На правах рукописи

Заикин Артем Александрович

Асимптотическое разложение d-риска

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена на кафедре математической статистики института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научный руководитель:

Симушкин Сергей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математической статистики,
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»,

Официальные оппоненты:

Бурнашев Марат Валериевич,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
лаборатория №1 имени Пинскера,
ФБГУН «Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук».

Малов Сергей Васильевич,
кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
лаборатория «Центр генной биоинформатики им. Ф.Добржанского»,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке или на сайте ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук, А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Существует ряд задач по применениям математической статистики, в которых имеется реальная последовательность статистических экспериментов с полученными результатами наблюдений случайных выборок и принятых решений относительно параметра вероятностной модели. Это задачи контроля качества, медицинской диагностики, анализа активности генов, исследования характеристик большого числа малых областей и т.д. Каждому статистическому эксперименту соответствует значение параметра, которое допускает трактовку как реализация случайного элемента. Качество решающей функции относительно значений этого параметра в байесовской статистике обычно определяется с помощью априорного риска. Априорный риск является интегральным показателем качества решающей функции, в то время как для многих задач, особенно связанных с проверкой гипотез, требуются более тонкие характеристики. Одной из таких характеристик является d-риск, описанный Л.Н.Большевым и представляющий собой условное среднее значение потерь относительно σ-алгебры, порожденной решающей функцией.

Актуальность математических задач, решаемых в диссертации, объясняется в первую очередь практической важностью использования процедур статистического вывода, гарантирующих заданные ограничения на функцию d-риска. Когда существует реальная последовательность статистических экспериментов, и когда естественно и, в большей степени, необходимо применять байесовские методы, выполнение ограничений на классическую функцию риска не решает проблему гарантийности статистического вывода по существу. В таких случаях надо гарантировать заданные ограничения не на среднюю величину потерь при фиксированном значении выводного параметра, а на среднюю величину потерь среди статистических экспериментов, завершившихся принятием решения одного и того же решения d. Построение оптимальной, в том или ином смысле, d-гарантийной процедуры зачастую связано с большими трудностями вычислительного характера. Естественно поставить вопрос о построении асимптотически оптимальных d-гарантийных процедур. Поскольку функция d-риска представляет собой условное математическое ожидание от апостериорного риска, асимптотический анализ поведения функции d-риска не возможен без соответствующего анализа апостериорного распределения.

Асимптотический анализ апостериорного распределения является основным инструментом байесовской статистики, с помощью которого решаются задачи построения асимптотически оптимальных статистических решений и асимптотического анализа их риска. Основным результатом, на который опирается большинство таких исследований, является теорема Бернштейна-фон

Мизеса, которая состоит в асимптотической нормальности апостериорного распределения. Точности этого утверждения бывает недостаточно, и приходится прибегать к асимптотическим разложениям апостериорного распределения.

В современной литературе было предложено несколько асимптотических разложений апостериорного распределения, имеющих различные условия применимости, виды разложений и характеристики остатков.

Как теорема Бернштейна-фон Мизеса, так и асимптотические разложения допускают различные центрирования параметра. Полученные до сих пор разложения используют центрирование оценкой максимального правдоподобия, что затрудняет их применение для задач, связанных с вычислением асимптотики d-риска. Центрирование фиксированным (истинным) значением параметра представляется более удобным для вычисления d-риска в задаче проверки параметрических гипотез. Одной из интересных задач, решенных в диссертации, является задача выделения класса центрирующих функций, для которых справедливо асимптотическое разложение.

Важной принципиальной особенностью применения утверждений асимптотического характера при анализе поведения d-риска является требование равномерности остатков асимптотик и разложений апостериорного распределения. Поэтому актуальной задачей является также доказательство необходимой равномерности для полученных разложений.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью диссертационной работы является построение асимптотик и разложений d-риска для процедур оценивания и проверки гипотез и применение полученных асимптотик для решения смежных проблем, таких как нахождение приближения оценок с равномерно минимальным d-риском и нахождение асимптотики необходимого объема выборки для d-гарантийных процедур проверки гипотез.

