На правах рукописи

Васильев Вадим Львович

(2,3)-ПОРОЖДЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2014

Работа выполнена в лаборатории математической логики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:
ВСЕМИРНОВ Максим Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, ученый секретарь ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:
ВАСИЛЬЕВ Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории теории групп ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

НУЖИН Яков Нифантьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Ведущая организация:
ФГБОУ ВПО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Защита состоится «_____» ___________________ 2014 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, каб. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук: **http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/dissertatiton/васильев-вадим-львович**.

Автореферат разослан «_____» ___________________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.02
доктор физико-математических наук А. В. Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одна из важных областей исследований в теории групп посвящена вопросам нахождения минимального количества элементов, порождающих группу, а также определения порядков данных элементов. Особое место в этой области отводится работам по теории (2,3)-порожденных групп, то есть групп, порождаемых инволюцией и элементом порядка 3. Именно к подобным исследованиям относится данная диссертационная работа. Важность темы (2,3)-порождения групп связана с тем, что, согласно результату Ф. Клейна и Р. Фрике [8], эпиморфные образы модулярной группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, за исключением трех циклических групп $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, — это в точности (2,3)-порожденные группы.

С начала XX века совместными усилиями многих авторов удалось положительно решить вопрос о (2,3)-порождении для большого количества представителей таких важных классов групп, как конечные простые группы и классические матричные группы над конечнопорожденными коммутативными кольцами.

Наиболее «простым» для исследования оказался случай одного из классов конечных простых групп — знакопеременных групп A_n. Еще в 1901 г. Дж. Миллер в статье [11] доказал, что данные группы, за исключением A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, могут быть порождены инволюцией и элементом порядка 3. Для большинства конечных простых классических групп М. Либек и А. Шалев в 1996 г. в работе [10] доказали следующий результат:

Теорема 1. *Пусть G пробегает бесконечное семейство групп, состоящее из конечных простых классических или знакопеременных групп, за исключением $\mathrm{PSp}_4(q)$. Тогда вероятность того, что G порождается выбранными произвольным образом инволюцией и элементом порядка 3, стремится к 1 при $|G| \to \infty$.*

Если $G = \mathrm{PSp}_4(p^\alpha)$, где $p > 3$ — простое число, то вышеуказанная вероят-

ность стремится к $1/2$ при $|G| \to \infty$.

Подобный «вероятностный» подход не дает представления о явном виде образующих групп. Однако за последние 30 лет было опубликовано большое количество работ, доказывающих (2,3)-порождение отдельных серий классических матричных групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами (в частности, над конечными полями).

Наиболее хорошо изучены на данный момент полные линейные группы и специальные линейные группы над кольцом целых чисел. Случай больших размерностей успешно исследован М. К. Тамбурини и соавторами в [13], [14], [15]: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ будет (2,3)-порождена при $n \geq 13$, а $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — при $n = 13$ и $n \geq 15$. В случае малых размерностей хорошо известно, что эти группы не будут (2,3)-порождены при $n = 2, 4$. В «Коуровской тетради» [4] М. Кондер поставил вопрос о (2,3)-порождении групп $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Отрицательный ответ независимо друг от друга был получен Я. Н. Нужиным в [5] и М. К. Тамбурини с Р. Цукка в [18]. В 2003 г. А. Ю. Лузгарев и И. М. Певзнер в [3] представили редукционную теорему для группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, сведя задачу поиска образующих к рассмотрению всего десять вариантов возможных пар матриц, а в 2006 г. аналогичный результат для $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ был доказан М. А. Всемирновым в [1]. Позднее М. А. Всемирнов показал в [2], [19], [20] что группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, где $n = 5, \ldots, 12$, а также $\mathrm{GL}_{14}(\mathbb{Z})$ являются (2,3)-порожденными группами.

Структура гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ была менее изучена. Так, в 1980 г. П. Бендер в статье [6] показал, что $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ является $(2, 12)$-порожденной группой, а в 1996 г. Х. Ишибаши в [9] доказал, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, где $n \geq 3$, является $(2, m)$-порожденной, где $m = 12(n-1)$ при четном n и $m = 6(n-1)$ при нечетном n.

