На правах рукописи

Карпов Дмитрий Валерьевич

СТРУКТУРА СВЯЗНОСТИ ГРАФА

(01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2015

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Дольников Владимир Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор ФГАОУВПО Московского физико-технического института (государственного университета)

Пяткин Артём Валерьевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией дискретной оптимизации в исследовании операций ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Сапоженко Александр Антонович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор ФГБОУВО Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Ведущая организация —
ФГБУВПОиН Санкт-Петербургский академический университет — научно-образовательный центр нанотехнологий Российской академии наук

Защита состоится 7 октября 2015 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-02/dissertations

Автореферат разослан “ ” 2015 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. В. Малютин

Общая характеристика работы.

Актуальность работы. Теория графов является важным, интересным и динамично развивающимся разделом дискретной математики. Одним из классических направлений исследований в теории графов являются исследования по вершинной связности графов. Понятие k-связного графа является естественным обобщением понятия связного графа. Это подчеркивает и классическая теорема Менгера, с которой в 1927 году фактически начались исследования по связности. Их продолжили Уитни, Татт, Форд и Фалкерсон, Дирак, Халин, Мадер и другие. В 60-80 годы XX века был всплеск интереса к связности графов. Сейчас продолжают появляться новые работы по этой тематике, пусть и не в таком количестве, как 30 лет назад.

Диссертация посвящена исследованию структуры взаимного расположения разделяющих множеств наименьшего размера в графе. Остановимся на классических аналогах решаемых в диссертации задач. Понятия блоков и точек сочленения связного графа хорошо известны и весьма полезны, с их помощью доказано немало утверждений, причем не только о связности графов. Помогает работать с блоками структура *дерева блоков и точек сочленения*, описанная, например, в классической книге Ф. Харари “Теория графов”. Именно структура дерева позволяет успешно применять блоки в доказательствах.

Поэтому неоднократно возникали вопросы об аналогичной структуре для графов большей связности. Но даже структура разбиения двусвязного графа его двухвершинными разделяющими множествами, построенная В. Т. Таттом в 1966 году, намного сложнее. Главная причина в том, что уже двухвершинные разделяющие множества могут быть *зависимы*, то есть, разбивать друг друга на части. Поэтому невозможно построить древовидную структуру, последовательно проводя разрезы двусвязного графа по двухвершинным разделяющим множествам: разрезая граф по некоторому множеству, мы теряем информацию обо всех зависимых с ним множествах, а структура, зависящая от порядка разбиения, бесполезна. К сожалению, дерево блоков двусвязного графа, построенное Таттом, практически не нашло применения. Однако, некоторые работы, вышедшие позже, могли бы быть значительно упрощены с помощью результатов Татта.

С повышением вершинной связности сложность структуры возрастает многократно. Только в 2011 году диссертант и А. В. Пастор завершили работу по построению структуры разбиения трёхсвязного графа его трёхвершинными разделяющими множествами. Эта структура намного сложнее и разнообразнее, чем структура разбиения двусвязного графа.

Именно исследования по связности графов способны приоткрыть нам новые инварианты графов, которые будут полезны и в других областях математики. Поэтому имеет смысл продолжать такие исследования, строить новые структурные инварианты графов и изучать построенные ранее. Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Цели работы. Основные цели диссертации:

— построить структуру, обобщающую дерево блоков и точек сочленения и описывающую для произвольного k разбиение k-связного графа наборами k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов;

— изучить структуру минимальных k-связных графов с малым числом вершин степени k;

— изучить множества вершин k-связного графа, одновременное удаление которых не нарушает k-связность;

— доказать новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве связного графа.

Методы исследований. В работе использовались классические методы работы с k-связными графами и новые идеи. Одной из наиболее существенных новых методик изучения структуры разбиения k-связного графа в работе является придуманное диссертантом понятие *части разбиения* графа набором разделяющих множеств.

Для оценки наибольшего количества листьев в остовном дереве связного графа применяются модификации классических методов и новые методы, основанные на использовании дерева блоков и точек сочленения. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие вершины степеней 1 и 2 исходного связного графа.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств k-связных графов. Описанные в диссертации обобщения дерева блоков и точек сочленения на графы большей связности могут быть полезны для дальнейшего изучения структуры взаимного расположения разделяющих множеств в k-связном графе. Поскольку определения и свойства описанных в диссертации структур аналогичны свойствам классического дерева блоков и точек сочленения, эти структуры могут быть полезны не только в теории связности, но и в других областях теории графов.

Новые методы нижней оценки количества листьев в остовном дереве связного графа, основанные на использовании блоков и точек сочленения, позволяют получать оценки, в которых учитываются вершины степеней 1 и 2, и могут быть применены для получения новых оценок.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Построено дерево, описывающее структуру разбиения k-связного графа наборами из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов для произвольного k. Доказаны свойства построенных деревьев, показывающие их аналогию с деревом блоков и точек сочленения связного графа. Частным случаем построенной структуры является дерево разбиения двусвязного графа, похожее на конструкцию, придуманную в 1966 году В.Т.Таттом. Полученные конструкции применены для оценки хроматического числа двусвязного графа и для описания структуры минимальных и критических двусвязных графов.

