{2, \dots, r\}$  таким, что  $[A_{k-1}A_k]$  — горизонтален) мы ищем минимальное  $q \in \{1, k-1\}$ , такое что  $(A_q, A_{q+1}, \dots, A_k)$  удовлетворяет условию леммы 3.6.11 (с  $x^1$  вместо  $x$  и  $\varepsilon := \varepsilon_1$ ). После чего мы повторяем эту операцию с  $q-1$  вместо  $r$ , и продолжаем таким способом при помощи обратной индукции настолько далеко, насколько возможно. Таким способом мы находим конечную последовательность дизъюнктивных интервалов  $\{q_i, q_i+1, \dots, k_i\}_{i=1}^{\nu}$  в  $\{1, \dots, r\}$ , таких что  $(A_{q_i}, A_{q_i+1}, \dots, A_{k_i})$  удовлетворяет условиям леммы 3.6.11 (снова с  $x^1$  вместо  $x$  и  $\varepsilon := \varepsilon_1$ ), в то время как подвектор

$$(A_j)_{j \in \Lambda} \subset (A_1, \dots, A_r),$$

полученный из  $(A_1, \dots, A_r)$  при помощи удаления точек  $A_j$  с  $j \in \cup_{i=1}^{\nu} \{q_i+1, \dots, k_i-1\}$ , удовлетворяет условиям леммы 3.6.12. Тогда, переобозначая для

удобства  $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) := (A_j)_{j \in \Lambda}$ , получаем

$$\begin{aligned}
\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) &= \ell_{x^1}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) - \sum_{i=1}^{\nu} |A_{q_i}^1 A_{k_i}^1| + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_{x^1} \left( (A_j)_{j=q_i}^{k_i} \right) \\
&\leq \ell_{x^1}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) \\
&\quad + 2 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{\nu} \ell_{(x^1)^\perp} \left( (A_j)_{j=q_i}^{k_i} \right) \quad \text{ввиду леммы 3.6.11 с } x^1 \text{ вместо } x \\
&\leq C \ell_{(x^1)^\perp}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) + |\tilde{A}_1 \tilde{A}_2| \\
&\quad + 2 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{\nu} \ell_{(x^1)^\perp} \left( (A_j)_{j=q_i}^{k_i} \right) \quad \text{ввиду леммы 3.6.12} \\
&\leq C \ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) + |\tilde{A}_1 \tilde{A}_2| + 2 \ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{ctg} \varepsilon_1 \\
&= (C + 2 \operatorname{ctg} \varepsilon_1) \ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) + |\tilde{A}_1 \tilde{A}_2|,
\end{aligned}$$

что завершает доказательство (с точностью до определения  $C_1 := C + 2 \operatorname{ctg} \varepsilon_1$ ,  $C_2 := \operatorname{diam} \mathbb{B}$ , где  $\mathbb{B}$  является замкнутым единичным шаром нормы  $\|\cdot\|$ , и ввиду леммы 3.6.12 можно взять  $C := \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1$ ), поскольку  $|\tilde{A}_1 \tilde{A}_2| \leq C_2 |A_1 A_r|$  ввиду замечания 3.5.9 (поскольку  $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) \subset (A_1, \dots, A_r)$ ).  $\square$

**Следствие 3.6.10.** *В условиях леммы 3.6.4 выполняется*

$$\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \leq C_1 \sum_{i=2}^n \ell_{x^i}(A_1, \dots, A_r) + C_2 |A_1 A_r|, \quad (3.22)$$

с некоторыми положительными константами  $C_1$ , зависящей только от  $\|\cdot\|$ ,  $n$  и  $\xi$ , и  $C_2$ , зависящей только от  $\|\cdot\|$ . В частности, можно положить  $C_1 := (3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8/\sin \varepsilon_1) C(\xi)$ , где  $\varepsilon_1 > 0$  определено в лемме 3.5.10, и  $C_2 := \operatorname{diam} \mathbb{B}$ ,  $\mathbb{B}$  обозначает замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$ .

*Доказательство.* Ввиду леммы 3.6.5 с  $i := 2$ , выполняется

$$\ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) \leq C(\xi) \sum_{k=2}^n \ell_{x_k}(A_1, \dots, A_r).$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3.21) из леммы 3.6.9, получаем требуемый результат.  $\square$

Следующая лемма используется в доказательстве вышеупомянутой леммы 3.6.9.

**Лемма 3.6.11.** Пусть  $(A_1, \dots, A_r)$  такой, что

(A) каждый отрезок  $[A_i A_r]$ ,  $i = 1, \dots, r - 1$ , является  $\varepsilon$ -горизонтальным относительно оси  $x$ , проходящей через  $A_r$ , параллельной и сонаправленной с  $\nu$ .

(B) каждый отрезок  $[A_k A_{k+1}]$ ,  $k \in \{1, \dots, r - 1\}$ , который  $\varepsilon$ -горизонтален относительно  $x$ , имеет проекцию на  $x$  в том же направлении, что и  $[A_{r-1} A_r]$ , т.е. обозначая  $x_k := (A_k - A_r) \cdot \nu$ , получим

$$(x_{k+1} - x_k)(x_r - x_{r-1}) \geq 0.$$

Тогда  $[A_1 A_r]$  имеет проекцию на  $x$  в том же направлении, что и  $[A_{r-1} A_r]$ , т.е.

$$(x_r - x_1)(x_r - x_{r-1}) \geq 0, \quad (3.23)$$

и

$$\ell_x(A_1, \dots, A_r) \leq |x_r - x_1| + 2\ell_{x^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{ctg} \varepsilon. \quad (3.24)$$

Полезно отметить, что вышеупомянутая лемма 3.6.11 не требует, чтобы вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  был самосжимающимся.