При этом для многих симплектических групп над конечными полями известно, что они являются $(2, 3)$-порожденными группами. М. Каццола и Л. Ди Мартино в 1993 г. в [7] показали, что группы $\mathrm{PSp}_4(p^n)$, где $p \neq 2, 3$, будут (2,3)-порождены. В 1994 г. М. К. Тамбурини, Дж. Уилсон и Н. Гавиоли доказали в [17] (2,3)-порожденность групп $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, где q — нечетное число, при $n \geq 37$. Данный результат был получен как следствие более общей теоремы для элементарных гиперболических симплектических групп достаточно большого ранга над конечнопорожденными коммутативными кольцами, содержащими обратимую двойку. В работе П. Санкини и М. К. Тамбурини [13] представлена улучшенная оценка на n снизу: группы $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где q — нечетно, будут (2,3)-порождены при $n \geq 25$.

Вместе с тем, про ряд гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ при малом значении n хорошо известно, что они не являются (2,3)-порожденными: при $n = 1$ — в силу того, что $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, при $n = 2$ — в силу того, что $\mathrm{PSp}_4(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(3)$ не являются (2,3)-порожденными группами ([10]). Отметим, что $\mathrm{PSp}_4(3^n)$ может быть порождена двумя элементами, один из которых инволюция, что доказано М. Пеллегрини, М. К. Тамбурини и М. А. Всемирновым в 2012 г. в работе [12]. Также М. А. Всемирнов в совместной с соискателем статье [22] доказал, что группа $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$ не является (2,3)-порожденной. Более того, в этой статье была выдвинута гипотеза:

Гипотеза 1. *Гиперболические симплектические группы* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ *являются* $(2,3)$*-порожденными в точности при* $n \geq 4$*.*

В диссертационной работе соискатель, в частности, доказывает справедливость гипотезы 1 для случаев $n = 4, 5$ и $n \geq 25$.

Цель работы. Основной целью кандидатской работы является исследование вопроса о (2,3)-порождении гиперболических симплектических групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами, в том числе, над кольцом целых чисел и над кольцами с дополнительными условиями (аддитивное порождение определенным множеством).

Методы исследований. В работе используются методы линейной алгебры, методы теории групп, в частности, методы, основанные на применении теоремы Жордана о транзитивных группах перестановок, а также вычислительные методы (применение систем компьютерной алгебры).

Теоретическая и практическая ценность. Кандидатская диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут найти дальнейшее применение в исследованиях структуры матричных групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами, в частности при изучении гиперболических симплектических групп.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Доказано, что, если R — коммутативное кольцо, аддитивно порождаемое множеством $\{s^{2k}, 2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого $s \in R^*$, то при $n \geq 25$ элементарные гиперболические симплектические группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ являются (2,3)-порожденными. В частности, доказана $(2,3)$-порожденность гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ при $n \geq 25$.

2. Доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$, где R — коммутативное кольцо, порождаемое элементами $1, u_1, \ldots, u_l$, при $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$. В частности, доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l])$, где $l \geq 1$, при $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$.

3. Как следствие из результатов пунктов 1 и 2, доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$, где α — алгебраическое число, при $n \geq 37$. Более того, доказано, что группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}[\omega])$ будут $(2,3)$-порождены при $n \geq 25$.

4. Доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$.

Все полученные результаты являются конструктивными, то есть матрицы порядка 2 и 3 соответственно, порождающие рассматриваемые группы, представляются в явном виде.

Апробация работы. Результаты кандидатской работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: на Санкт-Петербургском городском семинаре по дискретной математике, на Санкт-Петербургском городском семинаре по алгебраическим группам, на Санкт-Петербургском городском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева, на международной конференции «Методы логики в математике V» (1 июня — 7 июня 2008 г., г. Санкт-Петербург), на молодежной школе-конференции «Современные проблемы алгебры и математической логики» (22 сентября — 3 октября 2011 г., г. Казань). Кроме того, работа над темой диссертации была поддержана грантом РФФИ 09-01-00784-а и грантом Правительства Санкт-Петербурга по итогам конкурса грантов для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2011 г. (диплом победителя серия ПСП № 11077).

