На правах рукописи

Звонарёва Александра Олеговна

Производные группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Генералов Александр Иванович

Официальные оппоненты:

Гордеев Николай Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры ФГБОУ ВПО «Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена»

Косовская Надежда Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Защита состоится «   »____________2014 г. в______часов на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, http//www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «   »____________2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.02
доктор физ.-мат. наук　　　　　　　　А.В. Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Производная категория была определена Вердье в 1963 году. С тех пор изучение производных категорий и эквивалентностей между ними стало неотъемлемой частью теории представлений алгебр. Основным способом построения эквивалентностей производных категорий является знаменитая теорема Рикарда и Келлера, она дает необходимое и достаточное условие производной эквивалентности. Оказывается, что алгебры A и B производно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ограниченный комплекс T, состоящий из конечно порожденных проективных A-модулей, удовлетворяющий некоторым техническим условиям. Такой комплекс называется наклоняющим. Одними из первых примеров наклоняющих комплексов являются наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра, построенные Рикардом. Если $A = B$, то наклоняющий комплекс задает автоэквивалентность, что позволяет нам рассматривать группу стандартных автоэквивалентностей $D^b(A)$ по модулю естественных изоморфизмов, то есть производную группу Пикара. Производная группа Пикара $\mathrm{TrPic}(A)$ алгебры A – это группа классов изоморфизмов двусторонних наклоняющих комплексов в $D^b(A \otimes A^{op})$, где произведение классов X и Y – это класс $X \otimes_A Y$.

Производная группа Пикара алгебры была впервые определена Рукье и Циммерманном. Это очень интересный инвариант производной категории, который, однако, крайне сложен для вычисления. Заметим, что $\mathrm{TrPic}(A)$ содержит две естественные подгруппы: копию $\mathbb{Z}$ (представленную комплексами вида $A[n]$) и классическую группу Пикара $\mathrm{Pic}(A)$, то есть группу Морита-автоэквивалентностей. В случае локальной алгебры A или коммутативной алгебры A со связным спектром Рукье, Циммерманн и Екутиели показали, что $\mathrm{TrPic}(A) = \mathrm{Pic}(A) \times \mathbb{Z}$.

Производная группа Пикара вычислена в очень небольшом числе случаев. В работе Миячи и Екутиели эта группа вычислена для конечномерных наследственных алгебр. Стоит отметить работу Ленцинга и Мельцера, в которой описываются группы автоэквивалентностей ограниченной производной категории канонической алгебры, и работу Брумхеда, Паукстцелло и Плоога, в которой описываются группы автоэквивалентностей дискретной производной категории. Из теоретических результатов стоит отметить работу Хуисген-Циммерманн и Саорина, в которой с помощью геометрических методов доказывается, что $\mathrm{Out}^0(A)$ – компонента единицы группы внешних автоморфизмов алгебры A, – является нормальной подгруппой производной группы Пикара, работу Екутиели, в которой доказывается, что производная группа Пикара классифицирует классы изоморфизмов дуализирующих комплексов, и еще одну работу Екутиели, в которой доказывается, что производная группа Пикара является локально алгебраической.

Алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, естественно возникают в модулярной теории представлений для описания блоков групп с циклической группой дефекта, также они являются пересечением класса симметрических специальных бирядных алгебр и алгебр конечного типа представления, этот класс алгебр совпадает с классом симметрических алгебр конечного типа представления древесного типа A_n. Рикард доказал, что две алгебры, соответствующие деревьям Брауэра Γ и Γ', производно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы (n, t), где n – это число ребер в дереве Брауэра Γ, а t – кратность исключительной вершины, и (n', t') совпадают, а из результата Габриэля и Ридманн вытекает, что класс алгебр Брауэра замкнут относительно производной эквивалентности. Рукье и Циммерманн начали изучение производной группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра. В случае кратности исключительной вершины 1 они построили морфизм из артиновой группы кос на $n+1$ нитях (где n – число простых A-модулей) в $\mathrm{TrPic}(A)$. Они также показали, что это изоморфизм по модулю некоторой центральной подгруппы, когда $n = 2$. Хованов и Зейдель определили действие группы кос на ограниченной производной категории некоторой алгебры, близкой к алгебре, соответствующей дереву Брауэра; из их результатов следует, что действие группы кос на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, точно.