*Доказательство.* Сначала мы покажем, что для каждого  $k \in \{1, \dots, r - 1\}$ , отрезок  $[A_k A_r]$  имеет проекцию на  $x$  в том же направлении, что и  $[A_{r-1} A_r]$ , т.е.

$$(x_r - x_k)(x_r - x_{r-1}) \geq 0, \quad (3.25)$$

что, в частности, влечет (3.23). Отношение (3.25) доказывается с помощью обратной индукции по  $k$ . Действительно, база  $k = r - 1$  выполняется автоматически, поскольку индукционный шаг доказывается от противного следующим образом. Предположим, что (3.25) выполняется для некоторого  $k = j$ , где  $j \in \{2, \dots, r - 1\}$ ,

но не выполняется для  $k = j - 1$ . Ввиду условия (В) это возможно только когда  $[A_{j-1}A_j]$   $\varepsilon$ -вертикален относительно оси  $x$ . Обозначим для краткости  $a := A_r - A_{j-1}$  и  $b := A_j - A_r$ , тогда  $a$  и  $b$  имеют одинаковое направление  $x$ , т.е.  $(a \cdot \nu)(b \cdot \nu) > 0$  и  $\widehat{(a, \nu')} \leq \varepsilon$ ,  $\widehat{(b, \nu')} \leq \varepsilon$  с  $\nu' = \nu$  или  $\nu' = -\nu$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \cos((\widehat{A_{j-1}A_j}), x) &\geq \cos(\widehat{(a+b, \nu')}) = \frac{\cos(\widehat{(a, \nu')})|a| + \cos(\widehat{(b, \nu')})|b|}{|a+b|} \\ &\geq \cos \varepsilon \frac{|a| + |b|}{|a+b|} \geq \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

так что условие  $(\widehat{(A_{j-1}A_j)}, x) \leq \varepsilon$  противоречит  $\varepsilon$ -вертикальности  $[A_{j-1}A_j]$  относительно оси  $x$ , что завершает доказательство (3.25).

Чтобы доказать (3.24), заметим, что

$$x_r - x_1 = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ горизонтален}}} (x_{i+1} - x_i) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ вертикален}}} (x_{i+1} - x_i),$$

так что ввиду (В), выполняется

$$\begin{aligned} |x_r - x_1| &\geq \left| \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ горизонтален}}} (x_{i+1} - x_i) \right| - \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ вертикален}}} |x_{i+1} - x_i| \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ горизонтален}}} |x_{i+1} - x_i| - \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ вертикален}}} |x_{i+1} - x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} |x_{i+1} - x_i| - 2 \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ вертикален}}} |x_{i+1} - x_i| \\ &\geq \sum_{i=1}^{r-1} |x_{i+1} - x_i| - 2 \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r-1\} \\ [A_i A_{i+1}] \text{ вертикален}}} |p_{x^\perp}(A_{i+1} - A_i)| \operatorname{ctg} \varepsilon \\ &\geq \ell_x(A_1, \dots, A_r) - 2\ell_{x^\perp}(A_1, \dots, A_r) \operatorname{ctg} \varepsilon, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

**Лемма 3.6.12.** *Предположим, что вектор  $(A_1, \dots, A_r)$  – самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$ . Пусть также  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ , где  $\varepsilon_1$  определено в лемме 3.5.10, и для каждого отрезка  $[A_k A_{k+1}]$  с  $k = 2, \dots, r-1$  который  $\varepsilon$ -горизонтален относительно оси  $x^1$ , предыдущий отрезок  $[A_{k-1} A_k]$  либо тоже  $\varepsilon$ -горизонтален относительно оси  $x^1$  и его проекция на  $x^1$  направлена противоположным образом относительно  $[A_k A_{k+1}]$ , т.е.*

$$(x_{k+1}^1 - x_k^1)(x_k^1 - x_{k-1}^1) < 0,$$

или  $\varepsilon$ -вертикален относительно оси  $x^1$ , и тогда  $[A_{k-1} A_{k+1}]$  тоже. Тогда

$$\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \leq C \ell_{(x^1)^\perp}(A_1, \dots, A_r) + |A_1 A_2|, \quad (3.26)$$

с некоторой положительной константой  $C$ , зависящей только от  $\varepsilon$  (и, в частности, можно брать  $C := \operatorname{ctg} \varepsilon + 8/\sin \varepsilon$ ).

*Доказательство.* Будем обозначать за  $H$  (соотв.,  $V$ ) множество подвекторов  $(A_{q_k}, A_{q_k+1}, \dots, A_{q_{k+1}}) \subset (A_1, \dots, A_r)$  такое, что каждый отрезок  $[A_i A_{i+1}]$ ,  $i = q_k, \dots, q_{k+1} - 1$   $\varepsilon$ -горизонтален (соотв.,  $\varepsilon$ -вертикален) относительно оси  $x^1$  и либо  $q_k = 1$ , либо предыдущий отрезок  $[A_{q_k-1} A_{q_k}]$   $\varepsilon$ -вертикален (соотв.  $\varepsilon$ -горизонтален) относительно оси  $x^1$ . Рассмотрим разбиение  $1 = q_1 < q_2 < \dots < q_\sigma = r$  множества  $\{1, \dots, r\}$ , такое что каждый подвектор  $(A_{q_k}, A_{q_k+1}, \dots, A_{q_{k+1}})$ ,  $k = 1, \dots, \sigma$ , принадлежит или  $H$ , или  $V$ .

Для  $(A_{q_k}, A_{q_k+1}, \dots, A_{q_{k+1}}) \in H$ , ввиду предположения доказываемого утверждения, отрезки ломаной имеют чередующиеся направления относительно оси  $x^1$  и отсюда ввиду следствия 3.5.11 получаем, что

$$\ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) \leq \ell \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) \leq 4|A_{q_k} A_{q_{k+1}}|.$$