Публикации. По теме кандидатской диссертации автором опубликовано 7 работ: [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]. В том числе, 3 работы ([22], [23], [24]) опубликованы в международных журналах, индексируемых Web of Science, и одна работа ([21]) опубликована в отечественном журнале, включенном в список ВАК. Все результаты, включенные в диссертационную работу, принадлежат лично соискателю.

Работа [22] написана в соавторстве, соискателю принадлежит теорема 2 (о (2,3)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$) и следствие 4 (о (2,3,30;10)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$). Соавтору принадлежит доказательство теоремы 1, а также идея поиска подходящих образующих, описанная в разделе 3.

В [27] представлены тезисы выступления на международной конференции, на котором был анонсирован результат для $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$. Подробное доказательство данного результата позднее было опубликовано в [22] (вклад соискателя и соавтора приведен выше).

Работа [23] написана в соавторстве, соискателю принадлежат теорема 2.1 (о (2,3)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$) и леммы 3.1–3.6. Соавтору принадлежит общее руководство работой, идея поиска образующих, описанная в замечании 2.2, идея поиска матриц g_i, описанная в начале доказательства леммы 3.2, а также идея о переходе от верхних блочно-треугольных матриц к нижним блочно-треугольным матрицам, описанная в начале доказательства леммы 3.6.

Работа [24] написана в соавторстве, где соавтору принадлежит общая конструкция матриц x, y, представленная в разделе 2 статьи [24], а также общая схема доказательства. Соискателю принадлежат подробные детали доказательств.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 102 страницах и состоит из общей характеристики работы, 3 глав, разделенных на 9 параграфов, и списка литературы. Библиография состоит из 50 наименований.

Содержание диссертации

Во вводной части диссертации приведена общая характеристика работы, включающая в себя такие разделы, как актуальность темы исследования, основные результаты диссертации, структура диссертации.

Глава 1. Введение.

В §1.1 приводятся основные обозначения, использующиеся в диссертации, а также следующие основные определения:

Определение 1.1. Группа G называется (n, m)-*порожденной*, если существуют элементы $x, y \in G$ порядка n и m соответственно, порождающие группу G.

Определение 1.2. Группа G называется $(n, m, k; l)$-*порожденной*, если существуют элементы $x, y \in G$, такие, что $\langle x, y\rangle = G$ и при этом

$$x^n = y^m = (xy)^k = [x, y]^l = 1.$$

Определение 1.3. Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Определим *гиперболическую симплектическую группу* $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$ следующим образом:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \;\middle|\; g^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Определение 1.4. Пусть R — коммутативное кольцо с 1. *Элементарной гиперболической симплектической группой* $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ будем называть подгруппу

$\mathrm{Sp}_{2n}(R)$, которая порождена следующими матрицами:

$$\begin{aligned}
E^{(1)}_{i,j}(u) &= \begin{cases} I_{2n} + u \cdot (e_{i,n+j} + e_{j,n+i}), & \text{если } 1 \le i \ne j \le n, \\ I_{2n} + u \cdot e_{i,n+i}, & \text{если } 1 \le i = j \le n, \end{cases} \\
E^{(2)}_{i,j}(u) &= \begin{cases} I_{2n} + u \cdot (e_{n+i,j} + e_{n+j,i}), & \text{если } 1 \le i \ne j \le n, \\ I_{2n} + u \cdot e_{n+i,i}, & \text{если } 1 \le i = j \le n, \end{cases} \\
E^{(3)}_{i,j}(u) &= I_{2n} + u \cdot e_{i,j} - u \cdot e_{n+j,n+i}, \ \text{если } 1 \le i \ne j \le n,
\end{aligned}$$

где u пробегает всевозможные элементы из R.

В §1.2 приводятся определения и факты из теории групп, которые используются при доказательстве результатов, представленных в диссертационной работе.

Глава 2. Группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ большого ранга.

