Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Болохов Тимур Анатольевич

Расширения квадратичных форм векторного оператора Лапласа и сингулярные возмущения оператора Шредингера

01.01.03 – Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2018

Работа выполнена в Лаборатории математических проблем физики ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук.

Научный руководитель:
Семенов-Тян-Шанский Михаил Арсеньевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук.

Официальные оппоненты:
Набоко Сергей Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный университет,
Смирнов Александр Олегович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения.

Ведущая организация: ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии наук.

Защита состоится «____» ______________ 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук, расположенном по адресу: *191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук, http://pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «____» ______________ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Оператор Лапласа является универсальным объектом, используемым в различных областях механики и физики. В квантовой механике этот оператор появляется как кинетическая часть оператора Шредингера в электродинамике, теории поля, механике сплошных сред и гидродинамике — в качестве оператора квадратичной формы функционала потенциальной энергии, в термодинамике — как оператор, определяющий скорость передачу тепла в уравнении теплопроводности. Универсальность оператора Лапласа заключается, прежде всего, в возможности точно решить однородное уравнение с его участием, как в координатном представлении, с помощью обратного оператора или функции Грина, так и с помощью преобразования Фурье, либо другого способа разделения переменных. Более сложные уравнения, содержащие кроме оператора Лапласа также добавки, пропорциональные малому параметру, могут быть точно, либо приближенно решены методом теории возмущений, то есть с помощью разложения в ряд по параметру. Среди примеров, допускающих такой вид решений, можно перечислить метод функционального интегрирования для вычисления матрицы рассеяния в теории поля и корреляционных функций в статистической физике, метод приближения Борна в теории рассеяния и другие. Все эти методы используют в том или ином виде функции Грина, разложение по собственным функциям (преобразование Фурье) или же выражение для квадратичной формы обратного оператора.

В то же время, перечисленные выше методы обладают существенным недостатком: они подразумевают наличие (малого) параметра и общую сходимость ряда теории возмущений в исследуемой задаче. Этим свойством обладают далеко не все модели, рассматриваемые в механике и физике. В некоторых случаях теория возмущений оказывается неприменимой и не дает корректные результаты.

На этом фоне теория взаимодействия с сингулярными потенциалами (также называемая с литературе теорией сингулярных возмущений [1]) показала, что существуют объекты, которые являются возмущениями оператора Лапласа определенного вида и обладают большей частью его полезных свойств. В частности, гамильтониан системы по-прежнему представляется в виде квадратичной формы оператора, действующего в пространстве функций, а не является формой более высокой степени. Кроме того, возмущенные операторы допускают точное описание в терминах резольвенты, подобной резольвенте оператора Лапласа [2], или, что эквивалентно, в терминах спектрального разложения с простыми спектральными проекторами. Эти свойства позволяют использовать теорию взаимодействия с сингулярными потенциалами, как для полного описания каких-либо физических или механических систем, так и в качестве точных затравочных решений при построении теории возмущений, как разложения по малому параметру.

В работе [2] модель скалярной трехмерной частицы, взаимодействующей с точечным потенциалом была исследована с точки зрения теории операторов. Было показано, что для данной модели можно выбрать такой режим перенормировки (стремления к нулю константы взаимодействия и расширения области учитываемых состояний), что оператор Шредингера приобретает строгий математический смысл. Ему соответствует некоторое расширение симметрического оператора, получаемого из оператора Лапласа сужением области определения до пространства функций, исчезающих в начале координат (точке взаимодействия) вместе с первой производной. Для этого расширения вычисляется резольвента, а через нее — матрица рассеяния и остальные характеристики модели.

Вместе с тем, взаимодействие с сингулярными потенциалами может быть описано в терминах расширений квадратичной формы оператора Лапласа (оператора Шредингера свободной частицы). Такое описание является простым и наглядным, так как расширенная квадратичная форма имеет смысл математического ожидания для энергии взаимодействующей частицы в каком-либо квантовом состоянии. Вид этого расширения в координатном представлении определяется из условий физической задачи, а само расширение квадратичной формы изначально имеет строгий математический смысл и не требует проведения перенормировки. Самосопряженный оператор Шредингера однозначно определяется с помощью теоремы Фридрихса-Стоуна [3], далее могут быть вычислены его резольвента и спектральное разложение.