Для  $(A_{q_k}, A_{q_k+1}, \dots, A_{q_{k+1}}) \in V$ , мы оцениваем

$$\ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) = \sum_{j=q_k}^{q_{k+1}-1} |A_j^1 A_{j+1}^1| \leq \sum_{j=q_k}^{q_{k+1}-1} |A_j^\perp A_{j+1}^\perp| \operatorname{ctg} \varepsilon = \ell_{(x^1)^\perp} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) \operatorname{ctg} \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) &= \sum_{k=1}^{\sigma-1} \ell_{x^1}(A_{q_k}, \dots, A_{q_{k+1}}) \\
&= \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in V}} \ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in H}} \ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) \\
&\leq \text{ctg } \varepsilon \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in V}} \ell_{(x^1)^\perp} \left( \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \right) + 4 \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in H}} |A_{q_k} A_{q_{k+1}}|.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для каждого  $k \in \{1, \dots, \sigma - 1\}$ , такого что  $(A_{q_k}, \dots, A_{q_{k+1}}) \in H$ , кроме  $k = 1$ , мы оцениваем

$$\begin{aligned}
|A_{q_k} A_{q_{k+1}}| &\leq |A_{q_{k-1}} A_{q_k}| + |A_{q_{k-1}} A_{q_{k+1}}| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon} (|A_{q_{k-1}}^\perp A_{q_k}^\perp| + |A_{q_{k-1}}^\perp A_{q_{k+1}}^\perp|) \\
&\leq \frac{1}{\sin \varepsilon} (2|A_{q_{k-1}}^\perp A_{q_k}^\perp| + |A_{q_k}^\perp A_{q_{k+1}}^\perp|) \leq \frac{2}{\sin \varepsilon} (|A_{q_{k-1}}^\perp A_{q_k}^\perp| + |A_{q_k}^\perp A_{q_{k+1}}^\perp|),
\end{aligned}$$

и если  $(A_{q_1}, \dots, A_{q_2}) = (A_1, \dots, A_{q_2}) \in H$ , то тогда

$$|A_{q_1} A_{q_{1+1}}| = |A_1 A_2|.$$

Подставляя это в (3.27), получаем

$$\begin{aligned}
\ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=1}^r \right) &\leq \operatorname{ctg} \varepsilon \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in V}} \sum_{j=q_k}^{q_{k+1}-1} |A_{j+1}^\perp A_j^\perp| + \\
&\quad \frac{8}{\sin \varepsilon} \sum_{\substack{k \in \{2, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in H}} (|A_{q_k-1}^\perp A_{q_k}^\perp| + |A_{q_k}^\perp A_{q_k+1}^\perp|) + |A_1 A_2| \\
&\leq \left( \operatorname{ctg} \varepsilon + \frac{8}{\sin \varepsilon} \right) \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in V}} \sum_{j=q_k}^{q_{k+1}-1} |A_{j+1}^\perp A_j^\perp| + \\
&\quad \frac{8}{\sin \varepsilon} \sum_{\substack{k \in \{2, \dots, \sigma-1\}, \\ \{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in H}} |A_{q_k}^\perp A_{q_k+1}^\perp| + |A_1 A_2|,
\end{aligned}$$

поскольку  $[A_{q_k-1} A_{q_k}]$   $\varepsilon$ -вертикален относительно оси  $x^1$  для  $\{A_j\}_{j=q_k}^{q_{k+1}} \in H$ . Отсюда

$$\ell_{x^1} \left( \{A_j\}_{j=1}^r \right) \leq \left( \operatorname{ctg} \varepsilon + \frac{8}{\sin \varepsilon} \right) \ell_{(x^1)^\perp} (A_1, \dots, A_r) + |A_1 A_2|,$$

как и утверждалось, что завершает доказательство.  $\square$

**Оценка**  $\ell(A_1, \dots, A_r)$ .

Наконец мы готовы доказать лемму 3.6.4, посчитав оценку на полную вариацию  $(A_1, \dots, A_r)$ .

*Доказательство леммы 3.6.4.* Подставив (3.22) (следствие 3.6.10) в (3.18) (лемма 3.6.8), мы получим

$$\ell_{x^j} (A_1, \dots, A_r) \leq (2 + 4C_2 \operatorname{tg} \delta) |A_1 A_r| + 4C_1 \operatorname{tg} \delta \sum_{i=2}^n \ell_{x^i} (A_1, \dots, A_r), \quad j = 2, \dots, r,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  как в следствии 3.6.10, т.е.  $C_1 := (3 \operatorname{ctg} \varepsilon_1 + 8 / \sin \varepsilon_1) C(\xi)$  и  $C_2 := \operatorname{diam} \mathbb{B}$ , где  $\mathbb{B}$  — замкнутый единичный шар нормы  $\|\cdot\|$ . Мы можем применить лемму 3.6.7



с

$$L_0 := (2 + 4C_2 \operatorname{tg} \delta) |A_1 A_r|,$$

$$L_j := \ell_{x_j}(A_1, \dots, A_r),$$

$i := 2$  и  $C := 4C_1 \operatorname{tg} \delta$  (напомним, что  $\operatorname{tg} \delta < 1/(8(n-1)C_1)$  в условиях доказываемого утверждения), чтобы получить

$$\ell_{x^j}(A_1, \dots, A_r) \leq (4 + 8C_2 \operatorname{tg} \delta) |A_1 A_r|, \quad j = 2, \dots, r,$$

и, подставляя последнюю оценку в (3.22), получаем

$$\ell_{x^1}(A_1, \dots, A_r) \leq (C_1(n-1)(4 + 8C_2 \operatorname{tg} \delta) + C_2) |A_1 A_r|,$$

что завершает доказательство. □

### 3.6.2. Шаг индукции

Теперь мы докажем следующее утверждение, которое будет служить шагом индукции.