Один из главных результатов главы — доказательство того, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ являются (2,3)-порожденными группами при $n \ge 25$. Это утверждение следует из более общего результата о том, что для любого конечнопорожденного коммутативного кольца R и достаточно большого значения n группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ будет (2,3)-порожденной. Кроме того, в главе показывается, что можно улучшить оценку снизу на n при условии, что на кольцо R будет наложено ограничение в виде аддитивной порожденности определенным множеством. Представленные результаты были опубликованы в работах [21], [24].

Основные результаты главы формулируются в §2.1:

Теорема 2.1. *Пусть $l \ge 0$ и $n \ge 13 + 12 \cdot 2^l$. Тогда $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l])$ является $(2,3)$-порожденной группой.*

Следствие 2.1. *Группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ является $(2,3)$-порожденной при $n \ge 25$.*

Результаты для кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$ могут быть распространены на случай любого конечнопорожденного коммутативного кольца R с 1:

Теорема 2.2. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, которое порождено элементами $1, u_1, \ldots, u_l$, где $l \ge 0$. Если $n \ge 13+12\cdot 2^l$, то $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является*

$(2,3)$*-порожденной группой.*

Следствие 2.2. *Пусть α — алгебраическое число. Тогда* $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$ *является* $(2,3)$*-порожденной группой при $n \geq 37$.*

Дополнительные условия на аддитивное порождение кольца R в ряде случаев позволяют улучшить оценку снизу на n по сравнению с результатом теоремы 2.2. Точнее, справедлива теорема:

Теорема 2.3. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $s \in R^*$. Дополнительно предположим, что R аддитивно порождается множеством*

$$\left\{s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{1}$$

Тогда $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ *является* $(2,3)$*-порожденной группой при $n \geq 25$.*

Следствие 2.3. *Пусть α — корень уравнения $x^{2k+1} - 1 = 0$. Тогда группа* $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$ *является* $(2,3)$*-порожденной при $n \geq 25$.*

В частности, из следствия 2.3 следует, что группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}[\omega])$ является $(2,3)$-порожденной при $n \geq 25$.

Следствие 2.4. *Группа* $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ *является* $(2,3)$*-порожденной при $n \geq 25$.*

В §2.2 рассматривается общий случай, когда R — коммутативное кольцо с 1 (без дополнительных ограничений), и строятся параметрические матрицы $x, y \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, где $n \geq 13+12L$ и $L \geq 1$, порядка 2 и 3 соответственно, которые будут использоваться при определенных значениях параметров (будут указаны далее) для доказательства теоремы 2.1 в параграфе 2.4 и теоремы 2.3 в §2.5. Построение параметрических матриц осуществляется в несколько этапов:

1. Пусть $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис R^n, а $n = 3m + r$, где $1 \leq r \leq 3$. Действие x_1 из $\mathrm{GL}_n(R)$ определяется на базисных элементах R^n следующим образом:

   - x_1 меняет местами v_{3i+1} и v_{3i} при $1 \leq i \leq m-1$;
   - x_1 оставляет неподвижными v_{3i+2} при $0 \leq i \leq m-2$;
   - $v_1 \mapsto sv_2 - v_1$, где $s \in R^*$;

- если $r = 1$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} и v_{3m+1}, а v_{3m} оставляет неподвижным;
- если $r = 2$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+2} и v_{3m} с v_{3m+1};
- если $r = 3$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+3} и v_{3m+1} с v_{3m+2}, а v_{3m} оставляет неподвижным.

Затем определяется $y_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$ на базисных элементах R^n:

- $v_{3i+3} \mapsto v_{3i+2} \mapsto v_{3i+1} \mapsto v_{3i+3}$, где $0 \leq i \leq m-1$;
- $v_{3m+3} \mapsto v_{3m+2} \mapsto v_{3m+1} \mapsto v_{3m+3}$, если $r = 3$;
- y_1 оставляет неподвижными v_{3m+i}, где $1 \leq i \leq r$, если $r \leq 2$.

