Введение в геометрическую теорию меры

С. В. Иванов

10 мая 2008 г.

Это предварительные заметки по курсу, читаемому в физматклубе. Текст будет дополняться по мере продвижения курса.

1 Теория меры: определения

1.1 Наивная теория меры

Первоначальные представления о площади и объеме можно описать следующими аксиомами:

1. Каждому ограниченному множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ сопоставлено неотрицательное число $V(A)$, называемое (n-мерным) объемом этого множества.
2. Объем аддитивен: если $A \cap B = \emptyset$, то $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$.
3. Если множества A и B конгруэнтны (совмещаются движением), то их объемы равны.
4. Объем единичного куба равен 1.

У этих аксиом есть фатальный недостаток: они внутренне противоречивы. Противоречие было предъявлено в 1914 году Хаусдорфом. Позднее (в 1926 году) Банах и Тарский оформили его в виде следующей теоремы.

Теорема (парадокс Банаха–Тарского)**.** *Можно разбить стандартный шар $B \subset \mathbb{R}^3$ на 5 непересекающихся множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и построить такие множества B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, что*

1. Каждое множество B_i конгруэнтно соответствующему множеству A_i.
2. B_1 и B_2 не пересекаются и их объединение равно B.
3. B_3, B_4 и B_5 попарно не пересекаются и их объединение равно B.

Доказывать эту теорему мы не будем. Далее будут приведены более простые (но несколько менее "парадоксальные") построения.

1.2 Пространства с мерой

Чтобы обойти проблемы, связанные с парадоксом Банаха–Тарского, нужно отказаться от предположения, что *все* множества имеют объем. Множества, для которых определен объем, называются *измеримыми*. Кроме того, для многих приложений необходимо, чтобы объем был *счетно-аддитивным*, то есть складывался при объединении счетного числа частей.

Определение. *Пространство с мерой* — это множество X, в котором выделена некоторая система $\mathfrak{A} \subset 2^X$ его подмножеств (называемых *измеримыми*) и задана функция $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$, называемая *мерой*. При этом должны выполняться следующие условия.

Класс $\mathfrak{A}$ измеримых множеств является σ-алгеброй, то есть:

1. $X \in \mathfrak{A}$ (все пространство является измеримым множеством).
2. Объединение, пересечение и разность любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ тоже принадлежит $\mathfrak{A}$.
3. Объединение любого счетного набора множеств из $\mathfrak{A}$ снова принадлежит $\mathfrak{A}$.

Функция μ аддитивна и счетно-аддитивна, то есть:

4. Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Кроме того, $\mu(\emptyset) = 0$.
5. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный набор множеств. Тогда, если все A_i измеримы и попарно не пересекаются, то то $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Замечания. 1. В свойстве 5 в правой части стоит сумма ряда. Поскольку все слагаемые неотрицательны, сумма не зависит от порядка слагаемых.

2. Требование $\mu(\emptyset)$ добавлено для того, чтобы исключить единственный пример, в котором мера любого множества равна $+\infty$.

3. Поскольку дополнение измеримого множества измеримо, из свойства 3 следует, что пересечение счетного набора измеримых множеств тоже измеримо. Аналогично, в свойстве 2 достаточно ограничиться только одной из операций объединения и пересечения.

Тривиальные примеры. В этих примерах можно считать, что все множества измеримы.

1. *Считающая мера.* Мера множества равна количеству его элементов.

2. *δ-мера Дирака.* Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и положим $\mu(A) = 1$, если $x_0 \in A$ и $\mu(A) = 0$, если $x_0 \notin A$. Эта мера μ обозначается через δ_{x_0}.

3. Положим меру любого счетного множества равной 0, а любого несчетного — равной $+\infty$.

4. Измеримое подмножество пространства с мерой само является пространством с мерой.

Простейшие свойства. Любая мера μ обладает следующими свойствами:

1. Монотонность: если множества A и B измеримы и $A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. Субаддитивность: $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ для любых измеримых множеств A и B.

3. Счетная субаддитивность: $\mu(\bigcup A_i) \le \sum \mu(A_i)$ для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.

4. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств, $A = \bigcup A_i$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$.

5. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ — убывающая последовательность измеримых множеств, $A = \bigcap A_i$. Предположим, что $\mu(A_1) < +\infty$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$. Замечание: условие $\mu(A_1) < +\infty$ существенно.

Задача. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность измеримых множеств в пространстве X, причем $\mu(X) < +\infty$. Пусть A — *верхний предел* этой последовательности, то есть множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим из множеств A_i. Докажите, что A измеримо и $\mu(A) \ge \overline{\lim}\, \mu(A_i)$.

1.3 Борелевские множества

Далее основное множество X будет всегда предполагаться метрическим пространством. В приложениях можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Напоминание: множество $A \subset X$ называется *открытым*, если оно вместе с каждой точкой содержит некоторую ее окрестность, где под окрестностью понимается шар с центром в этой точке. Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто (это эквивалентно тому, что A содержит все свои предельные точки).

Определение. *Борелевская σ-алгебра* пространства X — это минимальная по включению σ-алгебра в X, содержащая все открытые множества. Множество $A \subset X$ называется *борелевским*, если оно принадлежит борелевской σ-алгебре. *Борелевская мера* на X — мера, определенная на борелевской σ-алгебре.

Чтобы доказать, что борелевская σ-алгебра существует, рассмотрим пересечение всех σ-алгебр, содержащих все открытые множества. Аналогично определяется σ-алгебра, порожденная произвольным множеством $\mathcal{P} \subset 2^X$.

Для построения борелевской σ-алгебры не обязательно начинать с множества всех открытых (или всех замкнутых) множеств. Например, борелевская σ-алгебра на прямой порождается лучами вида $[a, +\infty)$.

1.4 Мера Лебега

Теорема (Лебег)**.** *Существует единственная борелевская мера μ_n в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и такая, что мера стандартного единичного куба $I^n = [0,1]^n$ равна 1.*

Мера из теоремы называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.* Теорема Лебега будет доказана позднее (окольным путем). Более простые и “прямолинейные” доказательства можно найти в учебниках по анализу.

Замечание. На самом деле меру Лебега определяют на большей σ-алгебре, чем борелевская. Эта тонкость пока несущественна.

Примеры. Предполагая доказанным существование одномерной меры Лебега, найдем меры некоторых множеств.

1. Мера точки равна 0, так как в единичный отрезок помещается сколь угодно много точек.

2. Мера отрезка $[a, b]$ равна $b - a$. Для рационального $b - a$ это доказывается разбиением на отрезки длины $1/N$, где N — знаменатель, в общем случае — приближением рациональными длинами снизу и сверху.

3. Мера множества рациональных чисел (как и любого счетного множества) равна 0.

4. Мера множества иррациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ равна 1.

5. Мера стандартного канторовского множества равна 0.

Задача. Постройте на отрезке замкнутое множество положительной меры, не содержащее интервалов.

Объемы некоторых множеств в $\mathbb{R}^n$.

1. Мера $(n - 1)$-мерного линейного подпространства (и любого его измеримого подмножества) равна 0.

2. Объем параллелепипеда с ребрами $a_1, \dots, a_n$, параллельными осям координат, равен произведению $a_1 \dots a_n$. Доказывается аналогично вычислению меры отрезка на прямой.

1.5 Пример неизмеримого множества

Предполагая существование меры Лебега, построим неизмеримое множество на отрезке $[0, 1)$. Отождествим отрезок с окружностью S радиуса $1/2\pi$ (длины 1) с помощью соответствия

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Мере Лебега на отрезке соответствует мера μ на окружности, инвариантная относительно поворотов. Пусть $\alpha = \pi\sqrt{2}$ (вместо $\sqrt{2}$ можно взять любое иррациональное число). Объявим точки на окружности эквивалентными, если они получаются друг из друга поворотом на угол, кратный α. Окружность разбивается на классы эквивалентности, каждый класс — счетное множество.

Воспользовавшись аксиомой выбора, построим множество A, содержащее по одной точке из каждого класса. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ обозначим через A_k образ множества A при повороте на угол $k\alpha$. Тогда множества A_k, $k \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются и покрывают окружность. Следовательно, A неизмеримо: если $\mu(A) = 0$, то $\mu(A_k) = 0$ при всех k, откуда $\mu(S) = 0$ в силу счетной аддитивности, а если $\mu(A) > 0$, то, аналогично, $\mu(S) = \infty$, противоречие.

Замечание. Без использования аксиомы выбора построить неизмеримое множество невозможно.

2 Мера Хаусдорфа

Пусть X — метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будет обозначаться через $|xy|$. *Диаметром* непустого множества $A \subset X$ называется величина $\operatorname{diam}(A) = \sup\{|xy| : x, y \in A\}$, диаметр пустого множества полагаем равным 0.

Покрытием множества A называется любой (конечный или бесконечный) набор множеств $\{A_i\}$ такой, что $A \subset \bigcup A_i$. *Мелкостью* набора множеств $\{A_i\}$ называется число $\Delta(\{A_i\}) = \sup_i \operatorname{diam} A_i$.