Из этих свойств также вытекает возможность применения теории взаимодействия с сингулярными потенциалами, сформулированной в терминах квадратичных форм, для описания функционала потенциальной энергии в электродинамике или теории поля. Расширения квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном подпространстве соответствуют взаимодействию классического электромагнитного поля с точечным объектом (рассеяние электромагнитной волны на точечном заряде). Таким образом, для решения задачи построения резольвенты или спектрального разложения самосопряженного оператора, задающего квадратичную форму функционала энергии в электродинамике, оказывается естественно использовать методы теории взаимодействия с сингулярными потенциалами.

В данной работе описанные выше методы применяются к ранее не исследованным случаям взаимодействия поперечного и продольного векторных полей с сингулярными потенциалами. В сферических координатах на множестве поперечных или продольных функций в трехмерном пространстве, исчезающих в окрестности начала координат вместе с первыми производными, строится симметрический оператор, а затем исследуются его самосопряженные расширения. Для самосопряженных расширений радиальных частей этого оператора строятся резольвенты и спектральные разложения, а затем производится перенос резольвенты на пространство функций трех переменных. В результате выводятся выражения для замкнутых квадратичных форм, соответствующих взаимодействию поперечного или продольного поля со сферически-симметричными сингулярными потенциалами.

Степень разработанности темы исследования. Работа является распространением теории взаимодействия с сингулярными потенциалами, описываемой в терминах расширений квадратичных форм, на случай поперечного и продольного подпространств в пространстве векторных функций. Математически строгая теория взаимодействия квантово-механической частицы (частиц) с сингулярными потенциалами берет свое начало с работы [2], в которой взаимодействие скалярной трехмерной частицы с точечным потенциалом рассматривалось с точки зрения теории расширений симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Дальнейшее развитие это теории включало в себя теорию обобщенных сингулярных возмущений [5], нескольких частиц с сингулярным взаимодействием [6], а также взаимодействий, сосредоточенных на подмногообразиях низкой размерности [7]. На данный момент теория взаимодействия с сингулярными потенциалами представляет из себя хорошо изученную область математической физики, опирающуюся на фундаментальный аппарат функционального анализа (см. обзор [1]). Однако, ее приложение, представленное в данной работе, до сих пор оставалось вне поля зрения исследователей.

Базис векторных сферических гармоник был в различных вариантах введен в работах [8], [9] и получил дальнейшее развитие в приложениях к электродинамике и гидродинамике [10], [11].

Теория расширений квадратичных форм опирается на работы Фридрихса и Стоуна [3] и их дальнейшее развитие М. Г. Крейном [12]. Ее приложения к взаимодействию с сингулярными потенциалами были описаны в работе [13].

Цели и задачи диссертационной работы. Целью настоящей диссертации является исследование свойств расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах пространства векторных функций трех переменных, порожденных взаимодействием с точечной сингулярностью. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- На множестве функций, исчезающих в окрестности начала координат вместе с первыми производными, в сферических координатах были построены симметрические операторы, и показано, что они имеют нетривиальные индексы дефекта.

- Были исследованы самосопряженные расширения указанных операторов.

- Для расширений радиальных частей были построены резольвенты и спектральные разложения, а затем построены резольвенты операторов в трехмерном пространстве.

- Были получены выражения для замкнутых квадратичных форм, соответствующих взаимодействию поперечного или продольного поля со сферически симметричными сингулярными потенциалами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, в частности, описание самосопряженных расширений оператора Лапласа на поперечном подпространстве и расширений его квадратичной формы могут быть использованы в электродинамике, в физике твердого тела, для описания Рэлеевского рассеяния, а также в любой другой теории, содержащей взаимодействие поперечных волн с точечными сингулярностями среды распространения.

Методология и методы исследования. Исследование использует такие широко распространенные методы теории операторов в гильбертовом пространстве как расширение симметрических операторов с конечными индексами дефекта с помощью преобразования Кэли, вычисление спектрального разложения самосопряженного оператора через полюса его резольвенты и скачек резольвенты на границе разреза в спектральной плоскости. Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах строятся с помощью формулы Крейна для разности резольвент. Также используются метод разделения переменных с использованием базиса векторных сферических гармоник и теория замкнутых расширений квадратичных форм, порожденных полуограниченным симметрическим оператором.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что существует параметризация поперечного и продольного подпространств пространства векторных функций трех переменных, в которой индуцированные скалярные произведения и радиальные части оператора Лапласа задаются одними и теми же дифференциальными операциями (для поперечного подпространства это свойство относится только к половине параметризующих радиальных функций).