Методология и методы исследования. Методы, используемые в диссертации, по большей части опираются на работы Ибрагимова и Хасьминского [1], [2]. Говоря конкретно, вывод асимптотического разложения апостериорного распределения опирается на результат этих статей относительно вероятностей больших отклонений статистики отношения правдоподобия. Это позволяет применять разложения Тейлора отношения правдоподобия в нужной области параметрического пространства.

Определение $\sqrt{n}$-состоятельности, а также некоторые замечательные утверждения о классе $\sqrt{n}$-состоятельных оценках были взяты из работ Ле Кама, в частности, из [3].

Полученные асимптотики апостериорного распределения и апостериорного риска применяются для нахождения асимптотик d-риска в задачах проверки гипотез и оценивания параметра. В случае проверки гипотез, однако, оптимальное решающее правило известно, и, таким образом, возможно напрямую вычислить d-риск, используя разложение апостериорного распределения параметра, центрированного точкой разделения гипотез. Для задачи оценивания распределение произвольной оценки неизвестно, поэтому приходится использовать грубые оценки d-риска, получаемые из его приближения апостериорным риском. Здесь уже используется разложение апостериорного распределения параметра, центрированного $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой. Класс $\sqrt{n}$-состоятельных оценок здесь используется как класс оценок, для которых справедлива используемая асимптотика.

Основные результаты:

В диссертации проводится построение новое асимптотическое разложение апостериорного распределения параметра, отличительной чертой которого является центрирование истинным значением параметра. Приводится асимптотическое разложение апостериорного распределения параметра, центрированного произвольной $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой. Для последнего разложения доказывается равномерная сходимость относительно истинных значений параметра распределения.

В диссертации выведена асимптотическая формула для необходимого объема выборки при d-гарантийном различении гипотез, аналогичная [4], при несколько иных условиях на вероятностную модель и доказательство которой опирается на результаты, полученные в диссертации.

Для схемы испытаний Бернулли выводится асимптотика дефекта размера оптимального критерия в классе нерандомизированных критериев. Для рандомизированного критерия приводится асимптотическое (по величине области безразличия) разложение необходимого объема выборки. Для этого же критерия строятся асимптотические разложения для d-рисков до порядка $n^{-3/2}$ включительно. Критерий, гарантирующий ограничения на вероятности ошибок первого и второго рода и критерий, гарантирующий ограничения на d-риски сравниваются на основе величины области безразличия и параметров априорного распределения.

Сформулировано определение оценки с асимптотически равномерно минимальным d-риском и доказано, что оценка максимального правдоподобия является таковой в классе $\sqrt{n}$-состоятельных оценок параметра.

Научная новизна. Асимптотическое разложение апостериорного распределения параметра, центрированного произвольной $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой, является обобщением разложения Джонсона [5] в том смысле, что оценка максимального правдоподобия является $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой.

Разложение d-рисков для проверки гипотез в схеме испытаний Бернулли является первым полученным асимптотическим разложением d-риска.

Предложен новый подход к построению оценок с асимптотически равномерно минимальным d-риском, в частности, предложен новый метод к доказательству того, что оценка максимального правдоподобия имеет асимптотически равномерно минимальный d-риск.

Теоретическая и практическая значимость. Асимптотическое разложение апостериорного распределения является важным шагом для получения стохастических разложений оценок при больших объемах наблюдений. См. в связи с этим статью Бурнашева [6], а также статьи [7], [8], в которых применяются разложения апостериорного риска, легко получаемые из разложения апостериорного распределения.

Определение оценки с асимптотически равномерно минимальным d-риском является новым в своем роде определением оптимальности, относящейся к d-риску. Оно может быть использовано для формулировки новых определений оптимальности и получения связанных с ними результатов, в том числе и для неасимптотических случаев.