Определение. Пусть $d \geq 0$, $A \subset X$. Будем называть *d-мерным весом* конечного или набора множеств $\{A_i\}$ величину $W_d(\{A_i\}) = \sum \operatorname{diam}(A_i)^d$. Примечание: если $d = 0$ и $\operatorname{diam}(A_i) = 0$, считаем $\operatorname{diam}(A_i)^d = 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим величину

$$\mathcal{H}^d_\varepsilon(A) = \inf\{W_d(\{A_i\}) : A \subset \bigcup A_i, \Delta(\{A_i\}) < \varepsilon\},$$

где инфимум берется по всем конечным и счетным покрытиям $\{A_i\}$ мелкости меньше ε.

Величина $\mathcal{H}^d_\varepsilon$ возрастает при убывании ε, поэтому она имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Положим

$$\mathcal{H}^d(A) = C_d \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^d_\varepsilon(A),$$

где C_d — нормировочная константа, которая будет определена позже. Величина $\mathcal{H}^d(A)$ называется *d-мерной мерой Хаусдорфа* множества A.

При $d = 0$ и $d = 1$ полагаем нормировочную константу равной 1.

Замечание. В определении можно ограничиться открытыми покрытиями $\{A_i\}$ (то есть такими, в которых все множества A_i открыты). Действительно, произвольное покрытие $\{A_i\}$ можно заменить на открытое, сколь угодно мало изменив мелкость и вес.

Примеры. 1. $\mathcal{H}^0$ — считающая мера.
2. $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = 0$.
3. $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$ (доказывается с использованием компактности).

Теорема. $0 < \mathcal{H}^n(I^n) < \infty$.

Доказательство. Для доказательства неравенства $\mathcal{H}^n < \infty$ достаточно предъявить сколь угодно мелкое покрытие с весом, ограниченным сверху некоторой константой. Возьмем, например, разбиение I^n на кубики с ребром $1/N$, $N \to \infty$.

Для доказательства неравенства $\mathcal{H}^n > 0$ нужно проверить, что вес любого покрытия отделен от нуля некоторой константой. Покрытие можно считать открытым, а значит конечным. Увеличив диаметры не более чем в $2n$ раз, можно заменить покрывающие множества на кубики с ребрами, параллельными координатным осям. Вес каждого кубика в константу раз отличается от его элементарного объема (элементарный объем прямоугольного параллелепипеда — произведение ребер). Теперь утверждение следует из леммы:

Лемма. *Пусть $P, P_1, P_2, \dots, P_N$ — параллелепипеды с ребрами, параллельными координатным осям. Предположим, что $P \subset \bigcup P_i$. Тогда $\sum V(P_i) \geq V(P)$, где V — элементарный объем.*

Лемма легко доказывается по индукции. $\square$

Теперь можно определить нормировочную константу C_d при целых d: это такое число, что d-мерная мера Хаусдорфа куба I^d получается равной 1.

Информация: $C_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{2^d \cdot \Gamma(d/2+1)}$, где $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^{d-1} e^{-x}\, dx$. Эту формулу можно использовать для определения нормировочной константы и для нецелых d.

Свойства меры Хаусдорфа. 1. Монотонность: если $A \subset B$, то $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$.

2. Счетная субаддитивность: $\mathcal{H}^d(\bigcup A_i) \leq \sum \mathcal{H}^d(A_i)$ для любого конечного или счетного набора множеств $\{A_i\}$.

3. Пусть $A, B \subset X$, $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, где $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|xy| : x \in A, y \in B\}$. Тогда $\mathcal{H}^d(A \cup B) = \mathcal{H}^d(A) + \mathcal{H}^d(B)$.

4. Нерастягивающие отображения не увеличивают меру. Как следствие, меры изометричных множеств равны.

5. Гомотетия с коэффициентом k умножает меру на k^d.

Этих свойств достаточно для вычисления меры Хаусдорфа в большинстве случаев. Например, площадь сферы можно вычислить, разбив ее на маленькие части и сравнив каждую часть с ее проекцией на касательную плоскость.

3 Хаусдорфова размерность

Теорема. *Для любого множества $A \subset X$ существует такое $d_0 \in [0, +\infty]$, что $\mathcal{H}^d(A) = 0$ при всех $d > d_0$ и $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ при всех $d < d_0$.*

Число d_0 называется *хаусдорфовой размерностью* множества A и обозначается $\dim_H(A)$.

Доказательство. Положим $d_0 = \inf\{d : \mathcal{H}^d(A) < \infty\}$. Тогда $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ при всех $d < d_0$. Докажем, что $\mathcal{H}^d(A) = 0$ при $d > d_0$. Выберем между d_0 и d такое d', что $H^{d'}(A) < \infty$. Пусть $d = d' + a$. Тогда $\mathcal{H}^d_\varepsilon \leq \varepsilon^a \mathcal{H}^{d'}_\varepsilon(A)$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathcal{H}^{d'}(A) < \infty$ и $\varepsilon^a \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем $\mathcal{H}^d(A) = 0$. $\square$

Примеры. 1. $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$, так как $0 < \mathcal{H}^n(I^n) < \infty$.

2. Размерность стандартного канторовского множества K равна $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Это число можно угадать из следующих соображений: пусть $d = \dim_H(K)$, $A = \mathcal{H}^d(K)$. Тогда $A = 2A(1/3)^d$, так как K состоит из двух копий, подобных ему с коэффициентом $1/3$. Предполагая, что $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, получаем $3^d = 2$, откуда $d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Это не доказательство, так как нет гарантии, что $\mathcal{H}^d(K)$ не ноль и не бесконечность.

Задача. Постройте на прямой множество размерности 1 и меры 0.

Задача. Докажите, что $\dim(K) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Задача. Пусть множество A — объединение счетного набора множеств $A_1, A_2, \dots$. Докажите, что $\dim_H(A) = \sup\{\dim_H(A_i)\}$.

4 Внешние меры и критерий Каратеодори

Определение. Пусть X — произвольное множество. *Внешняя мера* на X — это функция $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$, обладающая следующими свойствами:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Монотонность: если $A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.
3. Счетная субаддитивность: $\mu(\bigcup A_i) \le \sum \mu(A_i)$ для любого конечного или счетного набора множеств $\{A_i\}$.

Примеры. 1. Мера Хаусдорфа — см. свойства.

2. Пусть μ — мера на какой-нибудь σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Ее можно продолжить до внешней меры μ^*, определенной равенством $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathfrak{A}\}$.

3. Если $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — произвольная система множеств и $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$, то можно определить внешнюю меру μ^* так:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i); A \subset \bigcup A_i, A_i \in \mathfrak{A}\},$$

где инфимум берется по всем не более чем счетным покрытиям множества A множествами из $\mathfrak{A}$.

Определение. Пусть на X задана внешняя мера μ. Будем говорить, что множество $A \subset X$ *хорошо разбивает* множество $B \subset X$, если $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Множество $A \subset X$ называется *хорошо разбивающим* или *μ-измеримым*, если оно хорошо разбивает любое множество $B \subset X$.

Замечание. В равенстве $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ содержательно только неравенство “$\ge$”, обратное неравенство следует из определения внешней меры.

Теорема. *Пусть μ — внешняя мера на X. Тогда класс всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, и сужение μ на эту σ-алгебру является мерой.*

Доказательство. 1. Очевидно, что пустое множество и все пространство X — хорошо разбивающие.

2. Если A — хорошо разбивающее, то и его дополнение $X \setminus A$ — хорошо разбивающее. Действительно, определение симметрично относительно замены A на $X \setminus A$, так как $B \setminus B = B \cap (X \setminus A)$.

3. Пусть A_1, A_2 — хорошо разбивающие, докажем, что $A_1 \cap A_2$ хорошо разбивающее. Пусть B — произвольное множество. Оно разбивается на четыре части: $B_0 = B \setminus A_1 \setminus A_2$, $B_1 = B \cap A_1 \setminus A_2$, $B_2 = B \cap A_2 \setminus A_1$ и $B_3 = B \cap A_1 \cap A_2$. Так как A_1 хорошо разбивает B, имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1).$$

Так как A_2 хорошо разбивает $B \cap A_1$, имеем

$$\mu(B \cap A_1) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \cap A_1 \setminus A_2).$$

Таким образом,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \cap A_1 \setminus A_2) + \mu(B \setminus A_1).$$

Так как A_1 хорошо разбивает множество $B \setminus (A_1 \cap A_2)$, с учетом теоретико-множественных тождеств $(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap A_1 = B \cap A_1 \setminus A_2$ и $(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap A_1 = \mu(B \setminus A_1)$ получаем

$$\mu(B \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(B \cap A_1 \setminus A_2) + \mu(B \setminus A_1).$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \setminus (A_1 \cap A_2)),$$

что и требовалось.

4. Из пунктов 2 и 3 следует, что объединение и разность любых двух хорошо разбивающих множеств тоже хорошо разбивающее.

5. Докажем вспомогательное утверждение: если $A_1, A_2, \dots$ — дизъюнктные хорошо разбивающие множества и $B_i \subset A_i$ при всех i, то $\mu(\bigcup B_i) = \sum \mu(B_i)$.

Для каждого $n \geq 2$ имеем $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \mu(B_n) + \mu(B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$, так как A_n хорошо разбивает $B_1 \cup \dots \cup B_n$. Отсюда по индукции получаем, что

$$\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n)$$

для всех n. Отсюда и из монотонности внешней меры следует, что

$$\mu(\bigcup B_i) \geq \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n)$$

при всех n. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\mu(\bigcup B_i) \geq \sum \mu(B_i)$. Обратное неравенство следует из определения внешней меры.

6. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — дизъюнктные хорошо разбивающие множества. Докажем, что множество $A = \bigcup A_i$ — хорошо разбивающее. Пусть $B \subset X$, положим $B_i = B \cap A_i$. Так как каждое конечное объединение $A_1 \cup \dots \cup A_n$ — хорошо разбивающее (по п. 4), имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \geq \mu(B_1 \cup \dots \cup B_n) + \mu(B \setminus A).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Из п. 5 следует, что, $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n) \to \mu(\bigcup B_i) = \mu(B \cap A)$. Значит, $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$, то есть A хорошо разбивает B.

7. Объединение любых хорошо разбивающих множеств $A_1, A_2, \dots$ — хорошо разбивающее. Действительно, $\bigcup A_i$ можно представить в виде объединения дизъюнктных множеств A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $\dots$.

8. Счетная аддитивность μ на классе хорошо разбивающих множеств следует из п. 5 (подставим $B_i = A_i$). □

Теорема (критерий Каратеодори)**.** *Пусть X — метрическое пространство, μ — внешняя мера на X, обладающая таким свойством: для любых множеств $A, B \subset X$ с $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ верно, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Тогда все борелевские множества μ-измеримы.*

Как следствие, сужение любой такой внешней меры (в частности, меры Хаусдорфа) на борелевскую σ-алгебру является борелевской мерой.

Доказательство. Достаточно доказать, что открытые множества — хорошо разбивающие (так как они порождают борелевскую σ-алгебру).

Пусть $U \subset X$ — открытое множество, $B \subset X$ — произвольное множество. Достаточно доказать, что $\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \leq \mu(B)$. Если $\mu(B) = \infty$, то это неравенство очевидно, поэтому будем считать, что $\mu(B) < \infty$. Для каждого натурального n определим множества

$$U_n = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, X \setminus U_n) > \frac{1}{n}\}.$$

Докажем вспомогательное утверждение:

Лемма. *$\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Для каждого n положим $A_n = B \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$. Рассмотрим все непустые множества вида A_{2k}. Каждые два из них разлелены некоторым положительным расстоянием. Применяя свойство из формулировки теоремы, получаем, что для любого n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}) \leq \mu(B)$$

в силу монотонности внешней меры. Так как $\mu(B) < \infty$, отсюда следует, что ряд $\sum \mu(A_{2k})$ сходится. Аналогично ряд $\sum \mu(A_{2k+1})$ сходится, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится.

Обозначим $\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_n)$. Поскольку ряд сходится, имеем $\varepsilon_n \to 0$. Заметим, что $B \cap U = (B_n \cap U) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$. По счетной субаддитивности отсюда следует, что

$$\mu(B \cap U) \leq \mu(B_n \cap U) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(B_n \cap U) + \varepsilon_n.$$

Значит, $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$. □

Для каждого n рассмотрим множества $B \cap U_n$ и $B \setminus U$. Они разделены расстоянием $1/n$, поэтому

$$\mu(B \cap U_n) + \mu(B \setminus U) = \mu((B \cap U_n) \cup (B \setminus U)) \leq \mu(B).$$

Переходя к пределу с помощью леммы получаем требуемое неравенство $\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \leq \mu(B)$. □

Из теоремы следует существование меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ (в качестве меры Лебега можно взять n-мерную меру Хаусдорфа).

5 Единственность меры Лебега

Для завершения доказательстве теоремы Лебега осталось проверить единственность борелевской меры μ, удовлетворяющей условиям теоремы (т.е. инвариантной относительно параллельных переносов и нормированной единицей на стандартном единичном кубе).

Назовем *кирпичом* в $\mathbb{R}^n$ множество вида $I_1 \times I_2 \times \dots I_n$, где $I_1, \dots, I_n$ — ограниченные интервалы на прямой (замкнутые, открытые или полуоткрытые).

Свойства. 1. Любое открытое множество можно представить в виде объединения счетного набора кирпичей. Например, можно взять объединение всех кирпичей с рациональными координатами вершин, содержащихся в данном множестве.

Следовательно, σ-алгебра, порожденная кирпичами, — это борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

2. Если μ — борелевская мера в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и нормированная на стандартном кубе в $\mathbb{R}^n$, то мера кирпича $I_1 \times \dots I_n$ равна произведению длин интервалов $I_1, \dots, I_n$. Это доказано в §1.4.

Теперь единственность меры Лебега следует из теоремы о единственности продолжения меры с полукольца,

5.1 Продолжение меры с полукольца

Определение. Система множеств называется *кольцом*, если она замкнута относительно бинарных операций объединения, пересечения и разности.

Система $\mathcal{P}$ множеств называется *полукольцом*, если для любых $A, B \in \mathcal{P}$ верно, что (1) $A \cap B \in \mathcal{P}$; (2) $A \setminus B$ есть дизъюнктное объединение нескольких (конечного набора) множеств из $\mathcal{P}$.

Примеры полуколец. 1. Всевозможные ограниченные интервалы на прямой.

2. Интервалы вида $[a, b)$ на прямой.

3. Произведение полуколец — полукольцо. В частности, множество кирпичей в $\mathbb{R}^n$ — полукольцо.

Замечание. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо, то множество всех конечных дизъюнктных объединений элементов $\mathcal{P}$ — кольцо.

Теорема (о единственности продолжения меры с полукольца). *Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо, $\mathfrak{A}$ — порождаемая им σ-алгебра. Пусть μ и μ' — две меры, определенные на $\mathfrak{A}$ и совпадающие на $\mathcal{P}$. Предположим, что X покрывается счетным набором множеств из $\mathcal{P}$, мера каждого из которых конечна. Тогда μ и μ' совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему в предположении, что все пространство входит в полукольцо и его мера конечна. Пусть $\mathcal{K}$ — кольцо, порожденное полукольцом $\mathcal{P}$. Из описания этого кольца (см. выше) ясно, что μ и μ' совпадают на $\mathcal{K}$.

Рассмотрим $\mathfrak{B} = \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = \mu'(A)$. Эта система множеств обладает следующими свойствами:

1. Она содержит кольцо $\mathcal{K}$.

2. Она является *монотонным классом*, то есть замкнута относительно объединений и пересечений вложенных последовательностей.

Теперь требуемое утверждение следует из следующей *леммы о монотонном классе*:

Лемма. *Если монотонный класс $\mathfrak{B}$ содержит кольцо $\mathcal{K} \ni X$, то он содержит и порождаемую этим кольцом σ-алгебру $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{B}$ — минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{K}$. Докажем, что тогда $\mathfrak{B}$ является σ-алгеброй. Достаточно проверить, что для любых $A, B \in \mathfrak{B}$ множества $A \cap B$, $A \cup B$ и $X \setminus A$ принадлежат $\mathfrak{B}$.

Докажем, что $X \setminus A \in \mathfrak{B}$ для любого $A \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{B}' = \{A \in \mathfrak{B} : X \setminus A \in \mathfrak{B}\}$. Оно является монотонным классом и содержит $\mathcal{K}$. Отсюда и из минимальности $\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$. Утверждение доказано.

Докажем, что $A \cap B \in \mathfrak{B}$ для любых $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathfrak{B}$. Зафиксируем $A \in \mathcal{K}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{B}_A = \{B \in \mathfrak{B} : A \cap B \in \mathfrak{B}\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{B}_A$ — монотонный класс. При этом $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}_A$, так как $\mathcal{K}$ — кольцо и $B \in \mathcal{K}$. Отсюда и из минимальности $\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}$, то есть $A \cup B \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Теперь докажем, что $A \cap B \in \mathfrak{B}$ для любых $A, B \in \mathfrak{B}$. Зафиксируем $A \in \mathfrak{B}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{B}_A = \{B \in \mathfrak{B} : A \cap B \in \mathfrak{B}\}$. Аналогично предыдущему рассуждению, $\mathfrak{B}_A$ — монотонный класс. По доказанному выше, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}_A$. Отсюда и из минимальности $\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}$, то есть $A \cup B \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Для объединения доказательство аналогично. □

Таким образом, $\mathfrak{B}$ содержит σ-алгебру, поржденную кольцом $\mathcal{K}$, что и требовалось. □

5.2 Мера Лебега и линейные преобразования

Следующую теорему трудно доказать прямым рассуждением, но она легко следует из единственности меры Лебега.

Теорема. *Пусть μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное отображение. Тогда для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ верно, что $\mu(L(A)) = |\det L| \cdot \mu(A)$.*

6 Борелевская регулярность

Пусть μ — внешняя мера. Напоминание: множество называется измеримым относительно μ (μ-измеримым), если оно хорошо разбивающее для μ.

Определение. Внешняя мера μ на X называется *борелевски регулярной*, если все открытые множества μ-измеримы и для любого множества $A \subset X$ существует борелевское множество B такое, что $A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.

Примеры. 1. Мера Хаусдорфа. Действительно, рассмотрим последовательность открытых покрытий, реализующих меру Хаусдорфа множества A. Для каждого покрытия рассмотрим объединение его членов. Пересечение этих объединений — искомое борелевское множество.

