Отзыв научного руководителя на диссертацию

А.А. ХАРТОВА

"Сложность аппроксимации гауссовских случайных полей
большой параметрической размерности",

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.05

Рецензируемая диссертация посвящена изучению различных проблем, так или иначе связанных с аппроксимацией случайных полей, зависящих от большого числа параметров, полями конечного ранга (т.е. конечными суммами произведений случайных величин на детерминированные функции). Вопрос заключается в том, сколько и каких слагаемых должна содержать сумма, чтобы она обеспечивала заданную точность аппроксимации в среднем или по вероятности.

Существует широкий круг работ, в которых задача аппроксимации решается для заданного случайного поля. Однако в последние годы возрос интерес и к гораздо менее классической постановке, когда изучению подлежит случайное поле, зависящее от столь большого числа параметров, что к самому понятию размерности параметрического множества можно подходить асимптотически. Действительно, многопараметрические задачи очень характерны для современных приложений математики (включая стохастику) в экономике, биологии, химии, информатике и других областях.

Асимптотический подход к задачам аппроксимации состоит в том, что рассматривается последовательность родственных друг другу случайных полей растущей параметрической размерности, а сложность аппроксимации рассматривается как функция точности, уровня значимости ошибки и параметрической размерности. Этому подходу посвящен недавний фундаментальный трёхтомник Э.Новака и Х.Вожняковского

"Tractability of Multivariate Problems" , vol. 1-3 (2008 – 2012), который вобрал в себя множество конкретных постановок задач и способствовал росту популярности данного направления исследований.

Основное внимание в данной работе уделено так называемым случайным полям тензорного типа, то есть полям, чьи корреляционные функции представляются в виде произведения корреляционных функций однопараметрических процессов. К этому классу относятся, например, хорошо известные в теории вероятностей и математической статистике броуновский лист, броуновская подушка, поле Кифера и другие.

В качестве меры ошибки выступает L_2-норма функций на многомерном кубе. В этом случае ошибка в среднем определяется поведением собственных чисел корреляционного оператора процесса, и ключевым становится асимптотическое поведение последовательности упорядоченных собственных чисел. Казалось бы, задача на этом этапе превращается из вероятностной в детерминированную. Однако для тензорных произведений собственные числа удобно описывать лишь как множества, а вот поведение их монотонной перестройки уже не столь просто для исследования. Для преодоления этой трудности Лифшиц и Тулякова предложили в 2006 г. *вероятностный метод* исследования собственных чисел. Этот метод позволил им свести изучение собственных чисел тензорной степени одномерного процесса к классической центральной предельной теореме для суммы независимых одинаково распределённых случайных величин со специально подобранным распределением.

Упомянутый метод и послужил отправной точкой работы А.А. Хартова, который должным образом обобщил его и соединил с целым спектром предельных теорем теории вероятностей, включая, например, теоремы о сходимости к устойчивому закону. Это позволило ему исследовать точность аппроксимации в среднем и по вероятности для широкого круга многопараметрических процессов. Здесь стоит подчеркнуть, что задача аппроксимации в среднем является задачей теории случайных процессов второго порядка, то есть полученные результаты выходят далеко за рамки теории гауссовских процессов, упомянутых в названии работы. Гауссовость же необходима для анализа точности аппроксимации по вероятности.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Во введении должным образом сформулированы цели и методы работы, дано определение основных понятий, изучаемых автором, и приведён краткий, но содержательный обзор результатов последующих глав, в которых они формулируются и доказываются более подробно.

Первая глава является скорее подготовительной. Она посвящена изложению теории информационной сложности, язык и обозначения которой автор использует для постановки решаемых задач. В том числе рассмотрены различные аспекты понятия трактабильности (tractability) – наиболее распространённой в литературе постановке задач о точности аппроксимации последовательностей полей растущей параметрической размерности. Также в этой главе описываются поля тензорного типа и приводятся многочисленные примеры таких полей.

В главах 2–5 рассматривается и решаются различные задачи, связанные с оценкой сложности аппроксимации как функции от порога ошибки и параметрической размерности. В главе 2 ряд задач решается в достаточно общей постановке, без предположения о тензорной структуре процесса. В том числе найдены необходимые и достаточные условия ограниченности сложности как функции размерности при фиксированном пороге ошибки. Наиболее интересными в этой главе являются спектральные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы логарифм сложности аппроксимации в среднем имел вид $A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d)$ где ε – порог ошибки, а d – параметрическая размерность. Также автор нашёл широкие зоны параметров, где поведение сложности аппроксимации в среднем и по вероятности одинаково, по крайней мере, на логарифмическом уровне.

В главе 3 автор рассматривает логарифмические и точные асимптотики сложности аппроксимации тензорных полей, используя и активно развивая вероятностный метод анализа собственных чисел корреляционных операторов тензорных полей. При этом устанавливается связь возможных асимптотик сложности с классом саморазложимых законов распределений. В том, что касается точных асимптотик сложности, диссертант показал их зависимость от арифметической природы последовательности собственных чисел маргинального процесса (в точном соответствии с разделением используемых им предельных теорем теории вероятностей на решётчатый и нерешётчатый случай). Для неоднородных тензорных произведений автор устанавливает ”критерий сильного доминирования", позволяющий во многих интересных случаях при анализе сложности ограничиваться анализом пар наибольших собственных чисел маргинальных процессов. Этот эффект, обнаруженный в частном случае произведений процессов переменной гладкости в работе Вожняковского, Лифшица и Папагеоргиу, противоречит традиционному интуитивному представлению о том, что сложность аппроксимации должна определяться гладкостью поля, то есть асимптотикой собственных чисел (последнее верно только для фиксированного поля, но не для последовательности полей). В диссертации данный феномен получил теоретическое обоснование.

В четвёртой главе, используя гауссовость рассматриваемых случайных полей, автор распространяет результаты, полученные для сложности аппроксимации в среднем на случай аппроксимации по вероятности. Основой рассуждений об эквивалентности поведения двух видов сложности служат классические принципы концентрации гауссовских мер в функциональных пространствах.

Наконец, в главе 5 полученные результаты иллюстрируются приложениями к наиболее интересным последовательностям тензорных случайных полей.

Оценивая диссертацию в целом, можно сказать, что автором совершенно самостоятельно получены оригинальные и запоминающиеся результаты о поведении сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности. Многие постановки задач, не говоря уже о методах их решения, предложены самим диссертантом. Это доказывает высокую степень его научной зрелости.

Читать диссертацию достаточно легко, она грамотно написана, тщательно выверена, хорошо структурирована и содержит всё необходимое как по истории вопроса, так и в деталях изложения.

На взгляд научного руководителя, тема диссертации актуальна, научные положения и выводы работы достоверны, новы и обоснованы. Результаты должным образом опубликованы (в том числе в "Вестнике Санкт-Петербургского университета" и "Записках семинаров ПОМИ", входящих в список изданий, рекомендованных ВАК) и докладывались на различных конференциях и семинарах в России и за рубежом. Содержание работы должным образом отражено в автореферате диссертации. Представленная работа в целом является серьезным научным исследованием. В ней развиваются оригинальные методы исследования и с их помощью получены содержательные новые результаты.

Таким образом, диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, а А.А. Хартов безусловно заслуживает присвоения ученой степени "кандидат физико-математических наук".

Научный руководитель

М.А. Лифшиц
доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного университета

С.-Петербург,
7 апреля 2014 г.

Подпись М.А. Лифшица заверяю