Для проверки гипотез в схеме испытаний Бернулли получено несколько результатов, касающихся поведения необходимого объема выборки, вероятностей ошибок и величины d-рисков в зависимости от значений параметров и вида проверяемых гипотез.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015»; Двенадцатая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы»; Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии и их приложениям. Был сделан также доклад на городском семинаре Санкт-Петербурга по теории вероятностей и математической статистике.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в статьях [9], [10], [11] и в тезисах конференций [12], [13].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 127 страниц. В диссертации содержится 3 рисунка и 1 таблица. Библиография включает 37 наименований.

Содержание работы

Во всех главах вероятностная модель представлена выборкой $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ с распределением наблюдения $\mathbf{P}_\theta$. Мы предполагаем всюду, что у $\mathbf{P}_\theta$ существует плотность $p(x|\theta)$ по некоторой мере ν. Значение параметра θ неизвестно и является реализацией случайной величины ϑ из абсолютно непрерывного распределения $\mathbf{G}$ с плотностью $g(\theta)$ по лебеговской мере. Апостериорная вероятность попадания параметра ϑ в борелевское множество A

определяется как

$$\mathbf{P}\left(\vartheta \in A|\mathbf{X}\right) = \frac{\int_A \prod_{i=1}^n p\left(X_i|\theta\right) g(\theta) d\theta}{\int_\Theta \prod_{i=1}^n p\left(X_i|\theta\right) g(\theta) d\theta}.$$

В первой главе диссертации собраны результаты, относящиеся к асимптотическому поведению апостериорного распределения и апостериорного риска. Первая глава разделена на две части. Первая часть содержит результаты, относящиеся к разложению апостериорного распределения параметра, центрированного фиксированным значением параметра.

Условия $\mathbb{D}_{\theta_0}(M)$, упоминаемые в следующей теореме, перечислены на странице 22 диссертации. Явный вид коэффициентов $H_m(z)$ приведен на странице 25 диссертации.

Теорема 0.1. *Пусть семейство распределений* $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ *удовлетворяет условиям* $\mathbb{D}_{\theta_0}(M)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - \theta_0) < z|\mathbf{X}\right) = \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z) + n^{-(M+1)/2}\omega_n(z), \qquad (1)$$

причем

$$\sup_z H_m(z) = O_{\mathbf{P}_{\theta_0}}(1), m = 0, \ldots, M,$$

$$\sup_z \omega_n(z) = O_{\mathbf{P}_{\theta_0}}(1),$$

где $O_{\mathbf{Q}}(1)$ *значит плотную (равномерно ограниченную) последовательность случайных величин относительно меры* $\mathbf{Q}$.

Это разложение уточняет теорему Бернштейна-фон Мизеса в том смысле, что главный член асимптотики (1) совпадает со значением в точке z предельной функции распределения упомянутой теоремы.

Метод построения указанного разложения основан на технике анализа асимптотического поведения логарифма правдоподобия в условиях локальной асимптотической нормальности, разработанной в трудах Ибрагимова и Хасьминского [1], [2] и модифицированной под наши цели.

Аналогичными методами находится разложение для математических ожиданий относительно апостериорного распределения для функций, имеющих полиномиальную мажоранту. Говорят, что функция $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет полиномиальную мажоранту, если существует такой полином $P(x)$, что $|w(x)| \leq P(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Коэффициенты $H_{m,w}$ разложения в следующей теореме приведены на странице 32 диссертации.