2. Если μ — борелевская мера, то ассоциированная с ней внешняя мера μ^* борелевски регулярна. Доказательство аналогично.

Последний пример показывает, что борелевские меры находятся во взаимно-однозначном соответствии с борелевски регулярными внешними мерами. А именно, борелевски регулярной внешней мере соответствует мера, получаемая сужением на борелевскую σ-алгебру, а борелевской мере соответствует порождаемая ей внешняя мера.

Теперь теорему Лебега можно сформулировать так: существует единственная борелевски регулярная внешняя мера на $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и нормированная на I^n. Теорема о поведении меры при линейных преобразованиях верна и для внешней меры, она доказывается точно также с помощью единственности.

Теорема. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера, $A \subset X$ — μ-измеримое множество. Тогда:*

1. Если $\mu(A) < \infty$, то найдутся борелевские множества B, C такие, что $C \subset A \subset B$ и $\mu(B \setminus C) = 0$.

2. Если $\mu(X) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое замкнутое множество $F \subset X$, что $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

3. Если X содержится в открытом множестве конечной меры, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое $G \supset A$, что $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

Доказательство. 1. Возьмем B из определения борелевской регулярности, A построим, применив борелевскую регулярность к $B \setminus A$.

2. Из пункта 1, множество A можно считать борелевским. Можно считать, что мера всего пространства конечна (иначе рассмотрим новую борелевкую меру $\mu'(B) = \mu(B \cap A)$ вместо μ). Рассмотрим класс $\mathfrak{A}$ всех борелевских множеств A, обладающих требуемым свойством. Легко проверить, что этот класс замкнут относительно счетных объединений и пересечений. Кроме того, он содержит все замкнутые множества.

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй. Действительно, он содержит все открытые множества, так как любое открытое множество можно представить в виде счетного объединения замкнутых. Значит, он содержит кольцо, состоящее из конечных объединений и пересечений открытых и закнутых множеств. По лемме о монотонном классе, $\mathfrak{A}$ содержит всю борелевскую σ-алгебру.

3. Пусть $U \supset A$ — открытое множество конечной меры. Применяя утверждение 2 к множеству $U \setminus A$, получаем такое $F \subset U \setminus A$, что $\mu(U \setminus A \setminus F) < \varepsilon$. Множество $G = U \setminus F$ подходит. $\square$

Замечания. 1. Предположения можно ослабить: в первом и втором достаточно предположить, что A допускает локально конечное покрытие счетным набором множеств конечной меры; во третьем — что A содержится в объединении счетного набора открытых множеств конечной меры. Оба свойства выполняются для любого множества, если μ — мера Лебега.

2. В $\mathbb{R}^n$ во втором утверждении слово “замкнутое” можно заменить на “компактное”.

3. Теперь можно дать более конструктивное описание системы множеств, измеримых по Лебегу. Из теоремы следует, что любое множество, измеримое по Лебегу, есть объединение счетного набора замкнутых множеств и множества внешней меры ноль. Обратно, любой такое множество измеримо. Для объединений замкнутых множеств это следует из борелевской регулярности, для множеств внешней меры ноль — из определения хорошо разбивающего множества.

7 Теоремы о покрытиях

Теорема (Безикович). *Пусть μ — борелевски регулярная мера в $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) < \infty$. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$, такое, что для любых $x \in A$ и $\varepsilon > 0$ существует шар с центром в x и радиусом меньше ε, принадлежащий $\mathfrak{B}$. Тогда можно из $\mathfrak{B}$ выбрать не более чем счетный дизъюнктный набор шаров $\{B_i\}$, такой, что $\mu(A \setminus \bigcup B_i) = 0$.*

Теорема выводится из чисто геометрического факта (который тоже называется теоремой Безиковича).

Теорема. *Для любого натурального n существует такое натуральное $M = M(n)$, что верно следующее. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество, и каждой точке $x \in A$ сопоставлен замкнутый шар B_x с центром в этой точке радиуса не больше 1. Тогда можно выбрать не более чем счетный набор шаров $\{B_{x_i}\}$, покрывающий A, и раскрасить их в M цветов так, что шары одного цвета попарно не пересекаются.*

Вывод первой теоремы из второй. Выкинем все шары с радиусами, большими 1. Из оставшихся выберем набор $\{B_i\}$ как во второй теореме. Выберем такой швет, что шары этого цвета покрывают не менее $1/M$ от меры A. Из них выберем конечный поднабор, покрывающий не меньше $1/2M$ от меры A. Обозначим это множество шаров через $\{B_1, \dots, B_{N_1}\}$, а их объединение через D_1. По построению имеем $\mu(A \setminus D_1) \le (1 - \frac{1}{2M})\mu(A)$.

Теперь выкинем из $\mathfrak{B}$ все шары, пересекающиеся с множеством D_1. Из того, что D_1 замкнуто, следует, что оставшиеся шары удовлетворяют условиям первой теоремы для множества $A \setminus D_1$. Аналогичным построением выберем из них конечную систему шаров $B_{N_1+1}, \dots, B_{N_2}$, покрывающую не менее $1/2M$ от меры множества $A \setminus D_1$. Теперь $\mu(A \setminus D_2) \le (1 - \frac{1}{2M})^2 \mu(A)$, где $D_2 = \bigcup_{i=1}^{N_2} B_i$. Аналогично по индукции строим последовательность попарно непересекающихся шаров $\{B_i\}$ и чисел N_k так, что $\mu(A \setminus A_k) \le (1 - \frac{1}{2M})^k \mu(A)$, где $D_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} B_i$. Поскольку $(1 - \frac{1}{2M}^k) \to 0$ при $k \to \infty$, эта последовательность шаров — искомая. $\square$

Доказательство второй теоремы. 1. Сведем теорему к случаю, когда A ограничено. Разобьем $\mathbb{R}^n$ на кубики с ребром 10. Назовем соседними кубики, замыкания которых имеют общую точку. Пометим каждый кубик числом от 1 до 2^n так, чтобы соседние кубики были помечены разными числами (это легко делается с помощью индукции по размерности). Считая, что для ограниченных множеств теорема доказана, применим ее к пересечению A с каждым из кубиков. При этом умножим количество цветов на 2^n, разобьем цвета на 2^n групп, одинаковых количеству цветов, и в каждом кубике будем использовать для раскраски шаров группу цветов, соответствующую числу от 1 до 2^n, которым помечен этот кубик. Поскольку радиусы всех шаров меньше 1, а ребра кубиков равны 10, такая раскраска будет удовлетворять условию.

2. Далее A предполагается ограниченным. Будем называть шар *почти самым большим* в некотором наборе, если его радиус на меньше $\frac{9}{10}$ супремума радиусов шаров набора. Выберем из $\mathfrak{B}$ почти самый большой шар B_1, выкинем все шары, центры которых лежат в B_1, из оставшихся выберем почти самый большой шар B_2 и так далее.

Обозначим через r_i радиус шара B_i, через c_i — его центр. По построению, при $i > j$, имеем $r_i \le \frac{10}{9} r_j$ и $c_i \notin B_j$.

3. Радиусы r_i стремятся к нулю. Действительно, в противном случае они ограничены снизу числом $r > 0$. Тогда, поскольку все центры c_i лежат в ограниченной области, среди них найдутся два, c_i и c_j с $|c_i - c_j| < r/2$. Но тогда $c_i \in B_j$ и $c_j \in B_i$, противоречие.

4. Выбранные шары $B_1, B_2, \ldots$ покрывают A. Действительно, пусть точка $x \in A$ не покрыта, тогда шар B_x никогда не был выкинут. Но тогда он должен был быть выбран до того, как радиусы выбранных шаров стали меньше $\frac{9}{10}$ его радиуса.

5. Каждый шар B_k пересекает меньше M из шаров $B_1, \ldots, B_{k-1}$, где M — некоторая константа, зависящая только от размерности. Действительно, пусть число M_0 таково, что среди любых M_0 ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ найдутся два, образующие угол меньше 1° (такое M_0 существует в силу компактности сферы). Докажем, что $M = 2M_0$ подходит.

Обозначим $d_i = |c_i - c_k|$ — расстояние между центрами B_k и B_i. Назовем плохими шары из множества $\{B_1, \ldots, B_{k-1}\}$, пересекающиеся с B_k. Для плохого шара B_i имеем $r_i \ge d_i - r_k$. Предположим, что существует M плохих шаров. Тогда среди них найдутся либо M_0 таких, для которых соответствующее расстояние d_i меньше $\frac{3}{2} r_k$, либо M_0 таких, для которых соответствующее расстояние d_i не меньше $\frac{3}{2} r_k$. Среди этих шаров найдутся два, B_i и B_j $(i > j)$, для которых угол между векторами $c_i - c_k$ и $c_j - c_k$ меньше 1°. В обоих случаях, пользуясь неравенствами $r_i \ge \frac{9}{10} r_k$, $r_j \ge \frac{9}{10} r_i$, $r_j \ge d_j - r_k$ и $r_i \ge d_i - r_k$, нетрудно проверить, что $|c_i - c_j| < r_j$, то есть $c_i \in B_j$, противоречие.