2. Доказано, что минимальные k-связные графы с наименьшим числом вершин степени k — это графы вида $G_{k,T}$, где T — произвольное дерево, степени вершин которого не превосходят $k+1$, и только они. Граф $G_{k,T}$ строится из k непересекающихся копий дерева T. Для каждой вершины a дерева T обозначим через $a_1, \ldots, a_k$ соответствующие ей вершины копий. Если вершина a имеет степень j в дереве T, то добавляются $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

С помощью графов вида $G_{2,T}$, а также операций стягивания и удаления рёбер классифицированы минимальные двусвязные графы с малым числом вершин степени 2.

3. При $k \leq 5$ для произвольного минимального k-связного графа с помощью дерева описано взаимное расположение рёбер, соединяющих пары вершин степени более k.

4. Доказана *теорема о разбиении* — абстрактное утверждение о структуре, обобщающей классическое дерево блоков и точек сочленения связного графа. С помощью теоремы о разбиении описана структура взаимного расположения компонент зависимости произвольного набора k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа и частей, на которые множества этого набора разбивают граф.

5. Доказано, что при удалении из двусвязного графа множества из нескольких внутренних вершин его частей-блоков, содержащего не более чем по одной вершине из каждого блока, граф остается двусвязным. Доказана теорема об одновременном удалении нескольких вершин из k-связного графа без потери k-связности.

6. Доказано, что в связном графе с более чем одной вершиной, s вершинами степени 3 и t вершинами степени не менее 4 можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$ листьев, где $\alpha \geq \frac{8}{5}$ и, более того, $\alpha \geq 2$, кроме трёх графов-исключений, содержащих не более 8 вершин. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

7. Доказано, что в связном графе с более чем одной вершиной, s вершинами степеней 1 и 3, и t вершинами степени не менее 4, можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{1}{3}t+\frac{1}{4}s+\frac{3}{2}$ листьев. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

8. Доказано, что при $k \geq 1$ в связном графе с $n \geq 2$ вершинами, максимальная цепочка последовательно соединённых вершин степени 2 в котором имеет длину не более k, можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{1}{2k+4}n+\frac{3}{2}$ листьев. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, изложенные в диссертации, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты диссертации докладывались на Седьмом и Восьмом Международных семинарах “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, МГУ, 2001 и 2004), на Третьем Российско-Финском симпозиуме по дискретной математике (Петрозаводск, 2014), на Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory (Долгопрудный, 2014), на девятой Международной конференции “Дискретные модели в теории управляющих систем” (Москва, МГУ, 2015). Все результаты диссертации докладывались на семинарах по дискретной математике и математической кибернетике в ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН, институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, МФТИ, МГУ, СПбГУ.

Публикации. Все результаты диссертации изложены в работах [1]-[12], опубликованных в рецензируемых журналах. Работы [1]-[11] написаны лично диссертантом. Из работы [12], написанной совместно с А. В. Пастором, в диссертацию включена теорема 8 (теорема 5.2 диссертации). Утверждение этой теоремы и его доказательство, включая основные леммы, придуманы диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Нумерация разделов, формул, определений, замечаний, лемм, теорем, следствий и рисунков ведется отдельно для каждой главы. Текст диссертации изложен на 243 страницах (исключая список литературы). Список литературы содержит 58 наименований.

Содержание работы

Диссертация посвящена обобщению классического дерева блоков и точек сочленения на графы большей связности и применению полученных конструкций. Приведем определения основных понятий, используемых в диссертации.

В диссертации рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Множество вершин и рёбер графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$, соответственно. Для количества вершин и рёбер графа G используются обозначения $v(G)$ и $e(G)$, соответственно.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Через $G - R$ обозначается граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер множества R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.

2) Множество R называется *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, то есть, количество инцидентных ей рёбер. Минимальная степень вершины графа G обозначается через $\delta(G)$, а максимальная степень — через $\Delta(G)$.

Вершина x графа G называется *висячей*, если $d_G(x) = 1$. Если граф G — дерево, его висячие вершины часто называют *листьями*.

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ обознается граф, полученный в результате *стягивания* ребра e (концы ребра $e = xy$ стягиваются в новую вершину, с которой в графе $G \cdot e$ будут смежны все отличные от x и y вершины, смежные в G хотя бы с одним из концов ребра e).

Через $\chi(G)$ обозначается *хроматическое число* графа G, то есть, наименьшее возможное количество цветов в правильной раскраске вершин этого графа.

Для $X \subset V(G)$ через $G(X)$ обозначается *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин X (то есть, граф с множеством вершин X и всеми рёбрами графа G, оба конца которых лежат в X).

Через K_n обозначается полный граф на n вершинах, а через $K_{m,n}$ — полный двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин.

Одним из основных понятий в теории графов является понятие *связности*. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Множество вершин несвязного графа разбивается на *компоненты связности*. (Под компонентой связности мы понимаем максимальное по включению множество вершин графа, любые две из которых связаны путем.)

Граф называется *(вершинно) k-связным*, если в нем не менее $k+1$ вершин и при удалении любых $k-1$ вершин получается связный граф.

В 1932 году Х. Уитни доказал, что в k-связном графе между любыми двумя вершинами есть k путей без общих внутренних вершин. Обратное утверждение очевидно. Тем самым, понятие вершинной k-связности является обобщением понятия связности. С этим связаны и попытки обобщить классические результаты для связных графов на графы большей связности.