2. Доказано, что в подпространствах с орбитальным моментом $l = 1$ радиальные части оператора Лапласа на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат, в индуцированном скалярном произведении являются симметрическими операторами с индексами дефекта (1,1). Построены самосопряженные расширения этих операторов и их спектральные разложения.

3. Построены выражения для замкнутых сферически симметричных расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах, определяемые указанными выше самосопряженными расширениями радиальных операторов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность исследования обусловлена высокой степенью разработанности и длительной историей применения в математической физике используемых в работе методов теории операторов в гильбертовых пространствах. Результаты докладывались на научных семинарах Лаборатории математических проблем физики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН и семинаре Кафедры высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [20], [21], [22], [23], из них 3 статьи [20], [21], [22] в рецензируемом издании, входящем в список ВАК.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации и положения, выносимые на защиту, получены автором лично и опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 82 страницы. Библиография включает 45 наименований на 4 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и описана научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, перечислены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе в сферических координатах

$$\vec{x} = \vec{x}(r, \Omega), \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega \in \mathbb{S}^2$$

с помощью ортогонального набора векторных сферических гармоник [8], [9]

$$\begin{aligned}
\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) =& \frac{\vec{x}}{r} Y_{lm}(\Omega), \quad 0 \le l, \quad |m| \le l, \\
\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) =& (l(l+1))^{-1/2} r \vec{\partial} Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l, \\
\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) =& (l(l+1))^{-1/2} (\vec{x} \times \vec{\partial}) Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l
\end{aligned}$$

строятся представления для продольных

$$\vec{g}(\vec{x}) = \frac{v_0}{r} \vec{\Upsilon}_0 + \sum_{1 \le l, |m| \le l} \left(\left(\frac{v_{lm}}{r}\right)' \vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l(l+1)} \frac{v_{lm}}{r^2} \vec{\Psi}_{lm} \right)$$

и поперечных

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\le l,|m|\le l} \big(\sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\le l,|m|\le l} \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}$$

векторных функций. Здесь v_0 и $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ — это параметризующие функции только радиальной переменной r. Показывается, что скалярное произведение из пространства $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{f},\vec{h})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{f}(\vec{x})}\vec{h}(\vec{x})\,d^3x$$

при переносе на гладкие, исчезающие в нуле наборы параметров v_0, $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$, порождает следующие скалярные произведения для функций на положительной полуоси:

1.
$$(\vec{h}_v,\vec{h}_{\tilde{v}})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_0^\infty \bar{v}(r)\tilde{v}(r)\,dr = (v,\tilde{v}),$$
если
$$\vec{h}_v(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{v(r)}{r}\vec{\Upsilon}_0(\Omega), \quad \vec{h}_{\tilde{v}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\tilde{v}(r)}{r}\vec{\Upsilon}_0(\Omega),$$

2.
$$(\vec{h}_{\phi_{lm}},\vec{h}_{\tilde{\phi}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty \bar{\phi}_{lm}(r)\tilde{\phi}_{l'm'}(r)\,dr \equiv \delta_{ll'}\delta_{mm'}(\phi_{lm},\tilde{\phi}_{l'm'}),$$
если
$$\vec{h}_{\phi_{lm}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\phi_{lm}(r)}{r}\vec{\Phi}_{lm}(\Omega), \quad \vec{h}_{\tilde{\phi}_{l'm'}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\tilde{\phi}_{l'm'}(r)}{r}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega),$$

3.
$$(\vec{f}_{u_{lm}},\vec{f}_{\tilde{u}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty \big(\frac{d\bar{u}_{lm}}{dr}\frac{d\tilde{u}_{lm}}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}_{lm}\tilde{u}_{lm}\big)\,dr,$$
если
$$\vec{f}_{u_{lm}}(\vec{x}) = \sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}$$

4.
$$(\vec{g}_{v_{lm}},\vec{g}_{\tilde{v}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty \big(\frac{d\bar{v}_{lm}}{dr}\frac{d\tilde{v}_{lm}}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}_{lm}\tilde{v}_{lm}\big)dr,$$

если
$$\vec{g}_{v_{lm}}(\vec{x}) = (\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}.$$

Таким образом, получаются “плоские” скалярные произведения для параметров v_0, $\{v_{lm}\}$ и интегралы

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}v\Big)dr \equiv \langle u, v\rangle_l \tag{1}$$

для $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$. Эти интегралы представляют из себя положительно определенные скалярные произведения и порождают гильбертовы пространства

$$\mathcal{H}_l = \{u(r) : \int\limits_0^\infty \big(|u'|^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}|u|^2\big)dr < \infty\},$$

состоящие из абсолютно-непрерывных функций на полуоси, исчезающих в нуле, таких, что интеграл в определении конечен. Локально эти пространства эквивалентны классу Соболева $\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^+)$ (см. определение в [14]), однако, глобально они содержат медленно возрастающие (не быстрее, чем $r^{1/2}$) на бесконечности функции.