Шапс и Закай-Иллоуз построили действие группы кос на аффинной диаграмме $\widetilde{A}_{n-1}$ на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины. Мухтади-Аламсиах показала, что это действие точно в случае кратности 1.

Шапс и Закай-Иллоуз также поставили вопрос, порождают ли образы образующих группы кос H_i (см. далее), сдвиг и $\mathrm{Pic}(A)$ производную группу Пикара в случае кратности $\neq 1$, и является ли гомоморфизм из группы кос одно-однозначным.

Теперь рассмотрим производный группоид Пикара, объекты которого соответствуют алгебрам с деревом Брауэра с n ребрами и кратностью исключительной вершины 1, а морфизмы – стандартные производные эквивалентности между ними. $\mathrm{TrPic}(A)$ является группой эндоморфизмов объекта A в этой категории. По результату Абе и Хошино производный группоид Пикара, соответствующий классу алгебр Брауэра с кратностью исключительной вершины t и с зафиксированным количеством простых модулей n, порожден одночленными и двучленными наклоняющими комплексами.

Двучленные наклоняющие комплексы связаны с теорией τ-наклонений. Напомним, что A-модуль M называется τ-жестким (τ-rigid), если $\mathrm{Hom}(M, \tau M) = 0$; τ-наклоняющим (τ-tilting), если он τ-жесткий, и число его неизоморфных прямых слагаемых совпадает с рангом группы Гротендика алгебры; τ-наклоняющим с носителем (support τ-tilting), если существует идемпотент e такой, что M – это τ-наклоняющий (A/AeA)-модуль. В работе Адачи, Иямы и Райтен в частности доказано, что над симметрической алгеброй над алгебраически замкнутым полем множество классов изоморфизмов базисных τ-наклоняющих модулей с носителем находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством классов изоморфизмов базисных двучленных наклоняющих комплексов. Также из их работы следует, что у почти полного (то есть, когда число неизоморфных прямых слагаемых равняется рангу группы Гротендика алгебры -1) двучленного частично наклоняющего комплекса существует ровно два дополнения до двучленного наклоняющего комплекса. Это очень важный результат, который обобщает классические результаты о наклоняющих модулях и позволяет развивать теорию мутаций для этого класса объектов.

Стоит отметить, что в работах Шапс, Закай-Иллоуз классифицированы все дву-ограниченные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с произвольной кратностью; этот класс наклоняющих комплексов пересекается с классом двучленных наклоняющих комплексов. Также в работе Адачи классифицированы τ-наклоняющие модули над алгебрами Накаямы. Алгебра, соответствующая звезде Брауэра, является алгеброй Накаямы.

Цель работы. Разработать метод вычисления образующих производной группы Пикара симметрических алгебр конечного типа представления и применить его для вычисления множества образующих производной группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины; описать множество двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, и вычислить кольца эндоморфизмов таких комплексов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены для вычисления множества образующих производной группы Пикара симметрических алгебр конечного типа представления и для описания соотношений в производных группах Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины. Также результаты работы могут быть использованы для изучения комбинаторики графа замены мутаций двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, и для описания множества двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины.

Методы исследований. Для вычисления множества образующих производной группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра, используется техника мутаций наклоняющих комплексов, разработанная Аихарой и Иямой, и техника мутаций графов Брауэра, разработанная Кауэром и Антиповым. Тот факт, что любой наклоняющий комплекс над симметрической алгеброй конечного типа представления представляется как композиция неприводимых мутаций, является ключевым для описания множества образующих производной группы Пикара. Для описания множества двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, используется интерпретация таких наклоняющих комплексов, как некоторых классов гомотопии кривых на плоскости с проколами в вершинах дерева Брауэра.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Описание множества образующих производной группы Пикара алгебры, соответствующей звезде Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины.

2. Описание множества двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1.

3. Описание колец эндоморфизмов двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были изложены на следующих конференциях и семинарах.

1. Международная конференция "Workshop and International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2012)".

2. Международная конференция "Maurice Auslander Distinguished Lectures and International conference 2013".