Напомним понятия блока и точки сочленения связного графа, а также ряд их свойств. Подробнее о них можно прочитать, например, в книге Харари "Теория графов ".

Определение 2. Пусть G — связный граф. Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G-a$ несвязен.

Блоком называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

Отметим, что точки сочленения — это как раз одновершинные разделяющие множества. Блоки и точки сочленения — это мощный и полезный инструмент работы с графами, с помощью которого доказано множество фактов, причем не только из теории связности. В доказательствах часто используется дерево блоков и точек сочленения, которое мы сейчас определим.

Определение 3. *Дерево блоков и точек сочленения* графа G — это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой — всем его блокам $B_1, \dots, B_n$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i \in V(B_j)$.

Несложно доказать, что дерево блоков и точек сочленения — это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам. Именно структура дерева помогает работать с блоками и точками сочленения. Поэтому, неоднократно возникали и возникают попытки построения для графов большей связности структуры, аналогичной по своим свойствам дереву блоков и точек сочленения. Некоторые из таких структур описываются в **первой главе** диссертации.

Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ набор, состоящий из всех k-вершинных разделяющих множеств графа G. Понятие *разбиения* графа набором разделяющих множеств, впервые определенное диссертантом в [2], оказалось удобным для описания взаимного расположения разделяющих множеств в графе.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью $\mathfrak{S}$-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Несложно доказать, что граница части A состоит из всех ее вершин, имеющих смежные вне A.

Вернемся к случаю $k = 1$ и отметим, что точки сочленения связного графа G — это его разделяющие множества, из них состоит $\mathfrak{R}_1(G)$. Множества вершин всех блоков — это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$. С помощью понятия части разбиения удобно описывать свойства блоков и точек сочленения.

В **первой главе** диссертации мы построим *дерево разбиения* для набора из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств в k-связном графе. Для построения мы используем определенное выше понятие части разбиения. Начнем с необходимых определений.

Определение 5. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$. Будем говорить, что R *разделяет* множество $X \subset V(G)$, если не все вершины множества $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Определение 6. Пусть G — k-связный граф. Назовем множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geq 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k-связных графов при $k \geq 2$. В работе [12] доказано, что для множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо они независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта — очень простое.

Наличие пар зависимых множеств мешает построить на множествах из $\mathfrak{R}_k(G)$ и частях из $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$ отображающее их структуру дерево, похожее на дерево блоков и точек сочленения. Однако, такое дерево можно построить для набора из попарно независимых множеств.

Определение 7. Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы. Построим *дерево разбиения* $T(G, \mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G, \mathfrak{S})$ — это множества из $\mathfrak{S}$, а вершины другой доли — части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G, \mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в $T(G, \mathfrak{S})$, если и только если $S \subset A$.

Построение $T(G, \mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства.

Теорема 1.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$T(G, \mathfrak{S})$ — это дерево.*

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ выполняется равенство*

$$d_{T(G,\mathfrak{S})}(S) = |\mathrm{Part}(S)|.$$

Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ существует единственная часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, такая, что $B \subset A$ и B смежна с S в $T(G, \mathfrak{S})$. Все висячие вершины дерева $T(G, \mathfrak{S})$ соответствуют частям $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество S разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда S разделяет B и B' в $T(G, \mathfrak{S})$.*

Частным случаем описанной конструкции является дерево разбиения двусвязного графа. Дадим необходимые определения. Пусть граф G двусвязен. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$.

Определение 8. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.

Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 9. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ двусвязного графа G — это дерево $T(G, \mathfrak{O}(G))$.

2) Будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(G)$ вместо $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ и называть части этого разбиения просто *частями графа* G. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

В 1966 году В. Т. Татт описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе именно с помощью дерева, которое он назвал $T(G)$. Это дерево — почти что дерево разбиения двусвязного графа одиночными разделяющими множествами (только эти множества и само дерево были определены в книге Татта более сложным образом).

Из теоремы 1.1 следует, что $\mathrm{BT}(G)$ — дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\mathrm{Part}(G)$. Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

Далее мы классифицируем части графа G и изучим расположение неодиночных двухвершинных разделяющих множеств в этом графе.

Определение 10. 1) Для двусвязного графа G обозначим через G' граф, полученный из G добавлением всех отсутствующих в $E(G)$ ребер вида ab, где $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$.

2) Назовём часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Теорема 1.2. *Пусть G — двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть графа G — блок или цикл.*

2) *Множество $R = \{a, b\}$ — неодиночное множество из $\mathfrak{R}_2(G)$, если и только если a и b — несоседние в циклическом порядке вершины некоторой части-цикла.*

Таким образом, неодиночные двухвершинные разделяющие множества графа G соответствуют диагоналям частей-циклов, имеющих длину хотя бы 4.

Важно не только построить структуру, но и показать, как она применяется. Удивительно, но структура Татта практически не нашла применения за столько лет. Следующие результаты подчеркнут аналогию между классическими двусвязными блоками связного графа и частями разбиения двусвязного графа.