**Лемма 3.6.13.** *Предположим, что*

$$\delta \in \left( 0, \bar{\delta} \wedge \operatorname{arctg} \frac{\sin \varepsilon_0}{8(n-1)C(\xi)} \right),$$

где  $\varepsilon_0 > 0$  определено в лемме 3.5.5, и предположим, что следующая индукционная гипотеза верна: если для некоторого  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  существует константа  $C_{i-1} > 0$ , такая что для произвольного допустимого  $(n-i+2)$ -набора  $(\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$ , вектор  $(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+n-i+1})$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для всех  $j = i-1, \dots, n$ , то

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C_{i-1} |A_1 A_r|. \quad (3.28)$$

Тогда это свойство выполняется также для  $i+1$ , т.е. существует константа  $C_i > 0$  (зависящая только от нормы  $\|\cdot\|$ , от  $C_{i-1}$ , от  $n$ ,  $\delta$  и  $\xi$ ), такая

что для произвольного допустимого  $(n - i + 1)$ -набора  $(\mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  если вектор  $(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+n-i})$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для всех  $j = i, \dots, n$ , то

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C_i |A_1 A_r|. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* Пусть  $n$ -набор из множеств  $(\mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  с  $\alpha_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j = i, \dots, n$  — допустимый, вектор  $(A_j)_{j=1}^{r+n-i}$  — самосжимающийся относительно нормы  $\|\cdot\|$  и  $(A_1, \dots, A_r) \subset \mathbb{P}_{\alpha_j} + A_{r+n-j}$  для всех  $j = i, \dots, n$ . Пусть  $x^j$  — ось, сонаправленная с  $\nu^{\alpha_j}$ , определенная  $\mathbb{P}_{\alpha_j}$  и проходящая через  $A_r$ , рассмотрим  $(i-1)$ -ное линейное подпространство  $\Pi^{i-1} := (\text{span}\{\nu^{\alpha_j}\}_{j=i}^n)^\perp$ . Остаток доказательства разбивается на несколько шагов.

**ШАГ 1.** Мы действуем так же, как в доказательстве леммы 3.6.9. А именно, начиная с последнего отрезка  $[A_{k-1}A_k]$  с  $1 < k \leq r$ , который  $\varepsilon_0$ -горизонтален относительно  $\Pi^{i-1}$  (т.е. с максимальным  $k \in \{2, \dots, r\}$  таким, что  $[A_{k-1}A_k]$   $\varepsilon_0$ -горизонтален относительно этого подпространства), если он существует, мы ищем минимальное  $q \in \{1, \dots, k-1\}$ , такое что для каждого  $j \in \{q, \dots, k-1\}$  отрезок  $[A_j A_k]$   $\varepsilon_0$ -горизонтален относительно  $\Pi^{i-1}$ . Заметим, что тогда, если  $q > 1$ , то  $[A_{q-1}A_k]$  является  $\varepsilon_0$ -вертикальным относительно  $\Pi^{i-1}$ . Теперь мы повторим эту же операцию с  $q-1$  вместо  $r$  и продолжим так действовать с помощью обратной индукции настолько далеко, насколько возможно. Таким образом, мы найдем конечную (возможно, пустую) последовательность дизъюнктивных подинтервалов  $\{q_l, q_l+1, \dots, k_l\}_{l=1}^\nu$  множества  $\{1, \dots, r\}$ , таких что для каждого  $j \in \{q_l, \dots, k_l-1\}$  отрезок  $[A_j A_{k_l}]$   $\varepsilon_0$ -горизонтален относительно  $\Pi^{i-1}$ , пока  $[A_{q_l-1}A_{k_l}]$   $\varepsilon_0$ -вертикален относительно этого подпространства (если  $q_l > 1$ ).

Мы утверждаем, что

$$\ell(A_{q_l}, \dots, A_{k_l}) \leq \bar{C}_1 \sum_{\substack{\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}: (\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n}) \\ \text{ДОПУСТИМ}}} \ell((A_{q_l}, \dots, A_{k_l}) \cap (\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l})) + \bar{C}_2 |A_{q_l} A_{k_l}| \quad (3.30)$$

для всех  $l = 1, \dots, \nu$ , где  $\bar{C}_1 > 0$  зависит только от нормы  $\|\cdot\|$ , и  $\bar{C}_2 > 0$  зависит от нормы и от  $\delta$ . Чтобы проверить это утверждение, рассмотрим произвольное

$j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\}$  такое что  $A_{j+1} \in \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}$ , но  $A_j \notin \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}$  для некоторого  $\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}$ , такого что  $(\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  допустим. Тогда или

(i)  $j$  первый индекс  $\{q_l, \dots, k_l\}$  такой, что  $A_{j+1} \in \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}$ , т.е.

$$\{s \in \{q_l, \dots, j\} : A_s \in \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}\} = \emptyset,$$

в этом случае мы просто используем  $(A_j, A_{j+1}) \subset (A_{q_l}, \dots, A_{k_l})$  чтобы оценить  $|A_j A_{j+1}| \leq C |A_{q_l} A_{k_l}|$  с помощью замечания 3.5.9 для некоторого  $C > 0$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$ ; сумма евклидовых длин всех отрезков  $|A_j A_{j+1}|$  по всем  $\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}$  таким, что  $(\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  допустим, оценивается сверху посредством  $\bar{C}_2 |A_{q_l} A_{k_l}|$ , где  $\bar{C}_2 := CN(\delta)$ ;

(ii) или найдется

$$s(j) := \max\{s \in \{q_l, \dots, j\} : A_s \in \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}\},$$

и  $s(j) \leq j$  ввиду определения  $s(\cdot)$ , отсюда  $(A_j, A_{j+1}) \subset (A_{s(j)}, \dots, A_{j+1})$ , что влечет  $|A_j A_{j+1}| \leq C |A_{s(j)} A_{j+1}|$  снова ввиду замечания 3.5.9 при  $C > 0$ , зависящая только от  $\|\cdot\|$  (так же как  $C$  в (i)). Тогда, с  $\bar{C}_1 := C \vee 1$  выполняется

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \{A_j, A_{j+1}\} \subset \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}}} |A_j A_{j+1}| + \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \text{как в (ii)}}} |A_j A_{j+1}| \\ & \leq \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \{A_j, A_{j+1}\} \subset \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}}} |A_j A_{j+1}| + C \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \text{как в (ii)}}} |A_{s(j)} A_{j+1}| \\ & \leq \bar{C}_1 \left( \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \{A_j, A_{j+1}\} \subset \mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l}}} |A_j A_{j+1}| + \sum_{\substack{j \in \{q_l, \dots, k_l - 1\} \\ \text{как в (ii)}}} |A_{s(j)} A_{j+1}| \right) \\ & = \bar{C}_1 \ell((A_{q_l}, \dots, A_{k_l}) \cap (\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l})). \end{aligned}$$

Тогда из (i) и (ii) получаем (3.30).