2. Далее рассматривается копия базиса B, чьи элементы будут обозначаться как $v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$, и строятся операторы $z_{i,j}(p,q) \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, где $1 \leq i \neq j \leq n$ и $p \in R^*$, $q \in R$ следующим образом: $z_{i,j}(p,q)$ действует тождественно на всех v_k, $k \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{i, j, n+i, n+j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j} \rangle$ в R^{2n} действует как оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^{-1} \\ q & 0 & -p^{-1} & 0 \\ 0 & -p & 0 & q \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи определенных выше матриц строится

$$z = \prod_{i=0}^{L-1} z_{12i+11,12i+14}(p_i, q_i), \text{ где } p_i \in R^*, q_i \in R.$$

3. Наконец, определяется вложение $\pi : \mathrm{GL}_n(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(R)$,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix},$$

и строятся матрицы $x = \pi(x_1)z$, $y = \pi(y_1)$.

В конце параграфа в лемме 2.1 доказывается, что матрицы x и y имеют порядки 2 и 3 соответственно.

В §2.3 доказывается ряд вспомогательных лемм о группе $\langle x, y\rangle$. Основным результатом параграфа (лемма 2.6) является доказательство того, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $\pi(\alpha)$, где α — всевозможные четные перестановочные матрицы из $\mathrm{GL}_n(R)$. При помощи леммы 2.6 значительно облегчаются матричные вычисления, которые осуществляются в §2.4 и §2.5 диссертации.

В параграфе 2.4 доказывается справедливость теоремы 2.1 для кольца $R = \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$, при этом используются матрицы x, y из §2.2 со следующими значениями параметров: $L = 2^l$, $s = 1$, $p_0 = p_1 = \cdots = p_{L-1} = 1$, а $q_0, \ldots, q_{L-1}$ — всевозможные мономы R, в которые каждая переменная входит не более одного раза. Доказательство разбито на два этапа. Сначала доказывается: при данных ограничениях верно, что $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ (лемма 2.7), а затем, что справедливо обратное включение $\mathrm{ESp}_{2n}(R) \subseteq \langle x, y\rangle$ (теорема 2.4). Для доказательства теоремы 2.4 достаточно показать, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся всевозможные матрицы вида $E^{(t)}_{i,j}(u)$, где $t = 1, 2$, $1 \le i, j \le n$, $u \in R$, и $E^{(3)}_{i,j}(u)$, где $1 \le i \ne j \le n$, $u \in R$.

В §2.5 доказывается справедливость теоремы 2.3 для кольца R, аддитивно порождаемого множеством из (1), при этом используются матрицы x, y из §2.2 со следующими значениями параметров: $L = 1$ и $p_0 = s$, $q_0 = s^{-1}$. В данном случае доказательство также разбивается на 2 этапа: доказательство включения $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ (лемма 2.8) и доказательство обратного включения $\mathrm{ESp}_{2n}(R) \subseteq \langle x, y\rangle$ (теорема 2.5).

Глава 3. Группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ малого ранга.

Случай малых рангов требует рассмотрения для каждого значения параметра n в отдельности. В третьей главе диссертационной работы доказывается $(2, 3)$-порожденность групп $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$. Результаты главы были опубликованы в [22] и [23].

Параграф 3.1 посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 3.1. *Группа* $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ — $(2,3)$*-порожденная группа. Более точно, пусть*

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -3 & 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 3 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x^2 = y^3 = I_8$ *и* $\langle x, y\rangle = \mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$.

Прежде чем перейти к изложению идеи доказательства теоремы, отметим, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$, где $n \geq 3$, порождается матрицами $E^{(1)}_{i,j}(1)$, $E^{(2)}_{i,j}(1)$, где $1 \leq i, j \leq n$, так как для образующих группы справедливо равенство

$$E^{(3)}_{i,k}(1) = E^{(1)}_{i,j}(1)E^{(2)}_{j,k}(1)E^{(1)}_{i,j}(-1)E^{(2)}_{j,k}(-1),$$

где $1 \leq i, j, k \leq n$ — попарно различные индексы.