Понятно, что хроматическое число связного графа равно максимуму хроматических чисел его двусвязных блоков. С помощью дерева разбиения двусвязного графа в диссертации доказаны верхние оценки на хроматическое число двусвязного графа через хроматические числа его подграфов, индуцированных на частях разбиения.

Теорема 1.4. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $$\chi(G) \le \chi(G') = \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A)).$$

2) $$\chi(G) \le \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1.$$

3) $$\chi(G) \le \max(3, \max_{A\ -\ \textit{блок}\ G} \chi(G(A)) + 1).$$

Списочные раскраски (list colorings) появились относительно недавно и являются сейчас весьма популярным объектом для исследований. Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие список $L(v)$ из k цветов, после чего рассматривается правильная раскраска вершин, в которой каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$. Минимальное такое натуральное число k, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначается через $\mathrm{ch}(G)$ (и называется choice number или списочное хроматическое число). Очевидно, $\mathrm{ch}(G) \ge \chi(G)$. С помощью дерева разбиения доказана следующая оценка на $\mathrm{ch}(G)$.

Теорема 1.5. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утвер-*

ждения.

1) $$\mathrm{ch}(G) \le \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \mathrm{ch}(G(A)) + 2.$$

2) $$\mathrm{ch}(G) \le \max(3, \quad \max_{A\text{ — блок } G} \mathrm{ch}(G(A)) + 2).$$

Понятно, что минимальная степень вершины k-связного графа не менее k. В связи с этим, многие исследователи изучали вершины степени k в k-связном графе. Существенная часть диссертации также посвящена этому. Определим два важных понятия.

Определение 11. Пусть G — k-связный граф.

1) Граф G называется *критическим*, если $v(G) \ge k+2$ и для любой вершины $x \in V(G)$ граф $G - x$ не является k-связным.

2) Граф G называется *минимальным*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.

Минимальные и критические k-связные графы исследовались, начиная с конца 60-х годов 20 века. В основном, исследования посвящены доказательству наличия вершин степени k в таких графах и оценке количества вершин степени k.

С помощью дерева разбиения двусвязного графа в первой главе диссертации доказано несколько фактов о структуре критических и минимальных двусвязных графов. Остановимся подробнее на последних.

Теорема 1.6. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(a) если $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;

(b) для любого блока A графа G граф $G(A)$ не имеет ни одного ребра.

Из теоремы 1.6 следует еще несколько фактов о структуре минимальных двусвязных графов.

Следствие 1.5. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если A — блок графа G, то* $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.

2) *Пусть A — крайняя часть графа G, смежная в* $\mathrm{BT}(G)$ *с одиночным множеством S. Тогда A — цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S, имеют степень* 2.

3) *Множество внутренних вершин частей графа G состоит из всех вершин этого графа, имеющих степень* 2.

Вернемся к случаю k-связного графа для произвольного k и дадим определения разреза и частей разбиения графа разрезом.

Определение 12. Пусть G — k-связный граф.

1) Будем называть *разрезом* k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ — множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез T и всех вершин, инцидентных рёбрам разреза T.

Разрез — объект, по свойствам похожий на вершинное разделяющее множество, но имеющий свою специфику. Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности. Для каждого ребра $e \in T$ эти компоненты содержат по одному концу e.

Определение 13. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 — компоненты связности графа $G - T$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(T)$ *частями разбиения* графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение

$$\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}.$$

2) *Границами разреза T* мы будем называть множества вершин

$$A_1 \cap W(T) \quad \text{и} \quad A_2 \cap W(T).$$

Определение 14. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$.

Назовем *частями разбиения* графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ максимальные по включению множества вида

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}(S).$$

Множество всех частей разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Границей* части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ будет множество $\mathrm{Bound}(A)$ всех вершин этой части, являющихся вершинами разрезов из $\mathfrak{S}$. *Внутренностью* части A будет множество $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Bound}(A)$.

Определение 15. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}_k(G)$ называются *независимыми*, если можно ввести такие обозначения

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T *зависимыми*.

Определение 16. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. *Дерево разрезов* множества $\mathfrak{S}$ — это двудольный граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$: одну долю образуют разрезы из $\mathfrak{S}$, а вторую — части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем множество $S \in \mathfrak{S}$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда A содержит одну из границ разреза S.

2) Если часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, то назовем такую часть *крайней*.

Определение дерева разрезов аналогично определению дерева разбиения и определению классического дерева блоков и точек сочленения. Поэтому неудивительно, что дерево разрезов обладает похожими свойствами.

Теорема 1.7. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *— дерево.*

2) *Любой разрез $S \in \mathfrak{S}$ смежен в* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *ровно с двумя частями* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, причем эти две части содержатся в разных частях* $\mathrm{Part}(S)$.

3) *Разрез $S \in \mathfrak{S}$ отделяет вершину B от вершины C в* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$*, если и только если S отделяет множество B от множества C в графе G.*

4) *Если крайняя часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежна в* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *с разрезом* T*, то* $A \in \mathrm{Part}(T)$.

5) *Крайние части* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *— это в точности минимальные по включению части среди всех частей разбиения графа* G *одним разрезом из множества* $\mathfrak{S}$.

Описание структуры взаимного расположения разрезов важно для изучения минимальных k-связных графов, в которых каждое ребро входит хотя бы в один разрез. Во **второй главе** с помощью разработанной в первой главе техники изучаются минимальные k-связные графы.