ШАГ 2. Ввиду индукционного предположения на каждое  $\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}$  при допустимом

$(\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}}, \mathbb{P}_{\alpha_i}, \dots, \mathbb{P}_{\alpha_n})$  для  $(A_j)_{j \in \Lambda_{k_l}} := (A_{q_l}, \dots, A_{k_l}) \cap (\mathbb{P}_{\alpha_{i-1}} + A_{k_l})$  (ясно, что  $\Lambda_{k_l} \subset \{q_l, q_l + 1, \dots, k_l\}$  и  $k_l \in \Lambda_{k_l}$ ), выполняется оценка

$$\ell((A_j)_{j \in \Lambda_{k_l}}) \leq C_{i-1} |A_{\tilde{q}_l} A_{k_l}|, \quad (3.31)$$

где  $\tilde{q}_l$  обозначает наименьший индекс в  $\Lambda_{k_l}$ . Но ввиду того, что  $(A_j)_{j \in \Lambda_{k_l}} \subset (A_{q_l}, \dots, A_{k_l})$ , выполняется

$$|A_{\tilde{q}_l} A_{k_l}| \leq C |A_{q_l} A_{k_l}|$$

для некоторой  $C > 0$ , зависящего только от нормы  $\|\cdot\|$ , и отсюда (3.31) выполняется  $\ell((A_j)_{j \in \Lambda_{k_l}}) \leq C |A_{q_l} A_{k_l}|$ . Тогда, из (3.30) получаем

$$\ell(A_{q_l}, \dots, A_{k_l}) \leq C' |A_{q_l} A_{k_l}| \quad (3.32)$$

для всех  $l = 1, \dots, \nu$ , где  $C' := \bar{C}_1 C_{i-1} C N(\delta) + \bar{C}_2 > 0$  зависит от  $\delta$  и от  $\|\cdot\|$ , а также от  $C_{i-1}$ .

ШАГ 3. Рассмотрим подвектор,  $(A_j)_{j \in \Lambda} \subset (A_1, \dots, A_r)$  полученный из  $(A_1, \dots, A_r)$  с помощью удаления точек  $A_j$  с  $j \in \cup_{i=1}^{\nu} \{q_i + 1, \dots, k_i - 1\}$ . Неравенство (3.32) таким образом влечет, если заметить, что  $C' > 1$ , оценку

$$\ell(A_1, \dots, A_r) \leq C' \ell((A_j)_{j \in \Lambda}). \quad (3.33)$$

Чтобы оценить правую сторону в (3.33), мы сначала отметим, что ввиду леммы 3.7.1 мы имеем

$$|A_{q_i-1} A_{q_i}| + |A_{q_i} A_{k_i}| \leq C |A_{q_i-1} A_{k_i}|$$

для  $C > 0$ , зависящей только от  $\|\cdot\|$ , если  $q_i > 1$ . Таким образом, для подвектора  $(A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}} \subset (A_j)_{j \in \Lambda}$ , полученного из  $(A_j)_{j \in \Lambda}$  с помощью удаления всех  $A_{q_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$  кроме, возможно,  $q_i = \min \Lambda = 1$  (т.е.  $q_i$  является первым индексом в  $\Lambda$ , который равен 1 по построению), выполняется

$$\ell((A_j)_{j \in \Lambda}) \leq C \ell((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}). \quad (3.34)$$

Тогда, ввиду (3.34) и (3.33), доказательство будет завершено, как только мы покажем, что для некоторого  $\tilde{C} > 0$ , возможно зависящего от  $\xi$ , а значит от  $\|\cdot\|$ , так же как от  $n$  и  $i$ , выполняется

$$\ell((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \leq \tilde{C} |A_{\min \tilde{\Lambda}} A_{\max \tilde{\Lambda}}| = \tilde{C} |A_1 A_r|, \quad (3.35)$$

последнее равенство верно ввиду того, что  $\min \tilde{\Lambda} = 1$  и  $\max \tilde{\Lambda} = r$  по построению.

ШАГ 4. Осталось доказать (3.35). На самом деле, мы покажем это для  $\tilde{C} > 0$ , зависящей возможно от  $\xi$ , а значит только от  $\|\cdot\|$ . Для этого заметим, что все отрезки ломаной  $(A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}$ , кроме, возможно, первого, являются  $\varepsilon_0$ -вертикальными относительно  $\Pi^{i-1}$ . Обозначая для удобства  $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\rho) := (A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}$ , мы получаем, что

$$\begin{aligned} \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) &\leq \ell((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) = |\tilde{A}_1 \tilde{A}_2| + \ell(\tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_\rho) \\ &\leq |\tilde{A}_1 \tilde{A}_2| + \frac{1}{\sin \varepsilon_0} \ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \\ &\leq C |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + \frac{1}{\sin \varepsilon_0} \ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \quad \text{ввиду замечания 3.5.9,} \end{aligned} \quad (3.36)$$

с константой  $C > 0$ , зависящей только от  $\|\cdot\|$  (здесь в последнем неравенстве мы использовали включение  $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) \subset (A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}$ ). Но для каждого  $j \in \{i, \dots, n\}$  выполняется

$$\begin{aligned} \ell_{x^j}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) &\leq |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 2 \operatorname{tg} \delta \ell_{(x^j)^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \quad \text{ввиду леммы 3.6.6} \\ &\leq |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 2 \operatorname{tg} \delta \ell((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \\ &\leq |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 2 \operatorname{tg} \delta \left( \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) + \ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \right) \\ &\leq |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 2 \operatorname{tg} \delta \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) + 2C(\xi) \operatorname{tg} \delta \sum_{k=i}^n \ell_{x^k}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где последнее неравенство выполняется ввиду леммы 3.6.5. Ввиду леммы 3.6.7, а

также определений

$$\begin{aligned} L_0 &:= |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 2 \operatorname{tg} \delta \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}), \\ L_k &:= \ell_{x^k}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \end{aligned}$$

и  $C := 2C(\xi) \operatorname{tg} \delta$ , вспомнив, что  $\operatorname{tg} \delta < 1/(4(n-i+1)C(\xi))$ , и ввиду предположения доказываемого утверждения, мы получим из (3.37) оценку

$$\sum_{j=i}^n \ell_{x^j}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \leq 2(n-i+1)|\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 4(n-i+1) \operatorname{tg} \delta \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}). \quad (3.38)$$