6. Пользуясь предыдущим утверждением, по индукции раскрасим шары в M цветов. Каждый очередной шар B_k красим в такой цвет, который не использовался для шаров из $B_1, \ldots, B_{k-1}$, пересекающихся с B_k. Такой цвет найдется по утверждению предыдущего шага. $\square$

Замечания. 1. Не обязательно покрывать шарами. Достаточно, чтобы каждая точка была покрыта сколь угодно маленькими множествами B, звездными относительно шара радиуса $C \operatorname{diam}(B)$. Доказательство аналогично, но требует большего количества технических подробностей в шаге 5.

2. Теорема Витали: пусть X — произвольное метрическое пространство, μ — борелевски регулярная внешняя мера, удовлетворяющая услвию удвоения: существует такое $C > 0$, что для любых $x \in X$ и $r > 0$ верно, что $\mu(B(x, 2r)) \le C\mu(B(x, r))$. Пусть $A \subset X$ содержится в открытом множестве конечной меры. Тогда из любого покрытия A замкнутыми шарами можно выбрать дизъюнктный набор шаров. покрывающих A с точностью до меры 0.

7.1 Нормировочная константа меры Хаусдорфа

Пусть ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Нормировочная константа n-мерной меры Хаусдорфа равна $\omega_n/2^n$.*

7.2 Точки плотности

Пусть μ — локально конечная борелевски регулярная внешняя мера в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Плотностью* множества A в точке x называется предел

$$\rho(A, x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(A \cap B(r, x))}{\mu(B(r, x))}.$$

Теорема. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-измеримо, то $\rho(A, x)$ определено и равно 1 для всех $x \in A$, кроме множества меры 0.*

Доказательство. От противного, пусть есть положительная мера точек $x \in A$, для которых

$$\underline{\rho}(A, x) := \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(A \cap B(r, x))}{\mu(B(r, x))} < 1.$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$A_\delta = \{x \in A : \underline{\rho}(A, x) < 1 - \delta\}.$$

Найдется такое $\delta_0 > 0$, что $\mu(A_{\delta_0}) = m_0 > 0$. Обозначим $A' = A_{\delta_0}$. Найдем открытое $U \supset A$, такое, что $\mu(U \setminus A) < \delta_0 m_0$. Сопоставим каждой точке $x \in A'$ такую последовательность шаров $B(x, r_i(x))$, $i = 1, 2, \dots$, что все шары соержатся в U, $r_i(x) \to 0$ и $\frac{\mu(B(r_i(x),x)) \cap A}{\mu(B(r,x))} < 1 - \delta$ для всех i. Выберем из этого множества шаров дизъюнктный набор $B_j = B(x_j, r_j)$ как в теореме Безиковича. Для каждого из них имеем $\mu(B_j \setminus A) \geq \delta_0 \mu(B_j)$. Складывая, получаем

$$\mu(U \setminus A) \geq \sum \mu(B_j \setminus A) \geq \delta_0 \sum \mu(B_j) \geq \delta_0 \mu(A') = \delta_0 m_0,$$

противоречие. □

Определение. Характеристической функцией множества $A \subset X$ называется функция $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, определенная равенством

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Следствие. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — μ-измеримое множество. Тогда $\rho(A, x) = \chi_A(x)$ для почти всех $x \in X$.*

8 Измеримые функции и интеграл Лебега

Пусть X — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра на X. Элементы этой σ-алгебры будем называть *измеримыми множествами.* Если σ-алгебра $\mathfrak{A}$ не указана явно, то подразумевается область определения рассматривоемой в данный момент меры.

Определение. Функция $f : D \subset X \to \mathbb{R}^k$ называется *измеримой* (относительно $\mathfrak{A}$), если для любого открытого $U \subset \mathbb{R}^k$ прообраз $f^{-1}(U)$ принадлежит $\mathfrak{A}$ (в частности, $D \in \mathfrak{A}$).

Функция называется *борелевской*, если она измерима относительно борелевской σ-алгебры на X.

Свойства. **1.** Функция измерима относительно $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевского множества измерим.

2. Функция $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in D : f(x) > a\}$ измеримо. Это следует из того, что лучи вида $(a, +\infty)$ порождают всю борелевскую σ-алгебру.

3. $f = (f_1, \dots, f_k) : D \to \mathbb{R}^k$ измерима тогда и только тогда, когда каждая функция f_i измерима.

4. Если $A \in \mathfrak{A}$, то χ_A измерима.

5. Любая непрерывная функция измерима, если $\mathfrak{A}$ содержит борелевскую σ-алгебру.

6. Если $f : D \to \mathbb{R}^k$ — измерима и $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — борелевская, то $g \circ f$ изметрима.

7. Как следствие, сумма и произведение измеримых функций измеримы.

8. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность измеримых функций. Тогда $\sup f_i$, $\inf f_i$, $\underline{\lim} f_i$, $\overline{\lim} f_i$ и $\lim f_i$ измеримы.

Определение. *Простая функция* — это измеримая функция с конечным множеством значений. *Ступенчатая функция* — измеримая функция с конечным или счетным множеством значений.

Замечание. Любая измеримая функция — равномерный предел ступенчатых. Любая ограниченная снизу измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ — предел возрастающей последовательности простых функция, причем предел равномерный, если f ограничена.

8.1 Интеграл Лебега

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Интеграл Лебега — это функционал, ставящий в соответствие некоторым измеримым функциям $f : X \to \mathbb{R}$ величину из $[-\infty, +\infty]$, обозначаемую $\int_X f\,d\mu$, $\int_X f(x)\,d\mu(x)$, или просто $\int f$. При этом выполняются следующие свойства (определяющие интеграл однозначно).

1. У любой неотрицательной функции интеграл определен и неотрицателен.

2. Обозначим $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$ (тогда $f = f_+ - f_-$). Интеграл f определен тогда и только тогда, когда хотя бы один из интегралов $\int f_+$ и $\int f_-$ конечен. При этом $\int f = \int f_+ - \int f_-$.

Функция f называется *сумируемой*, если ее интеграл конечен.

3. Если A — измеримое множество, то $\int \chi_A = \mu(A)$.

4. Для любых функций f и g и любого $a \in \mathbb{R}$ верно, что $\int(af + g) = a\int f + \int g$, если правая часть определена.

5 (теорема Леви). Если $\{f_i\}$ — неубывающая последовательность измеримых функций, $f_1 \geq 0$, $f = \lim f_i$, то $\int f = \lim \int f_i$.

Замечание. Можно рассматривать функции, у которых некоторые значения равны $\pm\infty$. Если мера множества таких точек равна 0, то они не влияют на интеграл. Если $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на множестве положительной меры, то $\int f = +\infty$. В общем случае интегрируемость определяется так же, как и для функций с конечными значениями.

8.2 Аппроксимативная непрерывность

Определение. Функция $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *аппроксимативно непрерывной* (относительно меры μ) в точке $x \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathbb{R}^n \setminus \{y \in D : |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ имеет нулевую плотность (относительно μ) в точке x.

В частности, x должна быть точкой плотности для D.

Замечание. $f : D \to \mathbb{R}$ аппроксимативно непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда существует множество $A \subset D$ такое, что $x \in A$, $\mathbb{R}^n \setminus A$ имеет нулевую плотность в точке x и$f|_A$ непрерывна. (Упражнение).

Теорема. *Любая измеримая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ аппроксимативно непрерывна почти всюду (относительно локально конечной борелевчки регулярной меры).*

Доказательство. Для каждого $q \in \mathbb{Q}$ рассмотрим множество $A_q = \{y \in D : f(y) > q\}$. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что плотность этого множества равна 1, если $x \in A_q$, и 0, если $x \notin A_q$. Поскольку $\mathbb{Q}$ счетно, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ это свойство выполняется отновременно для всех $q \in \mathbb{Q}$. Любая такая точка нам подходит. ☐

Следствие. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ограниченная μ-измеримая функция, где μ — локально конечная борелевски регулярная внешняя мера. Тогда для почти любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|\,d\mu = 0.$$

в частности,

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

Определение. Точки x, удовлетворяющие первому равенству, называются *точками Лебега* данной функции.

Замечание. Утверждение верно не только для ограниченных функций, но и для любых локально суммируемых. Доказательство в общем случае сложнее, см. приложение А.

9 Длина кривой

Определение. Пусть X — метрическое пространство. *Кривая* в X — это непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$. *Пунктир* кривой $\gamma : [a, b] \to X$ — конечная последовательность точек $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)$, где $\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, *длина пунктира* — это сумма $\sum |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$ю *Длина кривой* — это супремум длин ее пунктиров, обозначение: $L(\gamma)$.

Кривая конечной длины называется *спрямляемой*.

Свойства. 1. $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}$ для любой кривой $\gamma : [a, b] \to X$ и любого $c \in [a, b]$.

2. Если мелкость разбиения $\{t_i\}$ стремится к нулю, то $\sum |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$ стремится к $L(\gamma)$.

3. Длина не меняется при замене параметра, у любой кривой конечной длины есть натуральная параметризация, то есть такая параметризация $\gamma : [0, L] \to X$, что $L(\gamma|_{[a,b]}) = b - a$ для любого отрезка $[a, b] \subset [0, L]$.

Теорема. *Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — кривая в метрическом пространстве X. Тогда*

$$L(\gamma) = \int_X \#\{\gamma^{-1}(x)\}\, d\mathcal{H}^1(x).$$

В частности, если γ не имеет самопересечений, то $L(\gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$.