Напомним, что все вершины k-связного графа имеют степень не менее k. Через $V_k(G)$ мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, пусть

$$V_{k+1}(G) = V(G) \setminus V_k(G), \quad v_k(G) = |V_k(G)| \quad \text{и} \quad v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|.$$

Дирак в 1967 году и Пламмер в 1968 году исследовали минимальные двусвязные графы. Из результатов этих работ можно вывести, что $v_2(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для минимального двусвязного графа G.

В 1979 году В. Мадер доказал результат, обобщающий написанное выше:

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1} \tag{1}$$

для минимального k-связного графа G. Эта оценка точная: для любого $k \geq 2$ существуют бесконечные серии минимальных k-связных графов, для которых неравенство (1) обращается в равенство. Далее мы рассмотрим такие графы и будем называть их *экстремальными* минимальными k-связными графами.

Определение 17. Пусть $k \geq 2$, а T — дерево с $\Delta(T) \leq k+1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий $T_1, \ldots, T_k$ дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i. Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k-1)n + 2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ — минимальный k-связный граф и, следовательно, он — экстремальный. Одним из основных результатов диссертации является следующая теорема, в которой доказано, что других экстремальных минимальных k-связных графов нет.

Теорема 2.1. *Любой экстремальный минимальный k-связный граф — это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \le k+1$.*

В 1982 году Оксли представил алгоритм построения экстремальных минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины. Аналогичное утверждение было доказано и для трёхсвязных графов. Из теоремы 2.1 несложно вывести аналогичный алгоритм построения всех минимальных k-связных графов.

Следствие 2.3. *Пусть G — экстремальный минимальный k-связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).*

Минимальные двусвязные графы с малым числом вершин изучаются во второй главе диссертации при помощи конструкции *дерева разбиения* двусвязного графа. Напомним, что минимальный двусвязный граф G удовлетворяет неравенству

$$v_2(G) \ge \frac{v(G)+4}{3}.$$

Определение 18. Через $\mathcal{GM}(n)$ обозначим множество всех минимальных двусвязных графов на n вершинах, в которых ровно $\lceil \frac{n+4}{3} \rceil$ вершин степени 2.

Понятно, что равенство $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ может достигаться только при

$v(G) = 3m+2$. Из теоремы 2.1 следует, что множество $\mathcal{GM}(3m+2)$ состоит из графов вида $G_{2,T}$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) \le 3$.

Оксли исследовал структуру минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$. Для n сравнимых с 0 и 1 по модулю 3 было доказано, что графы из $\mathcal{GM}(n)$ можно получить несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$ из одного из начальных графов, перечисленных в работе. Начальные графы — это K_3, три графа несколько более сложной структуры и две бесконечные серии графов. Мы дадим описание минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$ с помощью графов вида $G_{2,T}$ и стягивания рёбер.

Теорема 2.2. *Пусть $m \ge 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathcal{GM}(3m+1)$ *состоит из графов вида $G_{2,T} \cdot xy$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) = 3$, $x, y \in V_3(G_{2,T})$ и $xy \in E(G_{2,T})$.*

2) *Для любого графа $G \in \mathcal{GM}(3m+1)$ представление в виде $G_{2,T} \cdot xy$ из пункта 1 единственно с точностью до изоморфизма.*

Похожее, но несколько более сложное описание дано в диссертации и для графов из $\mathcal{GM}(3m)$ при $m \ge 2$.

В минимальных k-связных графах каждое ребро входит хотя бы в один разрез. Поэтому описание структуры взаимного расположения разрезов важно для изучения таких графов. Как видно еще из классических работ Мадера, наиболее важно изучить в минимальном k-связном графе структуру множества рёбер E_{k+1} (оба конца которых имеют степень хотя бы $k+1$). В диссертацию включен следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть $k \le 5$, а G — минимальный k-связный граф. Тогда для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ можно выбрать содержащий e разрез $S_e \in \mathfrak{R}$ так, что все выбранные разрезы попарно независимы.*

К описанному в теореме 2.4 множеству попарно независимых разрезов можно применить конструкцию дерева разрезов и использовать многочисленные свойства, доказанные в теореме 1.7 и ее следствиях.

Для формулировки результата **третьей главы** нам потребуются гиперграфы. Для *гиперграфа* H мы будем применять такие же обозначения, как и для графа: множества *вершин* и *гиперребер* будем обозначать через $V(H)$ и $E(H)$, соответственно. Главное отличие гиперграфа от обычного графа в том, что *гиперребро* — это произвольное подмножество $V(H)$, состоящее хотя бы из двух вершин. Поэтому удобно оперировать с гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Для множества вершин $X \subset V(H)$ определим гиперграф $H - X$ следующим образом: $V(H - X) = V(H) \setminus X$, а $E(H - X)$ состоит из всех множеств вида $R \setminus X$ (где $R \in E(H)$), содержащих хотя бы две вершины.

Определение 19. 1) Последовательность различных вершин $a_1a_2 \dots a_k$ называется *путём*, если существуют такие гиперребра e_1, e_2, $\dots$, e_{k-1}, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$.