Ввиду леммы 3.6.5 мы получаем, что

$$\begin{aligned} \ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) &\leq C(\xi) \sum_{j=i}^n \ell_{x^j}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \\ &\leq 2(n-i+1)C(\xi)|\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + 4(n-i+1)C(\xi) \operatorname{tg} \delta \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где последнее неравенство верно ввиду (3.38). Подставляя (3.39) в (3.36), получаем, что

$$\begin{aligned} \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) &\leq \left( C + \frac{2(n-i+1)C(\xi)}{\sin \varepsilon_0} \right) |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho| + \\ &\frac{4(n-i+1)}{\sin \varepsilon_0} C(\xi) \operatorname{tg} \delta \ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}), \end{aligned}$$

и отсюда, ввиду  $\operatorname{tg} \delta < \sin \varepsilon_0 / (8(n-i+1)C(\xi))$ , выполняется

$$\ell_{\Pi^{i-1}}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \leq 2 \left( C + \frac{2(n-i+1)C(\xi)}{\sin \varepsilon_0} \right) |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho|. \quad (3.40)$$

Наконец, подставив (3.40) в (3.39) и вспомнив, что

$$4(n-i+1)C(\xi) \operatorname{tg} \delta \leq \frac{1}{2} \sin \varepsilon_0,$$

получаем, что

$$\ell_{(\Pi^{i-1})^\perp}((A_j)_{j \in \tilde{\Lambda}}) \leq (4(n-i+1)C(\xi) + C \sin \varepsilon_0) |\tilde{A}_1 \tilde{A}_\rho|,$$

а это вместе с (3.40) дает (3.35) с  $\tilde{C} := 3C + 4(n-i+1)C(\xi) (1 + 1/\sin \varepsilon_0)$ , как и утверждалось.  $\square$

### 3.7. Вспомогательные леммы

Мы использовали следующие несложные утверждения.

**Лемма 3.7.1.** *Если  $(A_1, A_2, A_3)$  — самосжимающийся относительно  $\|\cdot\|$ , то*

$$|A_1 A_2| + |A_2 A_3| \leq C |A_1 A_3|$$

для некоторого  $C > 0$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$ .

*Доказательство.* Действительно,  $|A_2 A_3| \leq C |A_1 A_3|$  с  $C$  как в утверждении, что вместе с неравенством треугольника

$$|A_1 A_2| \leq |A_1 A_3| + |A_2 A_3|,$$

влечет требуемое утверждение.  $\square$

Для любой пары различных точек  $\{A, B\} \subset \mathbb{R}^n$  посредством  $M(A, B)$  будем обозначать замкнутое множество

$$M(A, B) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|A - z\| = \|B - z\|\}$$

(оно называется *медиатрисой* или *эквидистантным множеством* для  $\{A, B\}$ ). Несложно заметить, что  $M(\lambda A, \lambda B) = \lambda M(A, B)$  для всех  $\lambda \geq 0$  (на самом деле, даже для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , если норма, как это обычно предполагается, симметрична). Более того,  $M(A + x, B + x) = M(A, B)$ . Заметим также, что  $M(A, B) \cap (AB)$  является серединой отрезка  $[AB]$ , если норма симметрична.

**Лемма 3.7.2.** *Найдется константа  $\bar{\varepsilon} > 0$ , зависящая только от нормы  $\|\cdot\|$ , такая что для каждой  $C \in M(A, B)$  с  $\angle ABC \leq 2\bar{\varepsilon}$  выполняется*

$$|BC| \leq 3/4|AB|.$$

*Доказательство.* Поскольку утверждение инвариантно относительно переносов и растяжений, мы можем, не умаляя общности, предполагать, что  $|AB| = 1$  и  $B$  является началом координат, так что  $M(A, B)$  зависит только от направления  $\nu \in S^{n-1}$  отрезка  $[BA]$ . Пусть  $\varepsilon(\nu)$  обозначает максимальный угол  $\alpha$  такой что для  $C \in M(A, B)$  с углом  $\angle ABC \leq \alpha$  выполняется  $|BC| \leq 3/4$ . Теперь достаточно положить  $\bar{\varepsilon} := \inf_{\nu \in S^{n-1}} \varepsilon(\nu)$  и заметить, что  $\bar{\varepsilon} > 0$ . Действительно, в противном случае найдется последовательность  $\{A_k\} \subset S^{n-1}$ ,  $A_k \rightarrow A$ , и  $\{C_k\} \subset M(A_k, B)$ ,  $C_k \rightarrow C \in \mathbb{R}^n$  для некоторого  $A \in S^{n-1}$  и  $C \in \mathbb{R}^n$  с  $\angle A_k B C_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $|BC_k| > 3/4$ . Тогда ясно, что  $C \in M(A, B)$ ,  $|BC| \geq 3/4$  и  $\angle ABC = 0$ , откуда  $C \in (AB)$ , следовательно  $C$  является серединой отрезка  $[AB]$ , и значит  $|BC| = 1/2$ ; это противоречие завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 3.7.3.** *Доказательство леммы 3.7.2 использует, вообще говоря, тот факт, что для  $\{C\} := M(A, B) \cap (AB)$  выполняется  $C = C_0$ , где  $C_0$  — середина  $[AB]$ . Полезно отметить, что если норма  $\|\cdot\|$  не предполагается симметричной (т.е.  $\|x\| = \|-x\|$  выполняется не для всех  $x \in E$ ), тогда  $M(A, B) \cap (AB)$  остается точкой  $\{C\}$ , но, вообще говоря, может не совпадать с  $C_0$ , и выполнено только*

$$c|AB| \leq |AC| \leq (1 - c)|AB|$$

для некоторого  $c \in (0, 1)$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$ . Таким образом, утверждение леммы 3.7.2 в этом случае должно быть изменено на

$$|BC| \leq (1 - \bar{c})|AB|$$

для некоторого  $\bar{c} \in (0, 1)$ , зависящего только от  $\|\cdot\|$ .