Если функция v из пространства $\mathcal{H}_l$ дифференцируема два раза, то для произведения $\langle u, v\rangle_l$ можно записать следующее равенство

$$\langle u, v\rangle_l = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}v\Big)dr = \int\limits_0^\infty \bar{u}\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)v\, dr = \int\limits_0^\infty \bar{u}\, T_l v\, dr$$

где T_l — это дифференциальная операция

$$T_l : \quad v \to T_l v = -\frac{d^2}{dr^2}v + \frac{l(l+1)}{r^2}v.$$

Эта же операция входит и в действие оператора Лапласа

$$\Delta = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

на функции $\vec{h}_v$, $\vec{h}_{\phi_{lm}}$, $\vec{f}_{u_{lm}}$, $\vec{g}_{v_{lm}}$, введенные выше

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{h}_v &= \frac{T_1 v(r)}{r}\vec{\Upsilon}_0(\Omega) = \vec{h}_{T_1 v},\\
\Delta\vec{h}_{\phi_{lm}} &= \frac{T_l\phi_{lm}(r)}{r}\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) = \vec{h}_{T_l\phi_{lm}},\\
\Delta\vec{f}_{u_{lm}} &= \sqrt{l(l+1)}\frac{T_l u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{(T_l u_{lm})'}{r}\vec{\Psi}_{lm} = \vec{f}_{T_l u_{lm}},\\
\Delta\vec{g}_{v_{lm}} &= (\frac{T_l v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}\frac{T_l v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm} = \vec{g}_{T_l v_{lm}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для достаточно гладких векторных функций в трехмерном пространстве существует такое разложение по векторным сферическим гармоникам, что действие оператора Лапласа сводится к действию на параметры радиальных операторов T_l. При этом скалярные произведения из трехмерного пространства для одного набора параметров v_0, $\{\phi_{lm}\}$ переходят в плоские интегралы по полуоси, а для двух других наборов $\{u_{lm}\}$, $\{v_{lm}\}$ — в произведения (1), определяемые с помощью тех же самых операторов T_l. Это совпадение является ключевым для вычислений второй главы, так как две одинаковые дифференциальные операции коммутируют, что открывает путь к построению нетривиальных дефектных подпространств.

Вычисления первой главы для поперечного подпространства опубликованы в работе [20], для продольного подпространства — в работе [22].

Во второй главе введенные выше дифференциальные операции T_l рассматриваются на множествах $\mathring{\mathcal{W}}_l$ функций из $\mathcal{H}_l$, таких, что действие T_l на них также попадает в $\mathcal{H}_l$, а вторая производная исчезает в начале координат

$$\mathring{\mathcal{W}}_l = \{u(r) :\ u \in \mathcal{H}_l,\ T_l u \in \mathcal{H}_l,\ u''(0) = 0\}, \quad l \geq 1.$$

Показывается, что такие объекты являются замкнутыми симметрическими операторами $\tilde{T}_l$, для которых доказывается

Утверждение. *Индексы дефекта оператора $\tilde{T}_l$ в скалярном произведении $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_l$ равны $(1,1)$ при $l = 1$ и $(0,0)$ в остальных случаях.*

Дефектные векторы (элементы базиса дефектных подпространств) для случая $l = 1$ выглядят следующим образом

$$c_\pm(r) = D\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} + r^{-1} = D\big(\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} - 1\big),$$

где D — это ковариантная производная

$$D = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \frac{d}{dr} - \frac{1}{r}.$$

Далее показывается, что операторы T_1^κ, действующие как

$$T_1^\kappa u = T_1 u - \frac{2}{r}u'(0) = -\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r^2}u - \frac{2}{r}u'(0), \tag{2}$$