2) Если, кроме того, существует гиперребро $e_k \ni a_k, a_1$, то последовательность $a_1a_2 \dots a_k$ называется *циклом*

Определение 20. 1) Гиперграф называется *связным*, если любые две его вершины *связаны*, то есть, соединены путём.

2) *Компоненты связности* гиперграфа определяются так же, как и компоненты связности графа — это максимальные по включению множества попарно связанных вершин.

Определение 21. Гиперграф H называется *гипердеревом*, если он связен, ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом гиперграфе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

Гипердерево имеет множество свойств, аналогичных свойствам обычного дерева, эти свойства описаны в теореме 3.1. Далее в третьей главе строится абстрактная структура, обобщающая свойства точек сочленения связного графа.

Определение 22. Рассмотрим конечное множество вершин V. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько *классов* (возможно, такой класс всего один).

Будем говорить, что вершина w *разделяет* вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w.

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V.

Построим *гиперграф разбиения* $\mathrm{Struct}(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение имеет эта конструкция к теории связности. Пусть F — связный граф, $\mathfrak{R}_1(F)$ — множество всех его точек сочленения, а для каждой точки сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(F)$ классы разбиения $(\mathfrak{R}_1(F))_a$ состоят из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$.

Нетрудно понять, что гиперребра $\mathrm{Struct}(\mathfrak{R}_1(F))$ — это множества всех точек сочленения, лежащих в каком-либо некрайнем блоке. Можно проверить, что гиперграф $\mathrm{Struct}(\mathfrak{R}_1(F))$ является гипердеревом. Именно классическая структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам результат теоремы 3.2.

Теорема 3.2. *Пусть для любых* $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф* $\mathrm{Struct}(V)$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины* $a \in V$ *гиперграф* $\mathrm{Struct}(V) - a$ *распадается на компоненты связности* $W_1, \dots, W_\ell$. *Тогда* $V_a = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.

Отметим, что с помощью теоремы 3.2 можно доказать приведенные в главе 1 диссертации результаты о структурных деревьях (теоремы 1.1 и 1.7): достаточно проверить для множества рассматриваемых объектов (попарно независимых разделяющих множеств или разрезов) условие из теоремы 3.2, после чего можно перейти от гипердерева к дереву с помощью конструкции, описанной в теореме 3.1. Мы дали в этих теоремах более элементарные доказательства. Однако, иногда обойтись без теоремы 3.2 гораздо сложнее — например, в случае компонент зависимости, о которых идет речь в **четвертой главе** диссертации.

Кроме того, отметим, что в 2011 году диссертант и А. В. Пастор именно с помощью теоремы о разбиении описали структуру взаимного расположения трёхвершинных разделяющих множеств в трёхсвязном графе (описание в диссертацию не включено).

Определение 23. Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

2) *Компонентой зависимости* набора $\mathfrak{S}$ называется любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

3) Через $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ обозначается множество всех компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$.

В **четвертой главе** изучается взаимное расположение компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$.

Доказывается, что для любых двух различных компонент зависимости $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ существует единственная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, которая содержит все множества компоненты $\mathfrak{T}'$, а любая отличная от A часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит ни одного множества из $\mathfrak{T}'$.

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ соответствует разбиение остальных компонент зависимости на классы: каждый класс образуют компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

Гиперграф $\mathrm{Struct}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ описанного выше разбиения называется *гиперграфом компонент зависимости* набора $\mathfrak{S}$ и обозначается через

$\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф компонент зависимости* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ — компоненты связности гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. *Тогда компоненты зависимости из множества $\mathcal{C}_i$ содержатся в одной части $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, причем $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.*

3) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *вершинами которого являются $\mathfrak{T}$ и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части A.*

Мы имеем дело с более общей ситуацией, чем в первой главе: там рассматривался набор из попарно независимых множеств, а значит, его компонентами зависимости были сами множества. Поэтому в рассматриваемой задаче возникает больше технических трудностей при изучении частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ с помощью гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Определение 24. Пусть $R = \{\mathfrak{S}_1, \dots \mathfrak{S}_n\}$ — гиперребро $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая множества всех остальных компонент зависимости из R. Тогда множество вершин

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

назовем *частью, соответствующей гиперребру R* (даже в случае, когда $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$).

Именно из-за того, что не каждому гиперребру $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ соответствует часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не получается ввести на компонентах зависимости и частях $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ структуру дерева, как в случае с набором из попарно независимых множеств. В диссертации доказано, что часть A, соответствующая гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, не принадлежит $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ только в одном случае: $A \in \mathfrak{S}$ и гиперребро R состоит ровно из двух компонент зависимости, одна из которых — это $\{A\}$, а другая компонента зависимости имеет часть разбиения с границей A. Следующая теорема описывает части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ с помощью гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.2. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ таковы, что A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Тогда $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.*

2) *Пусть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда либо часть H соответствует некоторому гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, либо существует такая компонента зависимости $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, что $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.*

Отметим еще одно важное свойство классических блоков связного графа. Пусть W — множество вершин, не являющихся точками сочленения и принадлежащих различным блокам. Тогда несложно доказать, что граф $G - W$ связен.

В **пятой главе** диссертации доказано аналогичное утверждение для двусвязного графа и сделана попытка обобщить эти свойства для графов большей связности.