Теорема 0.2. *Пусть семейство распределений $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условиям $\mathbb{D}_{\theta_0}(M)$. Тогда для любой функции w, имеющей полиномиальную мажоранту, найдется n_0, что для всех $n > n_0$ $\mathbf{P}_{\theta_0}$-почти наверное выполняется $\mathbf{E}\left\{w\left(\sqrt{n}(\vartheta-\theta_0)\right)\Big|\mathbf{X}\right\} < \infty$, и*

$$\mathbf{E}\left\{w\left(\sqrt{n}(\vartheta-\theta_0)\right)\Big|\mathbf{X}\right\} = \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_{m,w} + n^{-(M+1)/2}\omega_n, \tag{2}$$

причем

$$H_{m,w} = O_{\mathbf{P}_{\theta_0}}(1), m = 0, \ldots, M,$$
$$\omega_n = O_{\mathbf{P}_{\theta_0}}(1).$$

Замечательно, что теорема 0.2 не требует ввода дополнительных ограничений, и при этом содержит утверждение о существовании всех апостериорных моментов (случай $w(x) = x^r, r > 0$).

Во второй части первой главы получены результаты, относящиеся к асимптотике апостериорного распределения параметра, центрированного $\sqrt{n}$- состоятельной оценкой.

Определение 0.1. *Пусть K — некоторый компакт из Θ. Будем говорить, что оценка T_n принадлежит классу оценок $\mathbb{C}(K)$ параметра $\theta \in \Theta$, если T_n измерима и*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b > 0 \ \sup_n \mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}|T_n - \theta| > b\right) < \varepsilon.$$

Тот факт, что оценка максимального правдоподобия, а также фиксированная точка являются $\sqrt{n}$-состоятельными оценками (оценка $T_n = \theta_0$ принадлежит $\mathbb{C}(\{\theta_0\})$), подразумевает, что полученные разложения обобщают более ранние результаты, в том числе полученные другими авторами. Однако для этого пришлось потребовать несколько более строгие условия.

Следующая теорема устанавливает асимптотическую нормальность апостериорного распределения параметра, центрированного $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой. Условия $\mathbb{D}(K)$ приведены на странице 37 диссертации. Асимптотическое среднее обозначено $\mu_n = \Delta_1(T_n)(\sqrt{n}I(T_n))^{-1}$, асимптотическая дисперсия $\sigma_n^2 = (I(T_n))^{-1}$, где $\Delta_1(\theta)$ — функция вклада в точке θ, $I(\theta)$ — информация Фишера в точке θ.

Теорема 0.3. *Пусть K — компакт, лежащий в Θ вместе с некоторой своей окрестностью и оценка $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Тогда при выполнении условий $\mathbb{D}(K)$*

$$\sup_{\theta\in K} \mathbf{P}_\theta\left(\left\|\mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) \in \cdot\ |\mathbf{X}\right) - \mathcal{N}\left(\ \cdot\ |\mu_n, \sigma_n^2\right)\right\|_{TV} > \varepsilon\right) \to 0,$$

где $\|\mathbf{P}(\cdot)-\mathbf{Q}(\cdot)\|_{TV}$ *— расстояние по общей вариации между мерами* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{Q}$*, а* $\mathcal{N}(A|m,s^2)$ *– распределение нормального закона со средним* m *и дисперсией* s^2*, вычисленное на борелевском множестве* A*.*

Аналогичный результат этой теоремы был получен Ле Камом в его монографии [14]. Отличие заключается в том, что в теореме 0.3 сходимость имеет равномерный характер (по компакту K). Последнее обстоятельство играет существенную роль при выводе утверждений об асимптотике апостериорных средних, использующейся в главе 4.

Теорема 0.4. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{D}(K)$*, оценка* T_n *такова, что величина* $\sqrt{n}(T_n-\theta)$ *имеет* $r>0$ *моментов по распределению* $\mathbf{P}_\theta, \theta\in K$*, а функция* w *имеет полиномиальную мажоранту порядка не выше* r*. Тогда найдется* n_0*, что для всех* $n>n_0$ *и для всех* $\varepsilon>0$

$$\sup_{\theta\in K}\mathbf{P}_\theta\left(\left|\mathbf{E}\left\{w\left(\sqrt{n}(\vartheta-T_n)\right)\Big|\mathbf{X}\right\}-\int w(h)\varphi(h|\mu_n,\sigma_n^2)dh\right|>\varepsilon\right)\to 0,$$

где $\varphi(\cdot|\mu,\sigma)$ *— функция плотности нормального распределения со средним* μ *и дисперсией* σ^2*.*

Важным свойством является доказанная равномерность остатка по компакту K. В приложениях свойство асимптотической нормальности чаще всего целесообразно использовать в смысле сходимости по совместному распределением параметра и выборки $\mathbf{P}$.

