

“Утверждаю”

Проректор МГУ имени М. В. Ломоносова  
начальник Управления научной политики и  
организации научных исследований д.ф.-м.н.  
профессор



*А. А. Федянин*  
А. А. Федянин

«31» октября 2018г.

### Отзыв ведущей организации

на диссертацию Петровой Юлии Петровны «Точные асимптотики малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Исследование асимптотического поведения вероятностей малых уклонений траекторий случайных процессов в различных метриках является важной задачей во многих областях математической статистики, теории вероятностных мер в банаховых пространствах, статистической физике, в других областях математики и ее приложений. Однако, несмотря на актуальность этой проблематики, систематическая ее разработка началась сравнительно недавно – с середины 1970-х годов.

В отличие от теории больших уклонений траекторий случайных процессов, вплоть до сегодняшнего дня полная и исчерпывающая теория малых уклонений не построена. Однако есть направления исследований, в которых можно разработать общие методы и подходы. Если говорить об относительно произвольных банаховых метриках, то основным направлением здесь является исследование гауссовских марковских и связанных с ними процессов. Здесь применяются, как правило, методы диффузионных процессов, такие как формула Гирсанова, другие методы стохастических дифференциальных уравнений. Вторым достаточно хорошо развитым направлением является теория малых уклонений вероятностных мер в гильбертовых пространствах. В первую очередь это относится к гауссовским мерам. Рецензируемая работа относится ко второму направлению: рассматриваются гауссовские меры в гильбертовых пространствах. Если общая теория малых уклонений гауссовских мер в гильбертовых пространствах, основанная на разложении Карунена-Лоэва, развита достаточно полно, то ряд важных задач, где требуется знание точного асимптотического поведения вероятностей малых уклонений, оставались до последнего времени нерешенными. Среди таких задач - оценка точности квантования по времени траекторий случайных процессов, вычисление метрической энтропии функциональных множеств, закон повторного логарифма в форме Чжуна, нахождение скорости ухода бесконечномерного винеровского процесса. Также известно, что малые уклонения тесно связаны с функциональным анализом данных и непараметрическим байесовским оцениванием.

Диссертант взяла для разработки два класса таких задач. Первый класс – это класс конечномерных возмущений гауссовских распределений. Другими словами – это класс условных гауссовских распределений в гильбертовом пространстве, когда условие является конечномерным. Такие гауссовские распределения являются предельными для целого ряда критериев согласия в математической статистике, когда исследуется

согласие распределения статистической выборки с параметрическим семейством распределений, при этом некоторые или все параметры предварительно оцениваются по той же выборке. Соответствующие предельные гауссовские процессы носят название процессов Дурбина. При помощи доказанных в диссертации общих результатов, описывающих связь между асимптотиками малых уклонений в гильбертовой метрике траекторий гауссовского случайного процесса и ее конечномерных возмущений, Ю. П. Петрова получила ряд весьма важных результатов о точном асимптотическом поведении малых уклонений предельных процессов Дурбина в критериях согласия для наиболее часто встречающихся семейств распределений. Здесь стоит отметить в первую очередь нормальное распределение, наиболее часто встречающееся в задачах математической статистики, а также семейство распределений Гумбеля. Область максимального притяжения Гумбеля в теореме Б. В. Гнеденко об экстремальных типах очень широка, поэтому критерии согласия с предварительно оцененными параметрами имеет огромное значение в задачах статистики экстремумов, имеющих широкое применение в финансовой и актуарной математике, в задачах математической теории надежности. При решении этих задач Ю. П. Петрова разработала специальную вспомогательную технику асимптотического анализа быстро осциллирующих интегралов от медленно меняющихся функций, которая, несомненно, при определенном развитии, найдет свое применение и в других задачах теории вероятностей и ее приложений.

Второй важный класс гауссовских процессов, рассмотренный в диссертации, являются гауссовские процессы, функция ковариаций которых является функцией Грина некоторой краевой задачи, с исключенным полиномиальным трендом. Эти процессы можно представить как компоненту, ортогональную к проекции исходного процесса на соответствующее подпространство полиномов. Для этого класса гауссовских процессов найдены асимптотики вероятностей малых уклонений, что также является важным результатом для дальнейшего развития теории малых уклонений гауссовских мер.

Обратимся к недостаткам диссертации.

- Понятие полного асимптотического разложения, введенное в диссертации, отличается от стандартного: во-первых, непонятно, является ли каждый последующий член разложения много меньше предыдущего, во-вторых только на конкретных рассматриваемых в работе примерах показано, что остаточный член пренебрежимо мал. Поэтому, хотя утверждения Теорем 2.1 - 2.3 верны, формулировки неудачны. Правильно было бы употреблять другой термин, например, «асимптотические равенства».
- Стоило бы описать класс рассматриваемых в главе 2 медленно меняющихся функций в терминах общей теории правильно меняющихся функций ( Теорема 1.3.1 из монографии <sup>1</sup>).
- Термин «конечномерные возмущения» активно используется с первой страницы диссертации, но определен лишь на странице 10. Это затрудняет чтение. Следовало бы сразу дать ссылку на эти определения. Заметим, что при этом асимптотическая близость спектров определена сразу же, причем дважды, а обозначение образа оператора  $\langle \text{Im} \rangle$  не определено вообще. Далее, вместо термина «исключенный тренд порядка  $n$ » следовало бы использовать более определенный - «исключенный полиномиальный тренд степени  $n$ ».
- Некорректно сформулирована предельная теоремы для эмпирической функции распределения с оцениваемыми параметрами: не указано, что она верна, если выборка взята из распределения с именно этим параметром.

---

<sup>1</sup> Bingham N.H., Goldie C.M. and Teugels J.L., Regular variation, Cambridge, 2001.

- Есть недостатки оформления, например, в (1) не указано, что  $\epsilon$  положителен.

Следует отметить, что эти недостатки не влияют ни на формулировки результатов, выносимых на защиту, ни на их доказательства, а, следовательно, не умаляют общую оценку диссертации.

В диссертации решена важная научно-техническая проблема – получены точные асимптотики вероятностей малых отклонений траекторий двух важных классов гауссовских случайных процессов - класса конечномерных возмущений гауссовских процессов, имеющих широкое применение в математической статистике, теории квантования траекторий, в других областях теории вероятностей, функционального анализа и приложений, и класса гриновских гауссовских процессов с исключенным полиномиальным трендом, также имеющих широкое применение в математической статистике и других областях математики и приложений.

С результатами диссертации следует ознакомить специалистов МГУ им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургского и Новосибирского университетов, ИППИ РАН, ЦЭМИ РАН, ИБРАЭ РАН, НИИУ ВШЭ.

Основные результаты опубликованы своевременно. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, диссертация Петровой Ю. П. «Точные асимптотики малых отклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика, - а ее автор, Петрова Юлия Петровна, заслуживает присуждения ей искомой степени.

Главный научный сотрудник  
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова  
доктор физико-математических наук профессор

В. И. Питербург

Заведующий кафедрой  
теории вероятностей МГУ им. М. В. Ломоносова  
академик



А. Н. Ширяев

Заместитель декана  
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова  
чл.-корр. РАН

А. И. Шафаревич