на областях определения

$$\mathcal{W}_1^\kappa = \{u(r):\ u \in \mathcal{H}_l,\ T_1^\kappa u \in \mathcal{H}_l,\ 3u''(0) = 4\kappa u'(0)\}, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(0,0)$. А так как область определения $\mathring{\mathcal{W}}_1$ оператора $\tilde{T}_1$ лежит в области определения $\mathcal{W}_1^\kappa$ оператора T_1^κ, и действие T_1^κ на $\mathring{\mathcal{W}}_1$ совпадает с действием T_1, то отсюда следует самосопряженность операторов T_1^κ. Затем выводится выражение для ядра резольвенты $R(r,s;z)$

$$(T_1^\kappa - z^2)R(r,s;z) = \delta(r-s), \quad 0 < \arg z < \pi,$$

самосопряженного оператора T_1^κ

$$R(r,s;z) = \frac{1}{W}\big(h(r)g(s)\theta(s-r) + h(s)g(r)\theta(r-s) + \frac{1+\beta}{r}g(s)\big),$$

здесь

$$h(r) = De^{-izr} + \beta(z)De^{izr}, \quad g(r) = De^{izr}, \quad W(z) = -2iz^3,$$
$$W(z) = -2iz^3, \quad \beta(z) = \frac{z-i\kappa}{z+i\kappa}.$$

Исследование аналитических свойств ядра $R(r,s;z)$ позволяет получить спектральное преобразование для непрерывной

$$p_\lambda^\kappa(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\big(D\cos(\zeta+\lambda r) + \frac{\cos\zeta}{r}\big), \quad e^{2i\zeta} = \frac{\lambda - i\kappa}{\lambda + i\kappa}$$

и дискретной

$$q^\kappa(r) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}\big(De^{\kappa r} + \frac{1}{r}\big) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}D\big(e^{\kappa r} - 1\big), \quad \kappa < 0$$

частей спектра оператора T_1^κ. С помощью функций $p_\lambda^\kappa(r)$ и $q^\kappa(r)$ можно записать разложение единицы

$$\int_0^\infty p_\lambda^\kappa(r) T_1 p_\lambda^\kappa(s)\, d\lambda + \theta(-\kappa)\, q^\kappa(r) T_1 q^\kappa(s) = \delta(r-s),$$

и соотношения ортогональности

$$\int_0^\infty \Big(\frac{dp_\lambda^\kappa(r)}{dr}\frac{dp_\mu^\kappa(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} p_\lambda^\kappa(r) p_\mu^\kappa(r)\Big) dr = \delta(\lambda - \mu),$$
$$\int_0^\infty \Big(\frac{dp_\lambda^\kappa(r)}{dr}\frac{dq^\kappa(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} p_\lambda^\kappa(r) q^\kappa(r)\Big) dr = 0, \quad \kappa < 0.$$

Теория Крейна [15] связывает выражения для ядра резольвенты произвольного самосопряженного расширения некоторого симметрического оператора в различных точках области регулярности. С помощью преобразования Фурье можно вычислить выражение для ядра резольвенты $\mathring{R}_w$ самосопряженного оператора Δ_0, заданного на множестве регулярных два раза дифференцируемых функций [4, стр. 73]

$$\mathring{R}_w^{jj'}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{i\sqrt{w}|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\delta_{jj'}, \quad \sqrt{\bar{w}} = -\overline{\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi.$$

Далее, с помощью аналитических векторов, которые для поперечного подпространства выглядят следующим образом

$$\vec{B}_w^m(\vec{x}(r,\Omega)) = \sqrt{2}\frac{c_w(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c_w'(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega),$$

$$c_w(r) = D\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big),$$

можно вывести выражение для разности резольвент самосопряженных расширений симметрического оператора в произвольной точке w

$$R_w - \mathring{R}_w = \beta_{mm'}(w)\vec{B}_w^m\big(\vec{B}_{\bar{w}}^{m'}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3},$$

где $\beta_{mm'}(w)$ — это матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\beta_{mm'}^{-1}(w) = \beta_{mm'}^{-1}(i\chi^2) - (w - i\chi^2)\big(\vec{B}_{\bar{w}}^m, \vec{B}_{i\chi^2}^{m'}\big)_{\mathbb{R}^3}. \tag{3}$$

Значение функции $\beta_{mm'}(w)$ в точке $i\chi^2$ определяется с помощью параметров унитарной матрицы, задающей преобразование Кэли. Решая уравнение (3), можно вычислить значение $\beta_{mm'}(w)$ в произвольной точке

$$\beta_{mm'}(w) = \sum_{n=1}^{3} \frac{u_m^n \bar{u}_{m'}^n}{i\chi^2} \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}\chi^3 + iw(\alpha_n - 1)(\sqrt{w} + \sqrt{i\chi^2})}, \tag{4}$$