3. Международная конференция "Maurice Auslander Distinguished Lectures and International conference 2014".

4. Санкт-Петербургский городской алгебраический семинар имени Д.К. Фаддеева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех печатных работах автора [1]–[4], приведенных в конце автореферата. Из них две [1], [2] вышли в журналах, входящих в список ВАК.

Работа [1] написана в соавторстве, в ней диссертанту принадлежат результаты разделов 3 и 4 и Предложение 4 из раздела 6.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации 107 страниц. Список литературы включает 37 наименований на 4 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные результаты.

В первой главе настоящей работы приведены факты о производных эквивалентностях и мутациях наклоняющих комплексов, которые используются в дальнейших главах. Также в ней определяется один из главных объектов исследования диссертационной работы – алгебра, соответствующая дереву Брауэра. Над алгебраически замкнутым полем этот класс алгебр определяется следующим образом:

Определение 1. *Пусть Γ – дерево с n ребрами и одной отмеченной вершиной, которой приписана кратность $t \in \mathbb{N}$ (эта вершина называется исключительной, t называется кратностью исключительной вершины), и пусть в Γ зафиксирован циклический порядок ребер, инцидентных каждой вершине (в случае, когда Γ лежит на плоскости, будем считать, что ребра упорядочены по часовой стрелке). В этом случае Γ называется деревом Брауэра типа (n, t).*

В случае, когда дерево – это звезда с исключительной вершиной в центре, оно называется звездой Брауэра.

Каждому дереву Брауэра типа (n, t) можно поставить в соответствие алгебру $A(n, t)$. Алгебра $A(n, t)$ – это алгебра путей колчана с соотношениями. По дереву Брауэра Γ построим колчан Брауэра Q_Γ. Вершины Q_Γ – это ребра Γ; если ребра i и j инцидентны одной вершине в Γ, и ребро j следует за ребром i в соответствии с циклическим порядком ребер, инцидентных их общей вершине, то из вершины i в вершину j в Q_Γ есть стрелка. Колчан Q_Γ обладает следующими свойствами: Q_Γ является объединением ориентированных циклов, соответствующих вершинам Γ; каждая вершина Q_Γ лежит ровно на двух циклах. Цикл, соответствующий исключительной вершине, называется исключительным. Стрелки Q_Γ можно разбить на два семейства α и β так, что стрелки, принадлежащие пересекающимся циклам, принадлежат разным семействам. Будем обозначать стрелки, принадлежащие семейству α, через α, а стрелки, принадлежащие семейству β, через β соответственно.

Определение 2. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Базисная алгебра Брауэра $A(n,t)$, соответствующая дереву Γ типа (n,t), – это алгебра KQ_Γ/I, где идеал I порожден соотношениями вида:*

1. *$\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ для любых стрелок, принадлежащих семействам α и β, соответственно;*

2. *для любой вершины x, не принадлежащей исключительному циклу, $e_x\alpha^{x_\alpha}e_x = e_x\beta^{x_\beta}e_x$, где x_α, соответственно x_β – длина α-, соответственно β-цикла, содержащего x, а e_x – идемпотент, соответствующий x;*

3. *для любой вершины x, принадлежащей исключительному α-циклу (соответственно β-циклу), $e_x(\alpha^{x_\alpha})^te_x = e_x\beta^{x_\beta}e_x$ (соответственно $e_x\alpha^{x_\alpha}e_x = e_x(\beta^{x_\beta})^te_x$).*

Алгебра называется алгеброй Брауэра типа (n,t), если она Морита-эквивалентна алгебре $A(n,t)$ для некоторого дерева Брауэра Γ типа (n,t).

Понятие мутации наклоняющих комплексов является ключевым в данной работе, для простоты дадим определение в случае симметрической алгебры A.