Доказательство.

Лемма. $\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \le L(\gamma)$.

Лемма. $\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \ge \operatorname{diam}(\gamma([a, b]))$.

□

Определение. Скоростью кривой γ в момент t называется число

$$s_\gamma(t) = \lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t - t'|}.$$

Теорема. *Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — липшицева кривая. Тогда скорость s_γ определена почти всюду и $L(\gamma) = \int_{[a,b]} s_\gamma\, d\mu$, где μ — одномерная мера Лебега.*

Доказательство. Определим верхнюю скорость $\overline{s}_\gamma$ и нижнюю скорость $\underline{s}_\gamma$, заменив в определении предел на верхний и нижний предел соответственно. Обе функции всюду определены и измеримы, так как их можно представить в виде верхнего или нижнего предела счетного набора функций. Например,

$$\overline{s}_\gamma(t) = \varlimsup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon \to 0} \frac{|\gamma(t)\gamma(t + \varepsilon)|}{|\varepsilon|}.$$

Докажем, что

$$\int_{[a,b]} \overline{s}_\gamma = \int_{[a,b]} \underline{s}_\gamma = L(\gamma).$$

Доказательство проведем для верхней скорости, для нижней оно полностью аналогично.

Снабдим отрезок $[a, b]$ одномерной мерой Лебега μ. Пусть $A \subset [a, b]$ — множество всех точек, где $\overline{s}_\gamma$ аппроксимативно непрерывно. Пусть C — константа Липшица для γ. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ мелкости меньше δ длина соответствующего пунктира кривой γ больше $L(\gamma) - \varepsilon$. Рассмотрим всевозможные отрезки $[t, t'] \subset [a, b]$ (допускается $t' < t$), обладающие следующими свойствами:

1. $\left| \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|} - \overline{s}_\gamma(t) \right| < \varepsilon$.
2. $\mu\{x \in [t, t'] : |\overline{s}_\gamma(x) - \overline{s}_\gamma(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon|t - t'|$.
3. $|t - t'| < \delta$.

Эти отрезки образуют покрытие множества A как в теореме Витали. Действительно, каждая точка $t \in A$ является концом сколь угодно короткого отрезка, удовлетворяющего первому свойству — это следует из определения $\overline{s}_\gamma$. При этом все достаточно короткие отрезки, содержащие t, удовлетворяют второму свойству, так как t — точка аппроксимативной непрерывности. Для каждого такого отрезка имеем

$$|\gamma(t)\gamma(t')| = \overline{s}_\gamma(t)|t - t'| \pm \varepsilon|t - t'| == \int_{[t,t']} \overline{s}_\gamma\, d\mu \pm (C + 2)\varepsilon|t - t'|.$$

С помощью теоремы Витали выберем из этих отрезков дизъюнктный набор, покрывающий почти все A, а значит, и почти весь отрезок $[a, b]$. Выберем конечный поднабор $\{[t_i, t'_i]\}$ с суммой мер больше $|a - b| - \varepsilon$. Тогда

$$\int_{[a,b]} \overline{s}_\gamma\, d\mu = \int_{\bigcup[t_i,t'_i]} \overline{s}_\gamma\, d\mu \pm C\varepsilon = \sum |\gamma(t)\gamma(t')| \pm (C + 2)\varepsilon|a - b| + C\varepsilon.$$

Дополним множество точек $\{t_i, t'_i\}$ до разбиения отрезка $[a, b]$ мелкости меньше δ (при этом между t_i и t'_i новых точек не вставляем). Длина кривой отличается от длины этого пунктира меньше, чем на ε, а длина пунктира отличается от суммы $\sum |\gamma(t)\gamma(t')|$ меньше чем на $C\varepsilon$. □

10 Липшицевы функции

Теорема (Радемахер)**.** *Любая липшицева функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Можно считать, что $m = 1$. Будем использовать индукцию по n.

При $n = 1$ докажем более сильное утверждение: f дифференцируема почти всюду и для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, верно, что $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f$. Для монотонной функции это следует из представления длины кривой как интеграла скорости, в общем случае представим функцию в виде суммы монотонной и линейной.

Переход: от n к $n+1$. Представим $\mathbb{R}^{n+1}$ как прямое произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать через (x, y), где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. Для каждого $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $f_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемую равенством $f_y(x) = f(x, y)$. По индукционному предположению, каждая такая функция дифференцируема почти всюду, поэтому по теореме Фубини для почти всех $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ функция f_y дифференцируема в точке x. Аналогично, частная производная $\partial f/\partial y$ определена почти всюду. Нетрудно проверить, что $\partial f/\partial y$ — измеримая функция, следовательно, она аппроксимативно непрерывна почти всюду.

Достаточно доказать, что f дифференцируема в любой точке (x, y) такой, что f_y дифференцируема в x и $\partial f/\partial y$ аппроксимативно непрерывна в точке (x, y). Зафиксируем такую точку (x, y). Пусть $A = d_x f_y$, $B = \partial f/\partial y(x, y)$. Обозначим через K_δ куб с ребром 2δ с центром в (x, y). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta_0 > 0$, что для любого положительного $\delta < \delta_0$ верно, что

$$\mu_n(K_{2\delta}) \cap \{(x, y) : |\partial f/\partial x_n(x, y) - \partial f/\partial x_n(x_0, y_0)| > \varepsilon\}) < \varepsilon^n \delta^n$$

(такое существует в силу аппроксимативной непрерывности). Рассмотрим точку $(x', y') \in K_\delta(x_0, y_0)$ и обозначим $\Delta x = x' - x_0$, $\Delta y = y' = y_0$. Так как f_{y_0} дифференцируема в точке x_0, имеем $f(x', y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x_0 + o(\delta)$. Теперь достаточно доказать, что $f(x', y') - f(x', y_0) = B\Delta y + o(\delta)$. Пусть K — куб с ребром $\varepsilon\delta$ с центром в x'. Для каждой такой точки $x \in K$ определеим величину

$$\phi(x) = \mu_1(\{t \in [-\delta, \delta] : |\partial f/\partial x_n(x, y_0 + t) - \partial f/\partial x_n(x_0, y_0)| > \varepsilon\})$$

Несложное вычисление показывает, что

$$f(x, y') - f(x, y_0) = \int_{y_0}^{y'} \frac{\partial f}{\partial y} = B\Delta y \pm 2C\phi(x) \pm \varepsilon\delta,$$

где C — константа Липшица для f. По теореме Фубини и выбору δ_0, имеем $\int_K \phi \, d\mu_n < \varepsilon^n \delta^n$. Значит, найдется такая точка $x'' \in K$, что $\phi(x'') < \varepsilon\delta$. Для этой точки имеем

$$f(x'', y') - f(x'', y_0) = B\Delta y \pm 2C\varepsilon\delta \pm \varepsilon\delta.$$

Из липшицевости следуют неравенства

$$|f(x'', y_0) - f(x', y_0)| < \varepsilon\delta$$

и

$$|f(x'', y') - f(x', y')| \leq \varepsilon\delta$$

Складывая, получаем, что

$$|f(x', y') - f(x', y_0)| < (2C + 3)\varepsilon\delta,$$

что и требовалось. □

Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $Y \subset X$, $f : Y \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Тогда существует функция $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ с той же константой Липшица, продолжающая f.*

Доказательство. Можно считать, что константа Липшица для f равна 1. Тогда положим $\tilde{f}(x) = \inf_{y \in Y}(f(y) + |xy|)$. □

Теорема (о приближении липшицевой функции)**.** *Пусть $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — липшицева функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует C^1 функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такая, что $f = g$ всюду на A, кроме множества меры ε.*

10.1 Доказательство теоремы о приближении

Теорема (Лузин). *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на метрическом пространстве X, такая, что X покрывается счетным набором открытых множеств конечной меры. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — μ-измеримая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ такая, что $\mu(\{\tilde{f}(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$.*

Доказательство. 1. Пусть $f = \chi_A$, где A — измеримое множество. Найдем замкнутое F и открытое G такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. По стандартной лемме Урысона из топологии можно построить такую непрерывную функцию $\tilde{f} : X \to [0, 1]$, что $\tilde{f}|_F \equiv 1$ и $\tilde{f}|_{X\setminus G} \equiv 0$. Примечание: для метрического пространства X функцию легко предъявить явно:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus G)}{\operatorname{dist}(x, X \setminus G) + \operatorname{dist}(x, F)}.$$

2. Если f — простая функция, представим ее в виде линейной комбинации характеристических и применим доказанный случай к каждому слагаемому.

3. Если f ограничена, представим ее как равномерный предел простых функций f_k так, что $\sup |f_k - f| < 1/2^k$. Положим $g_1 = f_1$, $g_{k+1} = f_{k+1} - f_k$, тогда $f = \sum g_k$, причем g_k простые и $\sup |g_k| \le 1/2^{k-1}$. Для каждой функции g_k построим непрерывную $\tilde{g}_k$ с $\mu(\{\tilde{g}_k \neq g_k\} < 1/2^k$. Можно считать, что $\sup |\tilde{g}_k| \le \sup |g_k| \le 1/2^{k-1}$ (иначе обрежем). Тогда $\tilde{f} = \sum \tilde{g}_k$ подходит.