Теорема 5.1. *Пусть G — двусвязный граф, а W — множество, состоящее из внутренних вершин непустых частей-блоков графа G и содержащее не более чем по одной вершине из каждого блока. Тогда граф $G - W$ двусвязен.*

Перейдем к одновременному удалению нескольких вершин из k-связного графа. Сначала сформулируем необходимые определения.

Определение 25. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, а H — компонента связности графа $G - S$. Мы будем называть H *фрагментом.*

Определение 26. Пусть G — k-связный граф, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$. Пусть $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ *существенным* для части A, если не существует множества $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, отделяющего S от $\mathrm{Int}(A)$.

Обозначим через $\mathrm{Bound}_2(A)$ множество всех граничных вершин части A, входящих в два и более существенных для части A множества. Назовем часть A *хорошей*, если $|\mathrm{Int}(A)| > |\mathrm{Bound}_2(A)|$.

Теорема 5.2. *Пусть G — k-связный граф, причем степень любой вершины, входящий в одно из множеств $\mathfrak{R}_k(G)$, не менее $2k-1$, а любой фрагмент имеет хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин. Тогда существует множество W, содержащее по одной внутренней вершине каждой хорошей части* $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, *такое, что для любого $W' \subset W$ граф $G - W'$ является k-связным.*

В **шестой главе** диссертации изучается вопрос о построении в связном графе остовных деревьев с большим количеством листьев. Отметим, что к классическим методам построения добавляются новые методы, основанные на применении блоков и точек сочленения связного графа. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие вершины степеней 1 и 2 исходного связного графа.

Определение 27. Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

Если F — дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ — количество его листьев.

Пусть G — связный граф. С 1981 года, когда Дж. Сторер предположил, что $u(G) > \frac{v(G)}{4}$, если все вершины графа G имеют степень 3, было опубликовано немало работ о нижних оценках $u(G)$. В 1981 году Н. Линиал высказал гипотезу:

$$u(G) \geq \frac{d-2}{d+1} v(G) + c \quad \text{при} \quad \delta(G) \geq d \geq 3,$$

где константа $c > 0$ зависит только от d. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ несложно придумать бесконечную серию примеров связных графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$.

В 1991 году Д. Клейтман и Д. Вест доказали, что $u(G) \geq \frac{1}{4} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geq 3$ и

$$u(G) \geq \frac{2}{5} \cdot v(G) + \frac{8}{5} \quad \text{при} \quad \delta(G) \geq 4. \tag{2}$$

В 1992 году Дж. Григгс и М. Ву еще раз доказали оценку (2) и доказали, что $u(G) \geq \frac{1}{2} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geq 5$. В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*, который будет применен и в некоторых доказательствах шестой главы.

С развитием этого метода для $d \geq 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ Алона и других следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В работе Клейтмана и Веста сказано о еще одной, более сильной гипотезе Линиала:

$$u(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{d_G(x) - 2}{d_G(x) + 1}$$

для связного графа G с $\delta(G) \geq 2$. Понятно, что раз для больших степеней неверна более слабая гипотеза, то неверна и эта. Однако, она стимулирует попытки получить оценку на $u(G)$, в которую каждая вершина вносит вклад, зависящий от ее степени.

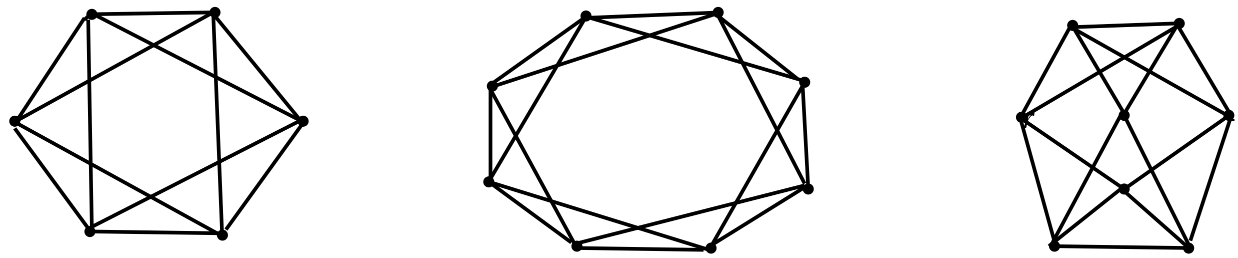
В работе [6] диссертант доказал следующую теорему, с которой начинается шестая глава диссертации.

Теорема 6.1. *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной, s — количество его вершин степени 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда*

$$u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha \geq \frac{8}{5}.$$

Более того, $\alpha \geq 2$, кроме трёх графов-исключений: C_6^2, C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах) и регулярного графа G_8 степени 4 на 8 вершинах, изображенного на рисунке.

В шестой главе диссертации также приведена бесконечная серия примеров графов, для которых в теореме 6.1 достигается равенство.



C_6^2 C_8^2 G_8

Клейтман и Вест в 1992 году предположили, что в неравенстве (2) аддитивную константу $\frac{8}{5}$ можно заменить на 2 для всех графов, кроме двух исключений: это C_6^2 и C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах). Однако, было доказано лишь, что граф-исключение должен быть регулярным графом степени 4, каждое ребро которого входит в треугольник. Из результатов диссертации следует, что на самом деле для задачи, исследованной Клейтманом и Вестом, равно как и для более общей задачи, исследованной в теореме 6.1, исключений три (см. рисунок). Отметим, что в теореме 6.1 допускается наличие в графе вершин степеней 1 и 2. Однако, эти вершины не учитываются в оценке на $u(G)$.