Пусть T – базисный наклоняющий объект в $K^b(\text{proj-}A)$, $T = M \oplus X$, $\mathcal{M} = \text{add}(M)$. Рассмотрим треугольник

$$X \xrightarrow{f} M' \longrightarrow Y \longrightarrow, \tag{1}$$

где f – минимальная левая аппроксимация X по отношению к $\mathcal{M}$. Комплекс $\mu_X^+(T) := M \oplus Y$ называется левой мутацией T по отношению к X. Комплекс $\mu_X^+(T)$ снова является базисным наклоняющим. Если X неразложим, то мутация называется неприводимой. Правые мутации определяются по двойственности и обозначаются $\mu_X^-(T)$. Заметим, что в обозначениях треугольника (1) имеем $\mu_Y^-(\mu_X^+(T)) \simeq T$.

Стоит отметить, что Аихара показал, что над симметрической алгеброй конечного типа представления любой наклоняющий комплекс может быть получен из алгебры A с помощью последовательности неприводимых мутаций.

В случае алгебры, соответствующей дереву Брауэра, Кауэр и Антипов определили некоторую перестройку дерева Брауэра, которая соответствует эквивалентности, заданной наклоняющим комплексом $\mu_{P_j}^+(A)$, где P_j – неразложимый проективный модуль, соответствующий ребру j.

Во второй главе настоящей диссертации развиваются методы вычисления композиции некоторых производных эквивалентностей с помощью мутаций наклоняющих комплексов. При помощи этого вычисляется порождающее множество производной группы Пикара алгебры, соответствующей звезде Брауэра.

В первом пункте доказываются некоторые технические леммы.

Во втором пункте приводится стандартная конструкция дерева Брауэра по звезде Брауэра с помощью перестроек, или, что то же самое мутаций, определенных Кауэром и Антиповым. Далее над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра, вычисляется наклоняющий комплекс, который получается в результате применения этой последовательности мутаций к самой алгебре.

Эти построения являются первым шагом в доказательстве основных результатов этой главы.

Теорема 1. *Пусть A – базисная алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n,t), $t > 1$, и пусть $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i$ – разложение алгебры A на неразложимые неизоморфные проективные модули. Тогда* $\mathrm{TrPic}(A)$ *по-*

рождена сдвигом, $\mathrm{Pic}(A)$ *и эквивалентностями* H_i *такими, что*

$$H_i(P_j) = \begin{cases} 0 \ \to \ 0 \ \ \to \ P_j, & j \neq i, i-1 \\ 0 \ \to \ 0 \ \ \to \ P_{i-1}, & j = i \\ P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{soc} P_{i-1}, & j = i-1. \end{cases}$$

Эквивалентности H_i изучались в работах Шапс и Закай-Иллоуз. Эти эквивалентности удовлетворяют соотношениям группы кос на аффинной диаграмме $\widetilde{A}_{n-1}$. Как было отмечено ранее, производные группы Пикара производно эквивалентных алгебр изоморфны. Сопрягая полученные образующие с помощью эквивалентности между производной категорией алгебры, соответствующей произвольному дереву Брауэра, и производной категорией алгебры, соответствующей звезде Брауэра, можно получить образующие производной группы Пикара алгебры, соответствующей произвольному дереву Брауэра, в явном виде.

В случае кратности 1 группа $\mathrm{TrPic}(A)$ порождена чуть большим множеством.

Теорема 2. *Пусть A – базисная алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n,1). Тогда* $\mathrm{TrPic}(A)$ *порождена сдвигом,* $\mathrm{Pic}(A)$*, эквивалентностями H_i и эквивалентностями Q_i такими, что*

$$Q_i(P_j) = \begin{cases} 0 \ \to \ P_i \ \ \to \ 0, & j = i \\ 0 \ \to \ P_i \ \ \xrightarrow{\beta^{i-j}} \ P_j, & j \neq i. \end{cases}$$

Схема доказательства теоремы 1 приведена в пункте 3. Несложно показать, что $H_i(A) \simeq (\mu_i^+)^2(A)$. Далее для произвольной автоэквивалентности F доказывается, что $F(H_i(P_{i-1}))$ – это двойная мутация $F(P_i)$ относительно других слагаемых $F(A)$. Из этого получаем, что если некоторый наклоняющий комплекс T можно получить из A, применяя квадраты мутаций ($T = (\mu_{j_q}^{\pm})^2 \circ \ldots \circ (\mu_{j_1}^{\pm})^2(A)$), то существует элемент из $\mathcal{R}$, который переводит неразложимые проективные A-модули в слагаемые T, где $\mathcal{R}$ – подгруппа производной группы Пикара, порожденная сдвигом, $\mathrm{Pic}(A)$ и эквивалентностями

H_i. Из этого, в свою очередь, следует, что любой двусторонний наклоняющий комплекс, ограничение которого на A изоморфно T, принадлежит $\mathcal{R}$.