4. Общий случай сводится к случаю ограниченной функции заменой f на $\operatorname{arctg} f$. □

Теорема (Егоров). *Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $\mu(X) < \infty$. Пусть f_n — последовательность измеримых функций, $f_n \to f$ поточечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A \subset X$, что $\mu(A) < \varepsilon$ и f_n сходятся к f равномерно на $X \setminus A$.*

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого n рассмотрим множество

$$A_{n,\delta} = \{x \in X : \exists k > n \ |f_k(x) - f(x)| > \delta\}.$$

Это невозрастающая последовательность множеств. Поскольку $f_n(x) \to f(x)$, каждая точка $x \in X$ принадлежит лишь конечному числу из них. То есть $\bigcap A_{n,\delta} = \emptyset$. Поскольку мера конечна, отсюда следует, что $\mu(A_{n,\delta}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для каждого $\delta = 1/k$ найдем такое n_k, что $\mu(A_{n,\delta}) < \varepsilon/2^k$. Тогда $A = \bigcup A_{n_k,1/k}$ подходит. □

Следствие. *Пусть $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — последовательность измеримых функций, $f_n \to f$ почти всюду относительно меры Лебега. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \varepsilon$ и f_n сходятся к f равномерно на любом компакте $K \subset A$.*

Теперь пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. По теореме Радемахера, она дифференцируема почти всюду. Пусть $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x, если он существует, и нулевая линейная функция в противном случае. Тогда

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - L_x(h)|}{|h|} \to 0, \qquad h \to 0_{\mathbb{R}^n}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Выкинув множество малой меры, сделаем эту сходимость равномерной на компактах. А именно, для каждого $\delta > 0$ определим функцию $\alpha_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ равенством

$$\alpha_\delta(x) = \sup_{h \in \mathbb{R}^n : 0 < |h| < \delta} \frac{|f(x+h) - f(x) - L_x(h)|}{|h|}.$$

Легко видеть, что эта функция измерима (супремум можно брать только по счетному множеству значений h). Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\alpha_\delta(x) \to 0$ при $\delta \to 0$. Подставляя $\delta = 1/k$, $k \to \infty$, и применяя следствие из теоремы Егорова, найдем множество $A \subset \mathbb{R}^n$ с $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \varepsilon$ и сходимость $\alpha_\delta \to 0$ равомерна на компактах в A. По теореме Лузина, найдется измеримое множество $B \subset A$, на котором функция $x \mapsto L_x$ непрерывна и $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) < \varepsilon$. Наконец, в силу регулярности меры Лебега найдется замкнутое множество $D \subset B$ с $\mu(\mathbb{R}^n \setminus D) < \varepsilon$. Докажем, что существует C^1 функция $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, совпадающая с f на D. Для этого достаточно доказать соответствующий частный случай теоремы Уитни о продолжении:

Теорема (теорема Уитни для C^r продолжений)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $f : D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Пусть каждой точке $x \in D$ сопоставлена линейная функция $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ так, что соответствие $x \mapsto L_x$ непрерывно и*

$$f(y) - f(x) - L_x(y - x) = o(|y - x|), \qquad x, y \in A, |x - y| \to 0,$$

где o равномерно на компактах.

Тогда существует C^1 функция $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ и $d_x\tilde{f} = L_x$ для всех $x \in A$.

Замечание. Аналогичный критерий есть и для C^r продолжений, но его формулировка сложнее.

Доказательство. Сначала построим специальное разбиение единицы для $\mathbb{R}^n \setminus A$. Положим $h(x) = \max\{1, \operatorname{dist}(x, A)\}$. Для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ обозначим через B_x шар с центром в x радиуса $r(x) = \frac{1}{100}h(x)$. Выберем из этих шаров такое подпокрытие $\{B_{x_i}\}$, что соответствующие шары радиуса $\frac{1}{5}r(x_i)$ не пересекается. Тогда шары удвоенных радиусов покрывают $R^n \setminus A$ с кратностью не больше $C(n)$. Для каждого шара B_{x_i} построим колоколообразную функцию u_i, равную 1 на этом шаре и нулю вне удвоенного шара. Это можно сделать так, что производная не превосходит $C/h(x_i)$. Теперь положим $\sigma(x) = \sum u_i(x)$ и заметим, что $\sigma(x) \geq 1$ и $\|d_x\sigma\| \leq C/h(x)$. Положим $\phi_i(x) = u_i(x)/\sigma(x)$. Тогда $\sum \phi_i \equiv 1$ и $\|d_x\phi_i\| \leq C/h(x)$.

Пусть a_i — ближайшая к x_i точка в A, $P_i(x) = f(a_i) + L_{a_i}(x - a_i)$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \sum \phi_i(x)P_i(x).$$

при $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in A$. Докажем, что эта функция подходит. Ясно, что она гладкая на $\mathbb{R}^n \setminus A$. Надо проверить дифференцируемость и значение производной на A, а также непрерывность производной при стремлении к A.

Пусть $a \in A$. Определим $P(x) = f(a) + L_a(x - a)$. Равенство $d_a\tilde{f} = L_a$ эквивалентно соотношению

$$\tilde{f}(x) = P(x) + o(|x - a|), \qquad x \to a,$$

а непрерыаность производной $\tilde{f}$ в точке a — соотношению

$$d_x\tilde{f} = L_a + o(1), \qquad x \to a.$$

Достаточно проверить эти соотношения только для точек $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ — точка, близкая к a, $\delta = |x - a|$. Заметим, что $h(x) \leq \delta$. Пусть I — множество таких индексов i, что $\phi_i(x) \neq 0$. Для каждого $i \in I$ точка x лежит в шаре радиуса $2r(x_i) = h(x_i)/50$, откуда нетрудно вывести, что $|xx_i| < 5r(x) = h(x)/20$ и $h(x_i) < 2h(x)$. Значит, соответствующая точка a_i лежит на расстоянии меньше $3h(x)$ от x, откуда $|aa_i| < \delta + 3h(x) < 4\delta$. Отсюда по условию $\|L_{a_i} - L_a\| = o(1)$ и $P_i(a) - f(a) = o(\delta)$. Заметим, что

$$P_i(x) = P_i(a) + L_{a_i}(x - a) = f(a) + L_a(x - a) + (P_i(a) - f(a)) + (L_{a_i} - L_a)(x - a) = P(x) + o(\delta).$$

Складывая с весами по всем $i \in I$, получаем

$$\tilde{f}(x) = \sum \phi_i(x)P_i(x) = \sum \phi_i(x)P(x) + o(\delta) = P(x) + o(\delta),$$

откуда следует равенство $d_a\tilde{f} = L_a$.

Чтобы доказать непрерывность производной, проведем такие же вычисления в случае, когда a — ближайшая к x точка из множества A. В этом случае $h(x) = |ax| = \delta$. Дифференцируя $\tilde{f}$, получаем

$$d_x\tilde{f} = \sum P_i(x)d_x\phi_i + \sum \phi_i(x)d_xP_i = \sum(P(x) + o(\delta))d_x\phi_i + \sum \phi_i(x)L_{a_i}.$$

Первое слагаемое есть $o(1)$, так как $\sum d_x\phi_i = 0$ и $\|d_x\phi_i\| \leq C/\delta$, второе равно $L_a + o(1)$, так как $L_{a_i} = L_a + o(1)$ и $\sum \phi_i(x) = 0$. Таким образом, $d_x\tilde{f} = L_a + o(1)$, откуда следует непрерывность производной. $\square$

11 Якобианы

Определение. Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Для $k \in \mathbb{N}$ определим k-мерный якобиан L (обозначение: $J_k L$) как максимальный k-мерный объем образа единичного k-мерного куба.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — функция, дифференцируемая в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим k-мерный якобиан f в точке x (обозначение: $J_k f(x)$) равенством $J_k f(x) = J_k(d_x f)$.

Примеры. 1. $m = n = k$. Тогда $J_k L = |\det L|$.

2. $k = n < m$. Тогда $J_k L = \sqrt{\det LL^T}$. Замечание: LL^T — матрица Грама набора векторов $\partial f/\partial x_i$.

3. $k = m < n$. Тогда $J_k L = \sqrt{\det L^T L}$. В частности, при $m = k = 1$ якобиан равен модулю градиента.

Задача. Если ранг L не превосходит k, то $(J_k L)^2$ равен сумме квадратов миноров $k \times k$ матрицы отображения.

11.1 Площадь липшицевой поверхности

Определение. Пусть $k < n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ — липшицево отображение. Площадь f — это число
$$\operatorname{area}(f) = \int_A J_k f.$$

Теорема (формула площади)**.** *Пусть $k \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — липшицево отображение. Тогда*
$$\operatorname{area}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \#f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x).$$

Следствие. *Для любой интегрируемой функции $\phi : A \to \mathbb{R}$*
$$\int_A \phi \cdot J_k f = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \phi(y)\, d\mathcal{H}^k(y).$$

Доказательство. 1. Обе части аддитивны, поэтому можно разбивать A на части. В частности, можно считать, что A ограничено.

2. По предыдущей теореме, f совпадает с C^1 функцией всюду, кроме множества сколь угодно малой меры. Следующая лемма позволяет выкинуть это малое множество из A.