## Заключение

Несмотря на интерес ведущих ученых и недавнюю публикационную активность, многие вопросы по тематике, исследуемой в диссертации, остаются без ответа. Приведем ряд открытых вопросов.

В первой главе построен явный пример дерева Штейнера со счетным количеством точек ветвления. Построенное дерево Штейнера соединяет множество нулевой хаусдорфовой размерности. Естественным образом возникает вопрос о существовании дерева со счетным числом точек ветвления, множество концевых вершин которого имеет ненулевую хаусдорфову размерности. В частности, интересным представляется вопрос о том, является ли фрактальное бинарное дерево штейнеровским, то есть существует ли такое  $\lambda > 0$ , что основная теорема первой главы (теорема 1.3.1) верна для  $\lambda_j = \lambda$ ,  $j > 0$ . Также представляет интерес обобщение задачи на  $\alpha$ -массы — см. работу [24] (штейнеровская задача является частным случаем при  $\alpha = 0$ ).

Напомним, что в главе 2 доказана гипотеза Миранды, Паолини и Степанова о виде минимайзера функционала максимального расстояния для окружности радиуса  $R$  в случае достаточно большого  $R$ . В то же время структура минимайзеров функционала максимального расстояния для других конкретных  $M$ , например, для окружности маленького радиуса ( $R < 4.98r$ ) или круга неясна. Различные попытки численного моделирования показывают, что гипотеза Миранды, Степанова и Паолини скорее всего верна для всех  $R > 0$ .

Также в главе 2 описаны множества минимайзеров и локальных минимайзеров функционала максимального расстояния для множеств с достаточно большим радиусом кривизны. В связи с этим интересно поведение минимайзеров для других “хороших” классов множеств, например для выпуклых многоугольников.

Разумеется, все описанные выше задачи имеют смысл для локальных минимайзеров, а также для случая  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Известно (см. [13] и [21]), что самосжимающиеся кривые в пространствах произвольной размерности с евклидовой нормой являются решениями градиентной системы с выпуклыми или квазивыпуклыми условиями, то есть возникают как кривые градиентного спуска для выпуклых функций и для функций с выпуклыми линиями уровня. Из общих соображений, для самосжимающихся кривых в пространствах с произвольной нормой должно существовать обобщение этого утверждения, однако пока его придумать не удалось.

Также небезынтересными представляются открытые вопросы, поставленные в работе [11], в которой приводятся два различных обобщения понятия самосжимающихся кривых. В работе [26] мотивация (градиентные системы для выпуклых и квазивыпуклых функций) обобщена на произвольные метрические пространства, правда вместо условия самосжимаемости там появляется некоторое похожее свойство. Кроме того в этой работе поставлены вопросы, касающиеся изучения градиентных кривых выпуклых функций в различных пространствах (не только в  $CAT(0)$ , как разобрано в статье [26], и в нормированных пространствах, которым посвящена в третья глава данной диссертации).

## Литература

- [1] M. Bonafini, G. Orlandi, and E. Oudet. Variational approximation of functionals defined on 1-dimensional connected sets: the planar case. *arXiv preprint arXiv:1610.03839*, 2016.
- [2] G. Bouchitté, C. Jimenez, and R. Mahadevan. Asymptotic analysis of a class of optimal location problems. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 95(4):382–419, 2011.
- [3] A. Brancolini, G. Buttazzo, F. Santambrogio, and E. Stepanov. Long-term planning versus short-term planning in the asymptotical location problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15(3):509–524, 2009.
- [4] G. Buttazzo, E. Oudet, and E. Stepanov. Optimal transportation problems with free Dirichlet regions. In *Variational methods for discontinuous structures*, volume 51 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 41–65. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [5] G. Buttazzo, A. Pratelli, S. Solimini, and E. Stepanov. *Optimal urban networks via mass transportation*, volume 1961 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [6] G. Buttazzo and E. Stepanov. Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(4):631–678, 2003.
- [7] G. Buttazzo and E. Stepanov. Minimization problems for average distance functionals. *Calculus of Variations: Topics from the Mathematical Heritage of Ennio De Giorgi, D. Pallara (ed.)*, *Quaderni di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta*, 14:47–83, 2004.

- [8] X. Cheng and D.-Z. Du. *Steiner trees in industry*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Danila Cherkashin and Yana Teplitskaya. On the horseshoe conjecture for maximal distance minimizers. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, doi: 10.1051/cocv/2017025, 2018.
- [10] A. Daniilidis, G. David, E. Durand-Cartagena, and A. Lemenant. Rectifiability of self-contracted curves in the Euclidean space and applications. *The Journal of Geometric Analysis*, 25(2):1211–1239, 2015.
- [11] A. Daniilidis, R. Deville, and E. Durand-Cartagena. Metric and geometric relaxations of self-contracted curves. *arXiv preprint arXiv:1802.09637*, 2018.
- [12] A. Daniilidis, R. Deville, E. Durand-Cartagena, and L. Rifford. Self-contracted curves in Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 457(2):1333–1352, 2018.
- [13] A. Daniilidis, O. Ley, and S. Sabourau. Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 94(2):183–199, 2010.
- [14] D. Z. Du, J.M. Smith, and J. H. Rubinstein. *Advances in Steiner trees*, volume 6. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] S. Eilenberg and O. G. Harrold. Continua of finite linear measure I. *American Journal of Mathematics*, 65(1):137–146, 1943.
- [16] S. Graf and H. Luschgy. *Foundations of quantization for probability distributions*, volume 1730 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [17] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin. *Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations*. CRC press, 1994.
- [18] A. Lemenant. Rectifiability of non Euclidean planar self-contracted curves. *Confluentes Math.*, 8(2):23–38, 2016.