Следствие 0.1. *Пусть для любого компакта* $K\in\Theta$*, входящего в* Θ *с некоторой окрестностью, оценка* $T_n\in\mathbb{C}(K)$*, и выполнены условия* $\mathbb{D}(K)$*. Тогда*

$$\left\|\mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta-T_n)\in B|\mathbf{X}\right)-\Phi\left(B|\mu_n,\sigma_n^2\right)\right\|_{TV}\xrightarrow{\mathbf{P}}0.$$

Оставшаяся часть главы 1 посвящена асимптотическим разложениям. Для этого помимо условий $\mathbb{D}(K)$ необходимо потребовать существование дополнительных производных у плотности наблюдений и априорной плотности и соответствующих моментов. Условия $\mathbb{D}(M,K)$, используемые для построения разложения, приведены на странице 52 диссертации. Явный вид коэффициентов $H_m(z)$ приведен на странице 53 диссертации.

Теорема 0.5. *Пусть* K *— компакт, лежащий в* Θ *вместе с некоторой своей окрестностью и оценка* $T_n\in\mathbb{C}(K)$*. Пусть для некоторого целого*

$M \geq 0$ выполнены условия $\mathbb{D}(M, K)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, что

$$\sup_n \sup_{\theta \in K} \mathbf{P}_\theta \left[\left| \mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) < z | \mathbf{X}\right) - \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z) \right| > C n^{-(M+1)/2} \right] < \varepsilon,$$

$$\sup_z H_m(z) = O_{\mathbf{P}_\theta}(1), \text{ равномерно по } \theta \in K, \ m = 0, \ldots, M.$$

Метод построения разложения теоремы 0.5 идентичен методу, примененному в теореме 0.1, однако доказательство равномерности по компакту K требует большего внимания работе с остатками разложений.

По аналогии с выводом теоремы 0.2 для случая центрирования фиксированной точкой, используя доказательство 0.5, выводится следующее утверждение.

Теорема 0.6. *Пусть выполнены условия $\mathbb{D}(M, K)$, оценка T_n удовлетворяет $\sup_{\theta \in K} \mathbf{E}_\theta(\sqrt{n}|T_n - \theta|)^r < \infty, r > 0$, а функция w имеет полиномиальную мажоранту, чей порядок не превышает r. Тогда существует n_0, для $n > n_0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, что*

$$\sup_n \sup_{\theta \in K} \mathbf{P}_\theta \left[\left| \mathbf{E}\left\{ w\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n)\right) \Big| \mathbf{X} \right\} - \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_{m,w} \right| > C n^{-(M+1)/2} \right] < \varepsilon,$$

где коэффициенты $H_{m,w}$ определены на странице 61 диссертации, причем

$$H_{m,w} = O_{\mathbf{P}_\theta}(1) \text{ равномерно по } \theta \in K, \ m = 0, \ldots, M.$$

Для теорем 0.5 и 0.6 приведен аналог следствия 0.1, в котором утверждается справедливость асимптотических разложений по мере $\mathbf{P}$. Доказательство при этом остается идентичным.

Во второй главе рассматривается задача нахождения асимптотики (при стремящихся к нулю ограничениях на ошибки) необходимого объема выборки (НОВ) в задаче различения гипотез $H_0 : \theta < \theta_0, \ \theta_0 \in \Theta$ и $H_1 : \theta \geq \theta_0$. Оптимальный критерий, гарантирующий ограничения на d-риски, известен [15], и основывается на статистике $R(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(\vartheta < \theta_0 | \mathbf{X})$ — апостериорной вероятности того, что параметр принадлежит области нулевой гипотезы. Рассматривается ситуация, когда ограничения на d-риски $\beta_0, \beta_1 \to 0$. В этом случае НОВ $n^* \to \infty$ и поэтому для анализа асимптотики d-рисков можно применять полученные ранее утверждения об асимптотическом распределении апостериорного распределения. В главе 2 используется лишь теорема Бернштейна-фон Мизеса, то есть асимптотическая нормальность апостериорного распределения.