Лемма. $\int_{\mathbb{R}^n} \#f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$, *где C — константа Липшица для f.*

Доказательство. Аналогично одномерной лемме: начнем с неравенства $\mathcal{H}^k(f(A)) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$ и будем уточнять его, разбивая A на мелкие части. □

3. Теперь можно считать, что $f \in C^1$. Сначала рассмотрим множество точек, где f невырождено (ранг равен k). Разобьем его на мелкие части, на каждой части представим f как композицию линейного отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ и отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, производная которого почти постоянна и близка к изометрии. У второго отображения и его обратного константы Липшица близки к 1, поэтому оно почти сохраняет площадь.

4. Теперь рассмотрим множество точек, где f вырождено. Надо доказать, что на этом множестве правая часть равна 0. Рассмотрим отображение $f_\varepsilon = f \times \varepsilon Id : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}$ при $\varepsilon \to 0$. Оно инъективно и невырождено. Имеем $Jf_\varepsilon \leq C^{k-1}\varepsilon$, поэтому $\operatorname{area}(f_\varepsilon|_A) \to 0$. По разобранному иммем $\operatorname{area}(f_\varepsilon|_A) = \mathcal{H}^k(f_\varepsilon(A))$. Проекция $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ не увеличивает расстояния, поэтому по лемме
$$\int_{\mathbb{R}^n} \#f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x) \leq \operatorname{area}(f_\varepsilon)$$

□

11.2 Формула коплощади

Теорема (формула коплощади). *Пусть $k \le n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — липшицево отображение. Тогда*

$$\int_A J_k f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy$$

Следствие (о послойном интегрировании функции). *Пусть $\phi : A \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Тогда*

$$\int_A \phi(x) J_k f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{A \cap f^{-1}(y)} \phi \; d\mathcal{H}^{n-k} \right) dy$$

Доказательство формулы коплощади

Определение. Верхний интеграл — инфимум верхних интегральных сумм.

Свойство. Для верхнего интеграла выполняется теорема Леви.

Лемма. *Пусть X — метрическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}^k$ — липшицево с константой L. Тогда*

$$\int^*_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(f^{-1}(y))\, dy \le L^k C(k,n) \mathcal{H}^n(X),$$

где $\int^*$ — верхний интеграл Лебега.

Доказательство. Будем считать, что нормировочные константы всех мер Хаусдорфа равны 1 (это влияет только на значение константы $C(n,k)$). Пусть $\varepsilon > 0$. Покроем X таким счетным набором множеств $\{X_i\}$, что $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$ для всех i и $\sum (\operatorname{diam} X_i)^n \le \mathcal{H}^n(X) + \varepsilon$. Для каждой точки $y \in \mathbb{R}^k$ имеем

$$\mathcal{H}^{n-k}_\varepsilon(f^{-1}(y)) \le \sum_{i : y \in f(X_i)} (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} = \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} \chi_{f(X_i)}(y).$$

Отсюда

$$\int^*_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}_\varepsilon(f^{-1}(y))\, dy \le \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} \mathcal{H}^k(f(X_i)) \le$$
$$\le C \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} (\operatorname{diam} f(X_i))^k \le C L^k \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^n \le C L^k (\mathcal{H}^n(X) + \varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю и пользуясь теоремой Леви для верхнего интеграла, получаем требуемое. ☐

Следствие. *Если $\mathcal{H}^n(A) = 0$, то правая часть формулы коплощади тоже равна 0.*

Лемма. *Для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ множество $A \cap f^{-1}(y)$ измеримо относительно $\mathcal{H}^{n-k}$. Функция $y \mapsto \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))$ измерима.*

Доказательство. В случае, если A имеет меру ноль, утверждение вытекает из предыдущего следствия. Отсюда следует, что добавление множества меры ноль не влияет на истинность утверждения леммы. Выкинув множество меры 0, сведем утверждение к случаю, когда A — счетное объединение вложенных компактов. Поскольку предел измеримых функций измерим, достаточно доказать утверждение для одного компакта.

Предположим, что A компактно. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^k$ множество $f^{-1}(y)$ замкнуто и, следовательно, измеримо. Проверим измеримость функции $y \mapsto \mathcal{H}^{n-k}(f^{-1}(y))$. Достаточно доказать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $A_t = \{y \in \mathbb{R}^k : \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y)) \le t\}$ измеримо. Заметим, что $A_t = \bigcap_{i=1}^\infty A_{t,i}$, где

$$A_{t,i} = \{y \in \mathbb{R}^k : \mathcal{H}^{n-k}_{1/i}(A \cap f^{-1}(y)) < t + 1/i\}.$$

Докажем, что каждое множество $A_{t,i}$ открыто. Точка $y \in \mathbb{R}^k$ принадлежит емк тогда и только тогда, когда есть покрытие множества $A \cap f^{-1}(y)$ мелкости меньше $1/i$ и k-мерным весом меньше $t + 1/i$. В силу компактности, такое покрытие можно выбрать конечным и открытым. Тогда оно покрывает и множества $A \cap f^{-1}(y')$ для всех y', достаточно близких к y.

Таким образом, A_t есть пересечение счетного набора открытых множеств. Следовательно, оно измеримо. ☐

Левая и правая часть формулы коплощади счетно аддитивны по A. По теореме о приближении, A можно разбить на счетное число частей, одна из которых имеет меру 0, а на каждой из остальных f совпадает с сужением некоторой C^1 функции. Для множества меры 0 формула доказана, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $f|_A$ — сужение C^1 функции. Можно считать, что $f \in C^1$.

Разобъем A на две части: множество точек, где $rk(df) = k$, и множество точек, где $rk(df) < k$. В силу аддитивности, достаточно доказать теорему для каждого из множеств.

Сначала рассмотрим случай, когда df имеет ранг k всюду на A. В этом случае в окрестности любой точки $x \in A$ отображение f можно представить в виде $f = L \circ \phi$, где $L = d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — линейное отображение, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм этой окрестности на окрестность начала координат, причем $d_x\phi$ — тождественно. Для L формула коплощади следует из теоремы Фубини. Вблизи x отображение ϕ билипшицево с константой, близкой к 1, поэтому оно мало искажает якобианы и меры Хаусдорфа.

Осталось доказать формулу в случае, когда ранг df всюду меньше k, то есть $J_k f = 0$ всюду на A. В этом случае надо доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy = 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и определлим $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ формулой $g(x,z) = f(x) + \varepsilon z$. Легко видеть, что dg всюду имеет ранг k и $J_k g(x,z) \le \varepsilon(C+\varepsilon)^{k-1}$, где C — константа Липшица для f. Пусть $Q = A \times B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Применяя уже разобранный случай, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y))\, dy = \int_Q J_k g \le C(n)C(f)\varepsilon.$$

Определим $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ формулой $p(x,z) = z$ и применим лемму к множеству $Q \cap g^{-1}(y)$ и отображению p. Получаем

$$\mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \ge c \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(Q \cap g^{-1}(y) \cap p^{-1}(w))\, dw = c \int_{B(0,1)\subset\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w))\, dw.$$

Интегрируя по y и переставляя интегралы по y и по w, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \ge c \int_{B(0,1)} dw \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w))\, dy.$$

Внутренний интеграл не зависит от w, поэтому это выражение равно

$$= c\alpha(n) \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy.$$

Итак,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy \le C(n) \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \le C(n,f)\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что левая часть равна 0, что и требовалось.

A Точки Лебега

Замечание. Если f суммируема, то функцию $\tilde{f}$ из теоремы Лузина можно выбрать так, что $\int |f - \tilde{f}|\, d\mu < \varepsilon$.

Доказательство. Найдется такое $M > 0$, что $\int (f - M)_+ < \varepsilon/4$ и $\int (f_- - M) < \varepsilon/4$. Обрежем функцию значениями M сверху и $-M$ снизу и применим теорему Лузина с $\varepsilon/2M$ вместо ε. □

Теорема. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — локально μ-суммируемая функция, где μ — локально конечная борелевски регулярная внешняя мера. Тогда почти любая точка $x \in \mathbb{R}^n$ является точкой Лебега, то есть*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |f - f(x)|\, d\mu = 0.$$

в частности,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} f\, d\mu.$$

Доказательство. Можно считать, что f суммируема. Предположим противное. Для $\delta > 0$ обозначим

$$A_\delta = \{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |f - f(x)| \, d\mu > \delta\}.$$

Тогда для некоторого δ_0 имеем $\mu(A_{\delta_0}) = m_0 > 0$. Воспользовавшись дополнением к теореме Лузина, представим f в виде $f = g + h$, где g непрерывна, $h = 0$ вюду кроме множества меры $m_0/2$ и $\int |h| < \delta_0 m_0/2$. Обозначим $A = A_{\delta_0} \cap \{x : h(x) = 0\}$. Для каждого $x \in A$ имеем

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |h| \, d\mu > \delta_0.$$

По теореме Безиковича существует дизъюнктный набор шаров $B_i = B(x_i, r_i)$, покрывающий почти все A, таких, что

$$\int_{B_i} |h| \, d\mu > \delta_0 \mu(B_i)$$

для всех i. Тогда

$$\int_{\bigcup B_i} |h| \, d\mu > \delta_0 \mu(A) \geq \delta_0 m_0/2,$$

противоречие с выбором h. □