В работе [5] диссертант доказал оценку на $u(G)$, учитывающую вершины степени 1.

Теорема 6.2. *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной, s — количество его вершин степеней* 1 *и* 3*, а t — количество его вершин степени не менее* 4*. Тогда*

$$u(G) \geq \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}.$$

Отметим, что существуют бесконечные серии примеров графов, для которых оценка достигается. В шестой главе диссертации приведена бесконечная серия примеров, в которой графы содержат только вершины степеней 1, 3 и 4. Доказательство теоремы 6.2 использует целый ряд методов построения остовного дерева с большим количеством висячих вершин: используется редукционная техника, основанная на применении блоков и точек сочленения, а в оставшихся после редукции случаях используется модификация классического метода мертвых вершин (главное отличие в том, что базовая конструкция, с которой начинается построение — не дерево, как в классическом варианте метода, а лес, включающий в себя все висячие вершины графа).

Интересно, что могут увеличить количество висячих вершин в остовном дереве и вершины степени 2: нетрудно придумать примеры графов, в которых при замене вершины степени 2 на ребро, соединяющее две смежные с ней вершины, уменьшается максимальное количество листьев в остовном дереве.

Определение 28. Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.

Отметим, что наличие в графе G длинных цепочек из последовательно соединённых вершин степени 2 может сделать величину $u(G)$ сколь угодно близкой к 0: не более чем две вершины из каждой такой цепочки могут быть висячими в остовном дереве графа. Поэтому возникает естественное ограничение на граф: нужно ограничить сверху $\ell(G)$. В работе [4] диссертант доказал следующую теорему, включенную в диссертацию.

Теорема 6.3. *Пусть G — связный граф, $v(G) \geq 2$, $\ell(G) \leq k$, $k \geq 1$. Тогда*

$$u(G) \geq \frac{1}{2k+4} v(G) + \frac{3}{2}.$$

В конце главы 6 построены бесконечные серии примеров, подтверждающие точность оценки из теоремы 6.3.

Заключение. В первой главе диссертации построены деревья, описывающие структуру разбиения k-связного графа наборами из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов для произвольного k. Доказаны свойства построенных деревьев, показывающие их аналогию с деревом блоков и точек сочленения связного графа. Эти деревья представляют собой аппарат, позволяющий упорядочить структуру k-связного графа. Кроме того, в диссертации описывается и применяется гипердерево разбиения, обобщающее все построенные структурные деревья. Отметим, что все эти объекты удалось построить с помощью придуманного диссертантом понятия части разбиения графа набором разделяющих множеств, которое, фактически, является основным методом изучения структуры связности графа в диссертации.

Наиболее важным итогом диссертационной работы автору представляется именно построение структурных деревьев, обобщающих дерево блоков и точек сочленения для графов большей связности. Классическое дерево блоков и точек сочленения имеет множество применений, причем не только в теории связности. Можно ожидать, что в будущем найдут свое применение и построенные в диссертации структурные деревья.

Ряд применений построенных конструкций приведен в диссертации: изучена структура минимальных и критических двусвязных графов, доказаны оценки на хроматическое число двусвязного графа, доказан ряд результатов о структуре минимальных k-связных графов с малым числом вершин степени k для произвольного k. С помощью разработанных методов исследованы множества вершин k-связного графа, одновременное удаление которых не нарушает k-связности.

В конце диссертации доказан ряд нижних оценок на количество листьев в остовном дереве связного графа. Для оценки наибольшего количества листьев в остовном дереве связного графа применяются модификации классических методов и новые методы, основанные на использовании дерева блоков и точек сочленения. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие вершины степеней 1 и 2 исходного связного графа. Эти методы могут быть применены для получения новых оценок в будущем.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Дискретная математика, т. 13, в.1 (2001), стр. 63-72.

[2] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 293 (2002), стр. 59-93.

[3] Д. В. Карпов. *Разделяющие множества в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 340 (2006), стр. 33-60.

[4] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Записки научных семинаров ПОМИ т. 381 (2010) стр. 78-87.

[5] Д. В. Карпов. *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: новые нижние оценки через количество вершин степеней* 3 *и не менее* 4. Записки научных семинаров ПОМИ, т. 406 (2012), стр. 31-66.

[6] Д. В. Карпов. *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: нижние оценки через количество вершин степеней* 1, 3 *и не менее* 4. Записки научных семинаров ПОМИ, т. 406 (2012), стр. 67-94.

[7] Д. В. Карпов. *Дерево разбиения двусвязного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 417 (2013), стр. 86-105.

[8] Д. В. Карпов. *Минимальные двусвязные графы.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 417 (2013), стр. 106-127.

[9] Д. В. Карпов. *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 22-40.

[10] Д. В. Карпов. *Минимальные k-связные графы с минимальным числом вершин степени k.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 41-65.

[11] Д. В. Карпов. *Удаление вершин из двусвязного графа с сохранением двусвязности.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 66-73.

[12] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 266 (2000), стр. 76-106.