Полученная в диссертации асимптотика совпадает с результатом статьи Володина и Новикова [4], однако использует несколько иной подход, и требует немного другие условия применения.

Упомянутые ниже в теореме условия $\mathbb{D}_{\theta_0}$ перечислены на странице 66 диссертации.

Теорема 0.7. *Пусть выполнены условия $\mathbb{D}_{\theta_0}$. Пусть $n^* = n^*(\beta_0, \beta_1)$ — НОВ для различения гипотез H_0 и H_1 при ограничениях на d-риски β_0 и β_1. Пусть $\tilde{c}$ и $\tilde{n}$ определяются как c и n, которые являются решениями уравнений*

$$\frac{\varphi(q_c) + cq_c - q_c\beta_0}{\varphi(q_c) + cq_c - q_c(1-\beta_1)} = \frac{\beta_0 G_0}{\beta_1 G_1},$$

$$n = \frac{g(\theta_0)^2(2\varphi(q_c) + 2cq_c - q_c(1+\beta_0-\beta_1))^2}{I(\theta_0)(\beta_0 G_0 + \beta_1 G_1)^2}.$$

Если $\beta_0 \to 0$, $\beta_1 \to 0$ так, что $\beta_0/\beta_1 \to K > 0$, то $n^*/\tilde{n} \to 1$.

Третья глава посвящена приложению выработанных техник для случая, когда вероятностная модель сведена к схеме испытаний Бернулли с неизвестной вероятностью успеха θ. Так, рассматривается задача проверки гипотезы $H_0 : \theta < \theta_0$, и для гарантийной проверки этой гипотезы предлагаются два критерия: классический, для которого выполняются ограничения на вероятности ошибок, и d-апостериорный, который гарантирует ограничения на d-риски. Так как для классического гарантийного критерия необходимо задание альтернативы $H_1 : \theta > \theta_1$ с областью безразличия $\theta_1 > \theta_0$, а для d-гарантийного критерия необходимо задание априорного распределения $\mathbf{G}$ параметра θ, представляется естественным сравнение этих характеристик двух критериев (при прочих равных). Асимптотические результаты в этой главе получены с применением разложения Эджворта к распределению статистики $T = \sum_{i=1}^n X_i$.

Сначала в третьей главе оценивается дефект размера наилучшего критерия в классе нерандомизированных критериев, который основан на статистике T. Строится разложение вероятности ошибки до порядка n^{-1} включительно:

Теорема 0.8. *Если $n \geq N$, то при некотором $R > 0$ для дефекта критерия $D(n) = \alpha - P\left(T \geq C_n(\alpha)\right)$ имеет место неравенство*

$$D(n) \leq \frac{V}{n} + R \cdot n^{-3/2},$$

где α — уровень значимости, $C_n(\alpha)$ — критическая константа, соответствующая объему выборки n и уровню значимости α, а константа V известна и зависит только от θ_0 и α.

Оценивается также асимптотика для минимального объема наблюдений $n(\alpha, \beta)$, при котором гарантируются ограничения на вероятности ошибок α и β для нерандомизированного критерия при малых размерах области безразличия:

Теорема 0.9. *Существует такая положительная константа Δ^*, что при всех $\theta_1 - \theta_0 = \Delta < \Delta^*$ значение $n(\alpha, \beta)$ не превосходит величины*

$$\frac{a^2}{\Delta^2} + \frac{2(b+2)}{\Delta} + \frac{2ca - (b+2)^2}{a^2} + 1,$$

где коэффициенты a, b, c определены и зависят только от $\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta$.