Доказательство теоремы 3.1 осуществляется путем построения цепочки матриц из $\langle x, y\rangle$, имеющих определенную форму. Сначала в $\langle x, y\rangle$ строятся верхние блочно-треугольные матрицы, затем верхнетреугольные матрицы, которые порождают в $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ ту же подгруппу, что и $E^{(1)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i, j \le 4$. Затем аналогичный процесс используется для нижнетреугольных матриц из $\langle x, y\rangle$, но на этот раз он требует меньших вычислительных затрат, так как используется доказанное ранее включение $E^{(1)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i, j \le 4$. Тем самым доказывается, что $E^{(2)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i, j \le 4$, а значит завершается доказательство теоремы 3.1. Поиск матриц был автоматизирован при помощи компьютерных систем вычисления: перебирались матрицы, имеющие достаточно короткое представление в образующих x и y, а также обладающие необходимой блочной формой.

Кроме того, для матриц x и y из формулировки теоремы 3.1 при помощи несложных матричных вычислений проверяется справедливость равенств $(xy)^{30} = I_8$ и $[x, y]^{10} = I_8$, а значит, верно:

Следствие 3.1. *Группа* $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ *является* $(2, 3, 30; 10)$*-порожденной группой.*

В §3.2 доказывается $(2, 3)$-порожденность группы $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$:

Теорема 3.2. *Группа* $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ — $(2, 3)$*-порожденная группа. Более точно, пусть*

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$
y = \begin{pmatrix}
2 & -2 & 1 & -1 & -3 & -3 & 2 & -5 & 6 & 3 \\
-2 & 5 & -3 & -4 & 3 & 2 & -7 & 0 & -1 & 1 \\
3 & 3 & -2 & -1 & 2 & 5 & 0 & 5 & -1 & 3 \\
-1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -4 & -3 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & -3 & -2 \\
1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & -3 & -1 \\
-3 & 5 & -3 & -4 & 4 & 2 & -6 & 1 & -2 & -1 \\
2 & -3 & 2 & 3 & -3 & -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\
3 & -4 & 3 & 7 & -3 & 1 & 4 & 1 & -3 & -1 \\
-2 & 4 & -3 & -3 & 5 & 3 & -3 & 2 & -3 & -3
\end{pmatrix}.
$$

Тогда $x^2 = y^3 = I_{10}$ *и* $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z}) = \langle x, y\rangle$.

Идея первой части доказательства теоремы 3.2 аналогична схеме доказательства теоремы 3.1 — необходимо получить в $\langle x, y\rangle$ достаточное количество верхнеблочных матриц, порождающих ту же подгруппу в $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$, что и $E^{(1)}_{i,j}(1)$, где $1 \leq i, j \leq 5$. Однако в данном случае поиск подходящих матриц оказывается более трудоемким, поэтому доказательство разбивается на несколько этапов, оформленных в виде отдельных лемм 3.1–3.4. Наконец, в лемме 3.5 доказывается, что $E^{(2)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \leq i, j \leq 5$. Тем самым завершается доказательство теоремы 3.2.

Список литературы

1. Всемирнов М. А. Является ли группа $\mathrm{SL}(6, \mathbb{Z})$ (2,3)-порожденной? // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2006.— Т. 330.— Стр. 101–130.

2. Всемирнов М. А. О $(2, 3)$-порождении матричных групп над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ.— 2007.— Т. 19 (6).— Стр. 22–58.

3. Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М. Некоторые факты из жизни $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$ // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2003.— Т. 305.— Стр. 153–162.

4. Мазуров В. Л., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 14 // Новосибирск.— 1999.

5. Нужин Я. Н. Об одном вопросе М. Кондера // Математические заметки.— 2001.— Т. 70 (1).— Стр. 79–87.

6. Bender P. Eine Prasentation der symplektischen Gruppe $Sp(4, \mathbb{Z})$ mit 2 Erzeugenden und 8 definierenden Relationen // Journal of Algebra.— 1980.— V. 65.— P. 328–331.

7. Cazzola M., Di Martino L. $(2, 3)$-generation of $\mathrm{PSp}(4, q)$, $q = p^n$, $p \neq 2, 3$ // Results in Mathematics.— 1993.— V. 23 (3–4).— P. 221–232.