здесь u_m^n, $n = 1, 2, 3$ — это собственные векторы унитарной матрицы, а α_n — соответствующие им собственные числа. Выражение (4) является аналитической функцией спектрального параметра w в области $0 < \arg w < 2\pi$, за исключением некоторого количества полюсов, определяемых знаменателями матричной функции $\beta_{mm'}(w)$. Эти полюса соответствуют собственным значениям дискретного спектра оператора $\Delta_u^\perp$, а вычеты в них — проекторам на собственные подпространства.

Результаты второй главы опубликованы в работах [21], [23].

В третьей главе приводится утверждение, что ограничения квадратичной формы векторного оператора Лапласа на продольные и поперечные подпространства являются замкнутыми квадратичными формами. Далее, пользуясь полученной формулой (2) для самосопряженного расширения симметрического оператора радиальной части при $l = 1$, выводятся выражения для замкнутых расширений квадратичных форм оператора Лапласа на поперечном

$$Q_\Delta^{\perp\kappa}(\vec{f}_m) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x - \Big(\frac{5}{3\rho} - \frac{44}{27}\kappa\Big) \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}_m(\vec{x})|^2\, d^2s \Big)$$

и продольном

$$Q_\Delta^{\|\kappa}(\vec{g}_m) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \Big|\frac{\partial g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x - \Big(\frac{3}{\rho} - 2\kappa\Big) \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{g}_m(\vec{x})|^2\, d^2s \Big)$$

подпространствах.

Результаты третьей главы для расширений квадратичной формы на поперечном подпространстве опубликованы в работе [20], для расширений на продольном подпространстве — в работе [22].

В Заключении кратко перечислены полученные результаты и описаны возможные направления их дальнейшего развития.

Цитированная литература

1. Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbation of differential operators. Solvable Schrödinger type operators. Cambridge University Press, 2000. 429 pp.

2. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии Наук СССР. том 137 вып. 5, 1961. С. 1011-1014.

3. Friedrichs K. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren // Math. Ann. Volume 109. 1934. pp 465–487.
   Stone M. Linear transformations. in Hilbert spaces and their applications in analysis / Amer. Math. Soc. Colloquim Publication. 15. R.I. Providence, 1932.

4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность. М.: Мир, 1978. 395 с.

5. Павлов Б. С. Модель потенциала нулевого радиуса с внутренней структурой // Теоретическая и Математическая Физика. том 59 вып. 3. 1984. С. 345–353.

6. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике // Доклады Академии Наук СССР. том 141 вып. 6. 1961. С. 1335–1338.

7. Павлов Б. С. Граничные условия на тонких многообразиях и полуограниченность трехчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом // Математический сборник. том 136(178) вып. 2(6). 1988. С. 163–177.

8. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984. 304 с.

9. Hill E. L. The theory of vector spherical harmonics // American Journal of Physics. Volume 22. 1954. pp 211–214.

10. Carrascal B., Estevez G. A., Lee P., Lorenzo V. Vector spherical harmonics and their application to classical electrodynamics // European Journal of Physics. Volume 12. 1991. pp 184–191.

11. Gray C. G., Gubbins K. E. Theory of molecular fluids. Volume 1: Fundamentals. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1984. 626 pp.

12. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Математический сборник. том 20(63). 1947. С. 431–495.

13. Бирман М. Ш. Возмущения квадратичных форм и спектр задач с сингулярными граничными условиями // Доклады Академии Наук СССР. том 125 вып. 3. 1959. С. 471–474.

14. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988. 336 с.

15. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II // Математический сборник. том 21(64). 1947. С. 365–404.

Список публикаций автора

20. Болохов Т. А. Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа // Записки научных семинаров ПОМИ. том 433. 2015. С. 78–110.

21. Болохов Т. А. Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении // Записки научных семинаров ПОМИ. том 434. 2015. С. 32–52.

22. Болохов Т. А. Свойства некоторых расширений квадратичной формы векторного оператора Лапласа // Записки научных семинаров ПОМИ. том 447. 2016 С. 5–19.

23. Болохов Т. А. Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапаласа на поперечном подпространстве / препринт ПОМИ 3/2018.