Для рандомизированного критерия выводится асимптотическое разложение НОВ.

Теорема 0.10. *Пусть n – необходимый объем выборки рандомизированного критерия. Тогда существует такое число Δ^*, что для всех $\Delta < \Delta^*$ выполняется $|n - n^*| \leq 1$, где*

$$n^* = \frac{a^2}{\Delta^2} + \frac{2b}{\Delta} + \frac{2c^* a - b^2}{a^2}.$$

При d-гарантийной проверке гипотез необходимо введение априорного распределения. Оно полагается равным бета-распределению с известными параметрами a и b. Таким образом, проверяется гипотеза $H_0 : \theta < \theta_0$ против альтернативы $H_1' : \theta \geq \theta_0$. Для этого используется нормированная статистика

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + U - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}},$$

где $U \sim \mathbb{U}([0;1])$ и не зависит от наблюдений X_i.

Для оптимального (основанного на T_n) критерия выводится асимптотическое разложение d-рисков

$$\mathcal{R}_0 = \mathbf{P}\left(\vartheta < \theta_0 | T_n \geq C\right), \quad \mathcal{R}_1 = \mathbf{P}\left(\vartheta \geq \theta_0 | T_n < C\right)$$

до порядка $n^{-3/2}$ включительно:

Теорема 0.11. *Пусть фиксировано C. Тогда для d-рисков $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_1$ справедливы следующие асимптотические представления:*

$$\mathcal{R}_0 = \frac{Q_1}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2}{n} + \frac{Q_3}{n^{3/2}} + O\left(n^{-2}\right),$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{W_1}{\sqrt{n}} + \frac{W_2}{n} + \frac{W_3}{n^{3/2}} + O\left(n^{-2}\right),$$

где явный вид коэффициентов $Q_1, Q_2, Q_3, W_1, W_2, W_3$ приведен на странице 99 диссертации. Эти коэффициенты зависят только от C, θ_0 и параметров априорного распределения a и b.

В конце третьей главы проводится сравнение двух подходов на основе величины зоны безразличия и параметров априорного распределения при равных НОВ и ограничениях на вероятности ошибок и d-риски. Приводятся способ сравнения и графики, демонстрирующие различие двух критериев.

Четвертая глава посвящена оценкам, оптимизирующим d-риск. Так как работа с оценками с равномерно минимальным d-риском сопряжена с не преодоленными пока трудностями, вводится новое понятие оценок с асимптотически равномерно минимальным d-риском.

Определение 0.2. *Измеримая оценка δ_n^* называется оценкой с ϕ_n-асимптотически ($\phi_n \to 0$) равномерно минимальным d-риском в классе оценок $\mathbb{T}$, если*

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{R}_{\delta_n^*}(\delta_n^*) \geq \mathcal{R}_{\delta_n}(\delta_n^*) + \phi_n\right) \to 0$$

для любой другой оценки $\delta_n \in \mathbb{T}$.

Идея, преследуемая в четвертой главе — показать, что оценка максимального правдоподобия (ОМП) является оценкой с асимптотически равномерно минимальным d-риском. Само понятие оценки с асимптотически равномерно минимальным d-риском введено потому, что неясно, как доказать близость ОМП и оценки с равномерно минимальным d-риском. Более того, условия существования оценок с равномерно минимальным d-риском неизвестны, поэтому приходится обходиться только близостью d-риска ОМП к оптимальному уровню.

Используя результаты главы 1, касающиеся поведения апостериорного риска, удалось доказать два следующих результата. Условия, выдвигаемые к вероятностной модели, совпадают с условиями $\mathbb{D}(\Theta)$ (более точно, должны быть выполнены условия $\mathbb{D}(K)$ для любого внутреннего компакта $K \subset \Theta$) асимптотической нормальности апостериорного распределения параметра, центрированного $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой.