По результатам Аихары для любого наклоняющего комплекса T, сосредоточенного в неположительных степнях, существуют $\{i_1, i_2, ..., i_s\}$ такие, что $T = \mu^+_{i_s} \circ ... \circ \mu^+_{i_{r+1}} \circ \mu^+_{i_r} \circ \mu^+_{i_{r-1}} \circ ... \circ \mu^+_{i_2} \circ \mu^+_{i_1}(A)$. Вставив между каждыми двумя мутациями последовательность мутаций, соответствующих стандартной конструкции дерева и обратную последовательность, получаем, что условие представимости в виде произведения квадратов мутаций достаточно проверить лишь для комплексов, полученных с помощью последовательности мутаций, соответствующих стандартной конструкции дерева, произвольной мутации и последовательности обратной к последовательности мутаций, соответствующих стандартной конструкции дерева. Для доказательства этого факта рассматривается несколько случаев в соответствии со структурой дерева, этому посвящены пункты 4 и 5.

В пункте 6 аналогично доказательству теоремы 1 доказывается теорема 2. Различие состоит в том, что при $t = 1$ исключительная вершина ничем не выделена. Поэтому приходится добавить автоэквивалентности Q_i. Наклоняющий комплекс, соответствующий Q_i, представляется в виде последовательности мутаций, которая меняет центральную вершину звезды Брауэра на внешний конец ребра с меткой i. После этого, по необходимости применив к произвольной стандартной автоэквивалентности последовательность мутаций, задающую Q_i, получим, что композиция Q_i и этой произвольной автоэквивалентности оставляет центральную вершину звезды на месте. Так как результаты вычислений, проделанных в пунктах 4 и 5 верны при $t = 1$, получаем доказательство теоремы 2.

В третьей главе с помощью критерия того, что минимальное проективное представление неразложимого модуля является частично наклоняющим комплексом, описываются двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Также вычисляются кольца эндоморфизмов таких наклоняющих комплексов.

Любой двучленный комплекс $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1 \in \text{per-}A$ (сосредоточенный в 0 и 1) изоморфен прямой сумме минимального проективного представления некоторого модуля M и комплекса, состоящего из проективного модуля, сосредоточенного в 0. В первом пункте третьей главы доказывается критерий того, что минимальное проективное представление неразложимого модуля является частично наклоняющим комплексом: пусть A – симметрическая K-алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ – минимальное проективное представление модуля M, комплекс T является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0$. С помощью этого критерия в пункте два доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть A – алгебра, соответствующая дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины* 1. *Минимальное проективное представление неразложимого непроективного A-модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P.*

Из результатов Абе и Хошино следует, что в случае алгебры, соответствующей дереву Брауэра, для того, чтобы классифицировать все базисные двучленные наклоняющие комплексы $T = \oplus_{i=1}^n T_i$, необходимо и достаточно классифицировать наборы из n попарно ортогональных неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, ..., T_n\}$.

В третьем пункте приводится критерий (теорема 4) того, что сумма двух неразложимых частично наклоняющих комплексов T_i и T_j снова является частично наклоняющим комплексом (то есть того, что T_i и T_j ортогональны). Этот критерий формулируется в терминах диаграмм проективных представлений.

Пусть $T_i = P_0 \xrightarrow{f} P_1 \in \text{per-}A$ – минимальное проективное представление неразложимого непроективного модуля M, и пусть модуль M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P. В силу известной классификации неразложимых A-модулей, диаграмма модуля M является зигзагом. Пусть $P_0 = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$, $P_1 = \bigoplus_{l \in J} Ae_l$. Заметим, что в силу того, что у M нет повторяющихся композиционных факторов, и того, что M

не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P, каждый индекс может встречаться только один раз и только в одном из множеств. Двучленному комплексу $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$ сопоставим следующую диаграмму на колчане алгебры A.