- [19] A. Lemenant and F. Santambrogio. A Modica–Mortola approximation for the Steiner Problem. *Comptes Rendus Mathematique*, 352(5):451–454, 2014.
- [20] Antoine Lemenant. A presentation of the average distance minimizing problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 181(6):820–836, 2012.
- [21] M. Longinetti, P. Manselli, and A. Venturi. Bounding regions to plane steepest descent curves of quasiconvex families. *Journal of Applied Mathematics*, ID 4873276, 2016.
- [22] X. Y. Lu and D. Slepčev. Properties of minimizers of average-distance problem via discrete approximation of measures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(5):820–836, 2013.
- [23] P. Manselli and C. Pucci. Maximum length of steepest descent curves for quasiconvex functions. *Geometriae Dedicata*, 38(2):211–227, 1991.
- [24] A. Marchese and A. Massaccesi. The Steiner tree problem revisited through rectifiable  $G$ -currents. *Advances in Calculus of Variations*, 9(1):19–39, 2016.
- [25] M. Miranda, Jr., E. Paolini, and E. Stepanov. On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(3):287–309, 2006.
- [26] S. Ohta. Self-contracted curves in CAT(0)-spaces and their rectifiability. *arXiv preprint arXiv:1711.09284*, 2017.
- [27] E. Oudet and F. Santambrogio. A Modica–Mortola approximation for branched transport and applications. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 201(1):115–142, 2011.
- [28] E. Paolini and E. Stepanov. Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in  $\mathbb{R}^n$ . *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 122(3):3290–3309, 2004. Problems in mathematical analysis.
- [29] E. Paolini and E. Stepanov. Existence and regularity results for the Steiner problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 46(3-4):837–860, 2013.

- [30] E. Paolini, E. Stepanov, and Y. Teplitskaya. An example of an infinite Steiner tree connecting an uncountable set. *Advances in Calculus of Variations*, 8(3):267–290, 2015.
- [31] C. Ras, K. Swanepoel, and D. A. Thomas. Approximate Euclidean Steiner trees. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 172(3):845–873, Mar 2017.
- [32] E. Stepanov and Y. Teplitskaya. Self-contracted curves have finite length. *Journal of the London Mathematical Society*, 96(2):455–481, 2017.
- [33] A. Suzuki and Z. Drezner. The  $p$ -center location problem in an area. *Location science*, 4(1):69–82, 1996.
- [34] A. Suzuki and A. Okabe. Using Voronoi diagrams. *Drezner, Z. (ed.): Facility location: A survey of applications and methods, Springer series in operations research*, pages 103–118, 1995.
- [35] Александр О. Иванов and Алексей А. Тужилин. Теория экстремальных сетей. *Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований*, 2003.
- [36] Александр О. Иванов and Алексей А. Тужилин. Единственность минимального дерева Штейнера для границ общего положения. *Математический сборник*, 197(9):55–90, 2006.
- [37] Я. Теплицкая. Регулярность минимайзеров функционала максимального расстояния. *Записки научных семинаров ПОМИ РАН*, 462(1):103–111, 2017.

## Список иллюстраций

1.1	Первая тренога в нашей конструкции. . . . .	16
1.2	Три шага построения конструкции. Синим выделено множество $\Sigma_3$ . . . . .	16
1.3	Шаг построения эталонного дерева. . . . .	17
1.4	Рисунок, используемый при доказательстве леммы 1.4.1. . . . .	28
1.5	Конструкция, используемая в лемме 1.4.3. . . . .	30
1.6	Рисунок, используемый при доказательстве леммы 1.4.3. . . . .	32
1.7	Увеличенный фрагмент рис. 1.6. . . . .	33
1.8	Рисунок, используемый при доказательстве второго шага леммы 1.4.3. . . . .	33
1.9	Рисунки, используемые при доказательстве леммы 1.4.6. . . . .	38
1.10	Рисунки, используемые в лемме 1.4.9. . . . .	41
2.1	Локально минимальные сети для множеств из двух и трех точек. . . . .	53
2.2	Локально минимальная сеть для множества из 4 точек. . . . .	54
2.3	Подкова. . . . .	57
2.4	Подкова $\Sigma_1$ и более удачный кандидат $\Sigma'$ из примера 2.3.5. . . . .	58
2.5	Построение области $T$ . . . . .	63
2.6	Случай (iv) леммы 2.4.8: (a) (невозможная) часть минимайзера; (b) лучший кандидат. . . . .	78
2.7	Иллюстрация к лемме 2.4.9. Конец дуги $M_r \cap \Sigma$ не может быть концевой точкой $\Sigma$ . . . . .	80
2.8	Иллюстрация к 2.4.13 . . . . .	81
2.9	Рисунок к случаю 1a: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	83
2.10	Типичная ситуация для случая 1b: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	90
2.11	Предельный рисунок к случаю 1b: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	90

2.12	Рисунок для случая 1с: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	91
2.13	Рисунок для случая 1с: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	91
2.14	Рисунок для случая 1d: средняя компонента, $n = 2, m = 2$ . . . . .	92
2.15	Рисунок для случая 1е: средняя компонента, $m = 2, n = 1$ . . . . .	92
2.16	Рисунок для случая 1е: средняя компонента, $m = 2, n = 1$ . . . . .	92
2.17	Рисунок для случая 1е: средняя компонента, $m = 2, n = 1$ . . . . .	93
2.18	Рисунок для случая 1f: средняя компонента, $m = 2, n = 1$ . . . . .	93
2.19	Рисунок для случая 2а: крайняя компонента, $n = 1, m = 1$ . . . . .	93
2.20	Рисунок для случая 2b: крайняя компонента, $n = 2, m = 1$ . . . . .	94
2.21	Рисунок для случая 2с: крайняя компонента, $n = 2, m = 1$ . . . . .	94
3.1	(а) Доказательство простого случая теоремы 3.3.1 ( $n = 2$ , максимальная норма), шаг 2; (b) случай $n = 2$ , единичный шар — выпуклый многогранник; (с) случай $n = 2$ , произвольная норма. . . . .	101
3.2	Построения из доказательства леммы 3.5.4. . . . .	109
3.3	Построения из доказательства леммы 3.5.10. (А): определение $\Delta(\alpha)$ . (В): Доказательство положительности $\Delta(\alpha)$ . . . . .	114
3.4	Доказательство утверждения леммы 3.5.10. . . . .	115