Теорема 0.12. *Пусть выполнены условия $\mathbb{D}(\Theta)$, и задана функция потерь $L(\theta_1, \theta_2) = |\theta_1 - \theta_2|^r, r > 1$. Тогда найдется последовательность $\phi_n = o(n^{-r/2})$, такая, что оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_n$ является оценкой с ϕ_n-асимптотически равномерно минимальным d-риском в классе оценок T_n, удовлетворяющих $\sup_{\theta \in K} \mathbf{E}_\theta(\sqrt{n}|T_n - \theta|)^r < \infty$.*

Теорема 0.13. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{D}(\Theta)$ *и пусть* Θ *ограничено. Тогда найдется последовательность* $\phi_n = o(1)$, *такая, что оценка максимального правдоподобия* $\widehat{\theta}_n$ *является оценкой с* ϕ_n*-асимптотически равномерно минимальным* d*-риском в классе* $\sqrt{n}$*-состоятельных оценок.*

Список литературы

1. *Ибрагимов И. А.*, *Хасьминский Р. З.* Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок в гладком случае. I. Исследование отношения правдоподобия // Теория вероятностей и ее применения. — М, 1972. — Т. 17, № 3. — С. 469—486.
2. *Ибрагимов И. А.*, *Хасьминский Р. З.* Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок в гладком случае. II. Предельные теоремы для апостериорной плотности и байесовских оценок // Теория вероятностей и ее применения. — М, 1973. — Т. 18, № 1. — С. 78—93.
3. *Le Cam L. M.* On the asymptotic theory of estimation and testing // Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. — 1956. — Т. 1. — С. 129—156.
4. *Володин И. Н.*, *Новиков А. А.* Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез // Исследования по прикладной математике. — 1999. — Т. 21. — С. 3—41.
5. *Johnson R. A.* Asymptotic expansions associated with posterior distributions // The Annals of Mathematical Statistics. — 1970. — Т. 41, № 3. — С. 851—864.
6. *Бурнашев М. В.* Исследование свойств второго порядка статистических оценок в схеме независимых наблюдений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1981. — Т. 45, № 3. — С. 509—539.
7. *Гусев С. И.* Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае. I. Разложения случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. — М, 1975. — Т. 20, № 3. — С. 488—514.
8. *Ghosh J. K.*, *Sinha B. K.*, *Joshi S. N.* Expansions for posterior probability and integrated Bayes risk // Statistical Decision Theory and Related Topics III. — 1982. — Т. 1. — С. 403—456.

14. *Le Cam L. M.* Asymptotic methods in statistical theory. (Springer series in statistics). — New York : Springer-Verlag New York Inc., 1986.
15. *Симушкин С. В.* Оптимальные d-гарантийные процедуры различения двух гипотез // Рукопись деп. в ВИНИТИ. — 1981. — Т. 5547-81.

Статьи автора в рецензируемых журналах из списка ВАК

9. *Заикин А. А.* Дефект размера нерандомизированного критерия и влияние рандомизации на сокращение необходимого объема выборки при тестировании вероятности успеха в схеме испытаний Бернулли // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. — Т. 59, № 3. — С. 417—435.

10. *Zaikin A. A.* On asymptotic expansion of posterior distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2016. — Т. 37, № 4. — С. 515—525.

11. *Заикин А. А.* Асимптотическое разложение апостериорного распределения параметра, центрированного $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2016. — Т. 454. — С. 121—150.

Прочие публикации автора

12. *Заикин А. А.* Асимптотическое разложение апостериорного распределения параметра вероятностной модели // Труды математического центра имени И. Н. Лобачевского: Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференциии. Т. 51. — Казань, 2015. — С. 190—192.

13. *Заикин А. А.* Оценки с асимптотически равномерно минимальным d-риском // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. — Казань : Казанский университет, издательство академии наук РТ, 2016. — С. 171—172.

16. *Заикин А. А.* Асимптотика апостериорного распределения // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015». — Москва, 2015.