Определение 3. *Отметим на колчане алгебры A вершины, соответствующие множеству $L \cup J$. Также отметим на колчане алгебры A путь из l в j, $l \in L$, $j \in J$, если у f есть ненулевая компонента между соответствующими прямыми слагаемыми P_0 и P_1. Полученную диаграмму будем называть диаграммой проективного представления $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$.*

Используя это определение, мы получаем взаимно однозначное соответствие между минимальными проективными представлениями непроективных модулей, неизоморфных $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P, и связными путями Θ на колчане алгебры A такими, что Θ – путь без самопересечений, – меняет ориентацию при каждой смене цикла и состоит больше, чем из одной вершины.

В шестом пункте диаграммы проективных представлений и теорема 4 интерпретируются в терминах пересечений некоторых кривых. Будем считать, что колчан алгебры A нарисован на той же плоскости, что и соответствующее дерево Брауэра, причем вершины колчана нарисованы в серединах ребер, которым они соответствуют, а в вершинах дерева Брауэра находятся проколы. Будем рассматривать кривые γ на плоскости $\mathbb{R}^2$ такие, что концы γ – это вершины дерева Брауэра, γ – кривая без самопересечений, γ не содержит никаких вершин дерева Брауэра, кроме своих концов. Кривую γ будем рассматривать с точностью до гомотопии в классе таких кривых. Будем предполагать, что, имея набор гомотопических классов таких кривых, мы всегда выбираем представителей с минимально возможным числом точек пересечения.

Пусть T_i – диаграмма минимального проективного представления модуля M такая, что соответствующий двучленный комплекс является частично наклоняющим. T_i состоит из некоторых стрелок колчана A; обозначим α_1, α_2 стрелки, выходящие из концов диаграммы T_i, принадлежащие T_i. Сопоставим T_i кривую γ_i следующим образом: кривая γ_i совпадает с T_i везде кроме α_1, α_2, конец T_i, из которого выходит α_1, подвинем вдоль ребра в ту вершину дерева Брауэра A, которая не соответствует циклу, на котором лежит α_1, то же сделаем со вторым концом T_i. Если конец T_i соответствует стоку, отметим его на γ_i красным цветом, истоку – синим. Если T_i – неразложимый проективный модуль, сопоставим ему кривую, совпадающую с соответствующим ребром, если T_i сосредоточен в 0, отметим оба конца, соответствующего ребра синим, если в 1 – красным. Заметим, что кривую γ_i, соответствующую частично наклоняющему комплексу, можно выбрать так, чтобы она не имела самопересечений и не являлась петлей. С помощью этой конструкции доказывается следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть T_i и T_j – два двучленных частично наклоняющих комплекса. $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда кривые, соответствующие T_i и T_j, либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из конечной вершины, причем эта вершина отмечена одним и тем же цветом на обеих кривых.*

В четвертом пункте третьей главы описываются кольца эндоморфизмов двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. С помощью этого описания доказывается, что над любой алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, существует двучленный наклоняющий комплекс T такой, что $\mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(T)$ изоморфно алгебре, соответствующей звезде Брауэра.

В пятом пункте в качестве примера разбирается случай алгебры A, соответствующей звезде Брауэра с кратностью 1. Для такой алгебры описываются все двучленные наклоняющие комплексы и их кольца эндоморфизмов. Также для любой алгебры B, соответствующей дереву Брауэра Γ с n ребрами и кратностью исключительной вершины 1, строится двучленный наклоняющий комплекс T над алгеброй A такой, что $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(T)$.

Публикации по теме диссертации

[1] **Антипов М.А., Звонарева А.О. (2013). Частично наклоняющие двучленные комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра. Записки научных семинаров ПОМИ, 413, 5–25.**

[2] **Звонарева А.О. (2014). Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра. Записки научных семинаров ПОМИ, 423, 132–165.**

[3] Звонарева А.О. (2014). О производной группе Пикара алгебры, соответствующей звезде Брауэра. Препринты ПОМИ РАН, препринт 09/2014, 1–31.

[4] Zvonareva A. (2012) Two-term tilting complexes over Brauer tree algebras. Workshop and International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2012) Abstracts. 87.