8. Fricke R., Klein F. Vorlesungen uber die Theorie der Elliptischen Modulunktionen // Leipzig: Teubner.— 1890.

9. Ishibashi H. Two-element generation of the integral symplectic group $Sp_n(\mathbb{Z})$ // Journal of Algebra.— 1996.— V. 179 (1).— P. 137–144.

10. Liebeck M. W., Shalev A. Classical groups, probabilistic methods and the $(2, 3)$-generation problem // Annals of Math.— 1996.— V. 144 (1).— P. 77–125.

11. Miller G. On the groups generated by two operations // Bulletin of the American Mathematical Society.— 1901.— V. 7.— P. 424–426.

12. Pellegrini M. A., Tamburini Bellani M. C., Vsemirnov M. A. Uniform $(2, k)$-generation of the 4-dimensional classical groups // Journal of Algebra.— 2012.— V. 369.— P. 322–350.

13. Sanchini P., Tamburini M. C. Constructive $(2, 3)$-generation: a permutational approach // Rend. Sem. Math. Fis. Milano LXIV.— 1994.— P. 141–158.

14. Tamburini M. C. The (2,3)-generation of matrix groups over the integers // Bianchi M., Longobardi P., Maj M. (Eds.) / Ischia Group Theory 2008: Proceedings of the Conference in Group Theory.— World Scientific, 2009.— P. 280–287.

15. Tamburini M. C., Vassallo S. (2,3)-generazione di gruppi lineari // Manara C. F. et al. (Eds.) Scritti in onore di Giovanni Melzi Vitae / Sci. Mat.— Milano, Italy: Univ. Cattolica del Sacro Cuore, 1994.— P. 392–399.

16. Tamburini M. C., Wilson J. S. On the $(2,3)$-generation of some classical groups, II // Journal of Algebra.— 1995.— V. 176 (2).— P. 667–680.

17. Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N. On the $(2,3)$-generation of some classical groups, I // Journal of Algebra.— 1994.— V. 168 (1).— P. 353–370.

18. Tamburini M. C., Zucca P. On a question of M. Conder // Rend. Mat. Acc. Lincei s. 9.— 2000.— V. 11 (1).— P. 5–7.

19. Vsemirnov M. A. The group $\mathrm{GL}(6,\mathbb{Z})$ is $(2,3)$-generated // Journal of Group Theory.— 2007.— V. 10 (4).— P. 425–430.

20. Vsemirnov M. On $(2,3)$-generation of small rank matrix groups over integers // Quaderni del Seminario Matematico di Brescia.— 2008.— No. 30.— P. 1–15.

Публикации автора по теме диссертации

Издания, входящие в список ВАК

21. Васильев В. Л. О (2,3)-порождении гиперболических симплектических групп // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2014.— Т. 423.— Стр. 5–32.

Издания, индексируемые Web of Science

22. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On $(2,3)$-generation of low-dimensional symplectic groups over the integers // Communications in Algebra.— 2010.— V. 38 (9).— P. 3469–3483.

23. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. The group $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ is (2,3)-generated // Cent. Eur. J. Math.— 2011.— V. 9 (1).— P. 36–49.

24. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On the (2,3)-generation of hyperbolic symplectic groups of large rank // Journal of Pure and Applied Algebra.— 2013.— V. 217 (11).— P. 2036–2049.

Прочие издания

25. Васильев В. Л. О (2,3)-порождении симплектических групп больших размерностей над кольцом целых чисел // Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова, (Казань, 25–30 сентября 2011 г.) и молодежной школы-конференции «Современные проблемы алгебры и математической логики» (Казань, 22 сентября – 3 октября 2011 г.).— Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2011.— Стр. 50–51.

26. Васильев В. Л. (2,3)-порождение симплектических групп над кольцом целых чисел // Шестнадцатая Санкт-Петербургская ассамблея молодых ученых и специалистов, СПб.— 2011.— Стр. 34.

27. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On (2,3)-generation of group $\mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z})$ // Methods of Logic in Mathematics V, Short abstracts of an international meeting held on June 1–7, 2008.— St. Petersburg, 2008.— P. 16.